Phys. sp. 444 tc (1

Mascart

8 462

p. 316
p. 285

<36632027000016
S
<36632027000016
Bayer. Staatsbibliothek

Lehrbuch

der

Elektricität und des Magnetismus.

Von

E. Mascart, und **J. Joubert,**

Professor am Collège de France, Director des Bureau central météorologique.

Professor am Collège Rollin.

Autorisirte deutsche Uebersetzung

von

Dr. Leopold Levy.

Erster Band.

Mit 127 in den Text gedruckten Abbildungen.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1886.

376 D

28/9 85

Lehrbuch

der

Elektricität und des Magnetismus.

Lehrbuch

der

Elektricität und des Magnetismus.

Von

E. Mascart,
Professor am Collège de France,
Director des Bureau central météorologique,

und

J. Joubert,
Professor am Collège Rollin

Autorisirte deutsche Uebersetzung
von
Dr. Leopold Levy.

Erster Band.

Mit 127 in den Text gedruckten Abbildungen.

Berlin.
Verlag von Julius Springer.
1886.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort der Verfasser.

Das vorliegende Werk ist aus den Vorlesungen hervorgegangen, die der Eine von uns mehrere Jahre hindurch am *Collège de France* gehalten hat. Es soll aus zwei Teilen bestehen: einem ersten, dem vorliegenden, mehr theoretischen, einem zweiten folgenden, von mehr experimentellem Charakter, in welchem wir die verschiedenen Erscheinungen, die Messungsmethoden und die wichtigsten Anwendungen der theoretischen Auseinandersetzungen untersuchen werden.

Diese Art der Verteilung des Stoffes schien uns grosse Vorzüge zu besitzen. Denn die Erscheinungen sind, zumal auf dem Gebiete der Elektricität, fast immer so complexer Natur, und das Verständnis aller Einzelheiten, welche in diesen Erscheinungen auftreten, erfordert häufig weit ausgebreitetere Kenntnisse, als die Capitel, denen man sie wegen ihres vorherrschenden Charakters einfügen muss, bieten können. Die Deutung der Versuche wird demnach durch die vorausgegangene Auseinandersetzung der allgemeinen Prinzipien der Wissenschaft wesentlich erleichtert.

Zunächst führen wir die Thatsachen, die zur Aufstellung der Theorie dienen, systematisch geordnet kurz an, dann untersuchen wir die aus jener Theorie folgenden mechanischen Consequenzen. Der vorliegende Band bildet demnach ein in sich abgeschlossenes Werk, und der Gedanke, der uns bei der Bearbeitung desselben geleitet hat, wäre kurz ausgedrückt in dem Titel: Versuch einer mechanischen Theorie der Elektricität — ein Titel, der uns aber zu anspruchsvoll erschienen ist.

Wir steckten uns das Ziel, zur Verbreitung der tiefen von Faraday in die Wissenschaft eingeführten und von Clerk Maxwell so geistvoll weiter ausgebildeten Conception der Kraftlinien und der Mitwir-

kung eines Zwischenmittels für die elektrischen und magnetischen Erscheinungen beizutragen. Diese Conception wirft helles Licht auf die Beziehungen, die zwischen verschiedenen Erscheinungen obwalten, und ihr verdankt eine ganz neue Theorie des Lichtes ihren Ursprung.

Da wir in erster Linie den Physikern einen Dienst zu leisten beabsichtigten, haben wir uns bemüht, so weit es in unserer Kraft lag, die Beweise zu vereinfachen, ohne darum die Strenge der Darstellung aufzugeben. Die Abschnitte, die ein tiefer eingehendes Studium heischen — sie sind leicht herauszufinden — können ohne Schaden bei einer ersten Lectüre übergangen werden; in den meisten Fällen sind dieselben nicht unbedingt nötig, um der Entwicklung der Theorie folgen zu können.

Die Elektricitätslehre hat in den letzten Jahren eine vollkommene Umwälzung erfahren; wir weisen mit Dank auf das hin, was wir den Arbeiten der Gelehrten entlehnt haben; insbesondere dienten uns die Abhandlungen von Sir W. Thomson und das vorzügliche Lehrbuch von Clerk Maxwell zur Stütze.

Vorwort des Uebersetzers.

Obwohl die neueren Anschauungen, wie sie von Faraday in die Elektricitätslehre eingeführt sind und immer allgemeinere Verbreitung finden, durch die anerkannte Uebersetzung des grundlegenden Werkes von Maxwell durch Dr. B. Weinstein*) dem deutschen Leser bereits näher geführt sind, glaubt der Uebersetzer des vorliegenden, denselben Gegenstand von demselben Gesichtspunkte aus behandelnden Buches Einiges zur Verbreitung der neuen Auffassung beizutragen. Das Maxwell-sche Buch wird trotz seiner inneren Systematik, trotz seiner Klarheit im Einzelnen, dem Anfänger immer schwer verständlich sein, einmal, weil es nicht leicht ist, das Ganze im Zusammenhang zu überblicken, dann wegen der so schwierigen mathematischen Hilfsmittel, die Maxwell hie und da gebraucht. Die allgemein bewährte Einfachheit der französischen Darstellung zeigt sich auch in dem vorliegenden Buche, und diese sowie die weitere Ausführung und Specialisirung, welche einzelne Gebiete in demselben erfahren haben, werden seine Durcharbeitung für den Studirenden — und an diesen ist bei der Darstellung in erster Linie gedacht — erspriesslich machen. Das Buch soll nicht einen Ersatz für das Maxwell'sche Werk bieten, sondern eine Ergänzung desselben sein und zum Studium dieses letzteren vorbereiten.

Der Eingeweihte wird überall die Entlehnungen aus Maxwell erkennen, auf die besonders hinzuweisen überflüssig erschienen ist.

Die Aenderungen des Textes, welche in der englischen Uebersetzung vorgenommen sind, sind in der vorliegenden auf Wunsch der Herren

*) Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus von James Clerk Maxwell, M. A. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. B. Weinstein. In zwei Bänden. Berlin 1883, Julius Springer.

Autoren berücksichtigt; die Rechnungen sind sämmtlich revidirt, und einige kleine Ungenauigkeiten des Textes wie der englischen Ausgabe ausgemerzt worden.

Der Uebersetzer fühlt sich verpflichtet, auch an dieser Stelle seinem Freunde Dr. B. Weinstein für seine freundliche Hilfe bei den Correcturen sowie dem Herrn Verleger für die saubere Ausstattung des Buches seinen Dank auszusprechen.

Inhalt.

Erster Teil. — Statische Elektricität.

1. Capitel. — Einleitung.

Seite

Elektrisirung . 3
Leiter (Conductoren), Nichtleiter (Isolatoren) 3
Zwei Arten von Elektricität 4
Wirkungen der Elektricität. — Elektrische Massen 4
Zeichen der Elektrischen Massen 5
Elektrische Kraft . 5
Teilung elektrischer Massen 6
Berührungselektricität . 6
Elektrisirung durch Influenz. — Induction 7
Elektrisches Gleichgewicht 7
Dielektrica . 7
Die Existenz der Elektricität ist bei Leitern auf die Oberfläche beschränkt . 7
Induction auf einen geschlossenen Leiter 8
Addition von Ladungen . 8
Hypothesen über die Natur der Elektricität 9
Elektrische Dichte . 10

2. Capitel. — Das Potential.

Elektrisches Feld . 11
Kraftlinien . 11
Definition des Potentials 11
Niveauflächen. — Elektromotorische Kraft 12
Ausdruck der Kraft als Funktion des Potentials 13
Gleichgewicht in Leitern . 14
Numerischer Wert des Potentials 15
Potential für das Coulomb'sche Wirkungsgesetz 15
Kraftströmungen . 17
Green'scher Satz . 18
Gleichungen von Laplace und Poisson 21
In Leitern befindet sich die Elektricität nur auf der Oberfläche 23
Formel von Green . 24
Kraftröhren . 25
Coulomb'scher Satz . 26
Correspondirende Elemente 27
Gleichförmiges Feld . 27

Seite
Eine elektrische Fläche, welche zwei Dielektrica trennt 27
Elektrostatischer Druck . 29
Folgerung aus der Thatsache, dass die Elektricität sich bei Leitern nur an der Oberfläche aufhält . 31
Wirkung der Kugelschalen . 33
Wirkung einer aus homogenen geladenen Schalen bestehenden Kugel . . . 34

3. Capitel. — Allgemeine Sätze.

Emission und Absorption von Kraft durch elektrische Massen 37
Ausserhalb der wirksamen Massen kann das Potential weder ein Maximum noch ein Minimum besitzen 37
Punkte und Linien des Gleichgewichtes 38
Der Gleichgewichtszustand ist ein eindeutig bestimmter 40
Sätze über geschlossene Oberflächen 41
Faraday'sches Gesetz . 45
Lehrsatz von Gauss . 46
Folgerungen . 47
Lehrsatz von Earnshaw . 48

4. Capitel. — Elektrisches Gleichgewicht.

Gleichgewichtsbedingungen für Leiter 51
Allgemeine Bemerkungen . 52
Beziehungen zwischen den Ladungen und den Potentialen 53
Analogieen für die Aufgabe über das elektrische Gleichgewicht 54
Elektrische Capacität . 58
Capacität einer Kugel . 59
Capacität eines Ellipsoids . 59
Spitzenwirkung . 61
Von einer concentrischen Schale eingehüllte Kugel 62
Condensatoren . 63
Leydener Flasche . 64
Coaxiale Kreiscylinder . 65
Capacität der Telegraphenkabel 67
Condensatorplatten . 67
Capacität eines Systems von Leitern 69
Elektrische Batterie . 70
Ladung in Cascaden . 70
Allgemeine Aufgabe über die gegenseitige Influenz zweier isolirter Leiter. — Methode von Murphy . 72
Gegenseitige Einwirkung zweier elektrischer Leiter 73

5. Capitel. — Arbeit der elektrischen Kräfte.

Elektrische Energie . 75
Energie eines einzelnen Leiters 75
Energie eines Systems von Leitern 76
Batterieentladung. — Auf Quantität gekoppelte Batterie 78
Unvollständige Entladung . 78
Entladung einer Cascadenbatterie 79

Seite
Elektrische Arbeit während der Ortsveränderung isolirter Leiter 80
Leiter mit constantem Potential 80
Anwendung auf die Theorie der symmetrischen Elektrometer 82

6. Capitel. — Dielektrica.

Rolle des dielektrischen Mediums 85
Ausdruck der Kraft durch Drucke 85
Spannung und Abstossung der Kraftlinien 90
Energie des dielektrischen Mediums 91
Specifische inductive Capacität 92
Elektrische Absorption . 93
Polarisation des Dielektricums 93
Definition des Dielektricums 94
Brechung der Strömung . 96
Röhren und Strömung der Induction 96
Charakteristische Gleichungen der Induction 97
Bemerkungen über die ideale Schicht 98
Ladungen zweier correspondirender Elemente 99
Energie eines Systems in dem Falle beliebiger Dielektrica 100
Vergleich mit den Wärmeerscheinungen 100
Aenderung des Potentials durch Zwischenschiebung eines Dielektricums . . 101
Maxwell's Theorie der Verschiebung 105

7. Capitel. — Specielle Fälle des Gleichgewichts.

Darstellung des elektrischen Feldes 108
Gleichförmiges Feld . 109
Gegen eine Ebene symmetrisches Feld 110
Cylindrische Systeme . 111
Zwei parallele Linien . 112
Mehrere parallele Linien . 113
Zwei Linien von entgegengesetztem Zeichen 114
Zwei entgegengesetzt gleich geladene Linien 115
Rotationssystem . 117
Fall einer einzelnen Masse . 117
Zwei beliebige Massen . 118
Zwei gleiche, gleichartige Massen 119
Zwei ungleiche Massen von demselben Zeichen 120
Zwei entgegengesetzt gleiche Massen 121
Elektrisches Moment . 122
Prinzip der Bilder . 124
Induction in einem aus zwei durch eine Ebene getrennten Dielektrica bestehenden Mittel . 125
Drei durch zwei parallele Ebenen von einander getrennte Dielektrica . . . 127
Zwei entgegengesetzt gleiche, einander unendlich nahe Massen 130
Induction auf einen unendlich kleinen Körper 134
Polarisirte Kugel. — Gleitschichten 134
Leitende Kugel in einem gleichförmigen Felde 137
Nicht isolirte leitende Kugel in einem gleichförmigen Felde 139

Seite
Dielektrische Kugel in einem gleichförmigen Felde 140
Concentrische sphärische Schichten in einem gleichförmigen Felde 143
Poisson's Hypothese über die Constitution der Dielektrica 145
Zwei ungleiche Massen von entgegengesetztem Zeichen 148
Elektrisirung einer Kugel unter dem Einflusse eines Punktes 152
Bild an einer Kugel . 155
Bild eines gegebenen Systems 155
Einwirkung zweier Kugeln auf einander 156
Bewegung kleiner Körper in einem elektrischen Felde 159
Richtung einer dielektrischen Nadel in einem veränderlichen Felde 162
Wirkung eines Feldes auf eine leitende Nadel 165

8. Capitel. — Elektricitätsquellen.

Entdeckung von Volta . 166
Elektromotorische Kraft der Berührung 166
Gesetze von Volta. — Berührungsgesetz 167
Spannungsgesetz . 168
Ausnahmen vom Spannungsgesetze. — Galvanische Batterien 169
Folgerungen für den Abstand der Atome von einander 170
Berührung der Dielektrica 172
Elektrisirung durch Reibung 172
Elektrisirmaschinen . 172
Wesentliche Organe der Maschinen 173
Grenze der Ladung . 174
Leistungsfähigkeit der Maschinen 176

Zweiter Teil. — Elektrische Ströme.

1. Capitel. — Fortpflanzung der Elektricität im stationären Zustande.

Stationärer Zustand . 179
Analogie mit den Wärmeerscheinungen 179
Theorie von Ohm . 180
Hypothese von Kirchhoff . 181
Uebereinanderlagerung stationärer Zustände 181
Im stationären Zustande ist die Dichte der freien Elektricität im Innern der Leiter Null . 182
Lineare Leiter. — Ohm'sches Gesetz 183
Der Widerstand eines Leiters kann als der reciproke Wert einer Geschwindigkeit dargestellt werden 184
Physikalische Bedeutung dieser Geschwindigkeit 185
Beliebige lineare Leiter . 185
Die Kirchhoff'schen Gesetze 186
Widerstand eines verzweigten Leiters 188
Heterogene lineare Kreise 188
Der Kreis enthält elektromotorische Kräfte 190
Leiter von beliebiger Form. — Elektroden 191
Nicht homogene Leiter . 193

Seite
Anisotrope Leiter . 193
Leiter von zwei Dimensionen 195
Widerstand eines Leiters von beliebiger Form 197
Verteilung der Elektricität auf linearen Leitern 198
Fortpflanzung in einem Drahte mit Verlust an der Oberfläche 199
Widerstand eines Leiters im Falle eines seitlichen Verlustes 201

2. Capitel. — Veränderlicher Zustand.

Anwendung der Fourier'schen Formeln 203
Veränderlicher Zustand in einem cylindrischen Leiter 204
Dauer der relativen Fortpflanzung 205
Unendlicher Draht . 206
Momentane Contacte . 209
Elektrische Welle . 210
Draht von endlicher Länge 215
Momentane Contacte . 218
Anwendung der Condensatoren 219
Fortpflanzung in den Dielektrica 220
Residuen der Condensatoren 221

3. Capitel. — Energie der Ströme.

Entwicklung von Wärme . 223
Joule'sches Gesetz . 224
Beziehungen zwischen den Gesetzen von Ohm und von Joule 225
Peltier'sches Phänomen . 226
Chemische Zersetzungen . 228
Erstes Gesetz von Faraday 228
Polarisation der Elektroden 230
Secundäre Ströme . 231
Auf einander folgende chemische Wirkungen eines Stromes. — Zweites Gesetz von Faraday . 231
Elektrochemische Aequivalente 233
Gesetz von Ed. Becquerel . 234
Galvanische Elemente . 234
Depolarisirung durch Diffusion 235
Volta-Element . 235
Nicht polarisirbare Elemente 237
Element mit zwei Flüssigkeiten 238
Elektrostatische Erscheinungen in den Säulen 238
Nicht isolirte Säule . 239
Isolirte Säule . 239
Darstellung der Potentiale im Innern der Säule 240
Säule, die in ein leitendes Mittel taucht 241
Elektro-capillare Erscheinung 244

4. Capitel. — Thermoelektrische Ströme.

Entdeckung von Seebeck . 245
Gesetze der thermoelektrischen Ströme 246

	Seite
Gesetz von Volta	246
Gesetz von Magnus	246
Gesetz der successiven Temperaturen (Becquerel)	246
Gesetz der Zwischenmetalle (Becquerel)	247
Umkehrerscheinungen	247
Graphische Darstellung der Erscheinungen	248
Folgerungen aus dem Volta'schen Prinzip	249
Folgerungen aus der Umkehr des Stromes	250
Theorie von Sir W. Thomson	252
Thomson'sche Wirkung	254
Thermoelektrische Kräfte	255
Neutraler Punkt	256
Specifische Elektricitätswärme	257
Elektromotorische Kraft eines thermoelektrischen Elementes	258
Hypothese von Tait	260
Elektrischer Transport von Wärme	262
Charakter des Peltier'schen Phänomens	263

Dritter Teil. — Magnetismus.

1. Capitel. — Einleitung.

Magnete	267
Natürliche und künstliche, permanente und temporäre Magnete	267
Magnetische und diamagnetische Körper	268
Verteilung des Magnetismus in den Magneten. — Pole	268
Zwei Arten von Magnetismus	269
Gesetze der magnetischen Wirkungen	269
Magnetische Massen	270
Magnetisches Feld	271
Definition der Pole. — Magnetische Achse eines Magnets	271
Die magnetische Masse eines Magnets ist Null	272
Magnetische Momente	272
Einwirkung eines gleichförmigen Feldes auf einen Magnet	273
Astatische Systeme	274
Magnetische Polarität. — Durchbrechung eines Magnets	275
Magnetisirung durch Influenz	275
Weiches Eisen. — Coercitivkraft	276
Einfluss der Temperatur	277
Magnetische Fluida	277
Definition der Elemente des Erdmagnetismus	278
Verteilung des Erdmagnetismus	280
Hypothese eines Erdmagnets	281
Aenderungen des Erdmagnetismus	283

2. Capitel. — Constitution der Magnete.

Magnetische Fäden	285
Freier Magnetismus	285

Seite
Gleichförmiger Magnet . 286
Beliebiger Magnet . 286
Potential eines Magnets . 286
Ein Magnet ist mit einer magnetischen Fläche gleichwertig 287
Theorie von Poisson . 288
Theorie von W. Thomson 289
Intensität der Magnetisirung 289
Ausdruck des Potentials . 289
Gleichförmige Magnete . 292
Kraft im Innern eines Magnets 293
Magnetische Kraft . 295
Magnetische Induction. — Linien, Röhren, Strömung der Induction 295
Verschiedene Arten von Magneten 296
Magnetische Solenoide . 296
Solenoidale Magnete . 298
Blattmagnete oder magnetische Lamellen 298
Lamellenmagnete . 301
Potential der Magnetisirung 302
Potential eines solenoidalen Magnets 303
Potential eines lamellaren Magnets 304
Potential der Induction . 307
Potentielle Energie der Magnete 308
Energie eines magnetischen Blattes 309
Wirkung eines Feldes auf ein Blatt 311
Wirkung zweier Blätter auf einander 314
Relative Energie zweier Blätter 319
Neumann'sche Formel . 320

3. Capitel. — Specielle Fälle.

Potential eines gleichförmigen Magnets 321
Kugel . 321
Ellipsoid . 322
Transversal magnetisirter Cylinder 326
Potential magnetischer Blätter 327
Potential einer kreisförmigen Schicht 329
Potential eines gleichförmigen, kreisförmigen Blattes 332
Potential einer kugelförmigen Schicht 333
Solenoidale Magnete . 334
Cylinder . 335

4. Capitel. — Magnetische Induction.

Allgemeine Eigenschaften der magnetischen Induction 337
Inducirte, der magnetisirenden Kraft proportionale Magnetisirung 338
Die inducirte Magnetisirung befindet sich auf der Oberfläche 339
Continuitätsgleichung. — Coefficient der Induction 340
Fall zweier verschiedener magnetischer Mittel. — Relative Magnetisirung . . 341
Magnetische Aufnahmefähigkeit und Permeabilität 343

Seite
Anisotrope Körper . 344
Gleichförmige Magnetisirung . 345
Kugel . 346
Hypothese von Poisson . 347
Ellipsoid. — Cylinder . 347
Barlow'sche Aufgabe . 348
Anisotrope Körper . 351
Experimentelle Bestimmung der Magnetisirungscoefficienten 352
Verschiebung der Körper in einem magnetischen Felde. — Anziehungen und Abstossungen . 353
Gleichgewicht länglicher Massen in einem gleichförmigen Felde 356
Gleichgewicht der Körper in einem ungleichmässigen Felde 357
Schwingungen einer unendlich kleinen isotropen Nadel 359
Einfluss der Temperatur . 359

5. Capitel. — Die Magnete.

Magnetisirung . 361
Induction des Magnets auf sich selbst. — Entmagnetisirende Kraft 361
Specielle Fälle der Magnetisirung. — Kugel 363
Ellipsoid . 363
Ring . 364
Cylinder . 364
Beliebige Magnete. — Experimentelle Methoden 364
Schwingungen . 364
Torsionswaage . 365
Anwendung weichen Eisens 365
Messung der Strömung durch Inductionsströme 365
Verteilung der idealen Schicht 366
Cylindrische Magnete . 368
Empirische Formeln . 369
Hypothesen über die Constitution der Magnete 373
Theorie von Weber . 373
Theorie von Maxwell . 377
Beobachtungen von Jamin . 379
Einfluss der Temperatur . 380

6. Capitel. — Magnetischer Zustand der Erde.

Methode von Gauss . 381
Magnetische Parallele . 381
Magnetischer Aequator . 382
Magnetische Erdpole . 382
Eigenschaften eines geschlossenen Polygons 384
Einführung geographischer Coordinaten 386
Ausdruck des Potentials . 388
Befindet sich der Erdmagnetismus nur im Innern der Erde? 389
Einfluss der Sonne und des Mondes 390

Seite

Vierter Teil. — Elektromagnetismus.

1. Capitel. — Ströme und magnetische Blätter.

Versuch von Oersted . 395
Magnetisches Feld eines Stromes 395
Einwirkung eines geradlinigen Stromes auf einen Pol. — Versuche von Biot und Savart . 396
Potential eines unbegrenzten, geradlinigen Stromes 398
Das Potential eines unendlich langen Stromes ist keine eindeutige Funktion der Coordinaten . 399
Potential eines Winkelstromes 400
Potential eines Dreiecksstromes 401
Potential eines beliebigen geschlossenen Stromes 402
Gleichwertigkeit eines geschlossenen Stromes mit einem magnetischen Blatte. — Ampère'scher Lehrsatz 402
Bemerkungen über die Aequivalenz eines geschlossenen Stromes und eines magnetischen Blattes . 403
Energie in Bezug auf ein magnetisches System und auf einen Strom . . . 404
Einwirkung zweier geschlossener Ströme auf einander 405
Relative Energie zweier Ströme 406
Elektromagnetische Rotationen 406
Versuche von Faraday . 408
Andere Form des Ausdruckes für die elektromagnetische Arbeit 409
Elektromagnetische Wirkung auf ein Stromelement 410
Wirkung zweier Stromelemente auf einander 411
Elektromagnetische Intensität des Stromes 412
Elektromagnetische Einheiten 412

2. Capitel. — Elementarwirkungen.

Methode von Ampère . 413
Wirkung eines Poles auf ein Stromelement. — Fundamentale Prinzipe . . . 414
Wirkung eines Poles und eines Stromes auf einander 418
Aequivalenz eines Stromes mit einem magnetischen Blatte 421
Wirkung zweier Stromelemente 421
Bestimmung der Funktionen $F(r)$ und $f(r)$ 424
Bestimmung des Verhältnisses der beiden Constanten 426
Bestimmung der Constante h 427
Elektrodynamische Einheit der Intensität 429
Formeln, die mit der Ampère'schen gleichbedeutend sind 430
Formel von Reynard . 430
Allgemeine Formel . 432
Formel von Ampère . 433
Grassmann'sche Formel . 433

3. Capitel. — Specielle Fälle.

Wirkung zweier paralleler Ströme 435
Winkelströme . 435

Seite
Scheinbare Abstossung zwischen zwei einander folgenden Stromelementen . . 436
Elektromagnetische Drehungen. — Barlow'sches Rad 437
Versuch von Ampère . 438
Rotation der Flüssigkeiten 438
Versuch von Davy . 439
Versuch von Jamin . 439
Versuch von Bertin . 439
Elektrodynamische Rotationen 439
Wirkung eines gleichförmigen Feldes 440
Astatische Kreise . 442
Drehung eines Stromes unter der Einwirkung der Erde 442
Wirkung zweier rechteckiger Kreise auf einander 444
Eigenschaften der Kreisströme 446
Elektromagnetisches Solenoid 447
Cylindrische Spule . 447
Ringförmige Spule . 448
Fall einer beliebigen Oberfläche 449
Ampère'sche Theorie des Magnetismus 449
Magnetisirung durch Ströme 451
Beispiel . 452
Messung der Ströme. — Galvanometer 453
Tangentenbussole . 455
Elektrodynamometer . 455
Messung der Entladungen . 456

4. Capitel. — Induction.

Entdeckung von Faraday . 459
Gesetz von Lenz . 461
Satz von Neumann . 461
Theorie von Helmholtz und Thomson 461
Allgemeines Gesetz der Induction 464
Inductionscoefficienten . 466
Elektromagnetische Induction 466
Elektrodynamische Induction 467
Innere Energie des Stromes 468

5. Capitel. — Specielle Fälle der Induction.

Der elektromagnetische Widerstand ist einer Geschwindigkeit äquivalent . . 470
Geschlossener Kreis in einem gleichförmigen Felde 472
Bestimmung der Inclination durch inducirte Ströme 472
Faraday'sche Scheibe . 473
Erdströme . 473
Variabler Zustand des Stromes 474
Extrastrom bei der Oeffnung 476
Veränderliche elektromotorische Kraft 477
Entladungsstrom. — Oscillirende Entladungen 478
Fall zweier Kreise . 482

Seite
Unterbrechungsstrom . 484
Schliessungsstrom . 485
Zwei Kreise mit einer veränderlichen elektromotorischen Kraft 486
Telephon und Mikrophon . 488
Induction in einem offenen Kreise 489
Gesetze der Zweigströme im variabeln Zustande 490
Inductionserscheinungen in den Telegraphenkabeln 494
Berechnung der Inductionscoefficienten. — Solenoide 495
Coaxiale Spulen . 497
Spulen mit Weicheisenkern . 498
Ringförmige Spulen . 499
Elektrische Motoren . 499
Elektromotoren . 501
Anwendung auf die Lehre vom Magnetismus 504
Weber's Hypothesen über den Magnetismus und den Diamagnetismus . . . 505
Absolut leitende Schirme . 507

6. Capitel. — Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes.

Theorie von Maxwell . 509
Gleichungen des magnetischen Feldes 509
Gleichungen der Ströme . 512
Potentielle Energie der Ströme 512
Relative Verschiebung von Kreisen 514
Gleichungen des elektrischen Feldes 515

7. Capitel. — Inductionserscheinungen in nicht linearen Leitern.

Rotationsmagnetismus . 517
Leitende Blätter . 517
Fall eines ebenen Blattes . 519
Elektromagnetische Bilder . 522
Induction eines beweglichen magnetischen Systems 523
Berechnung der Wirkung der inducirten Ströme 524
Fall eines einzigen Poles . 525
Versuch von Arago . 530
Dämpfung der Bussolen . 532
Induction auf einen beliebigen Leiter 532

8. Capitel. — Optische Erscheinungen.

Entdeckung von Faraday . 533
Positive und negative Körper 533
Gesetze von Verdet. — Verdet'sche Constante 534
Dispersion durch magnetische Drehung 535
Versuch von Kerr . 535
Erklärung der Drehung der Polarisationsebene 535
Bemerkungen von Sir W. Thomson 540
Elektrische Doppelbrechung . 541

Seite

9. Capitel. — Elektrische Einheiten.

Fundamentale Einheiten. — Abgeleitete Einheiten 543
Dimensionen einer derivirten Einheit 544
Abgeleitete mechanische Einheiten 544
Elektrische und magnetische abgeleitete Einheiten 546
Elektrostatisches System 546
Elektromagnetisches System 548
Dimensionen der Haupteinheiten 550
Beziehungen zwischen beiden Systemen von Einheiten 551
Wahl der Fundamentaleinheiten 552
Absolutes C. G. S. System 552
Praktisches System . 553
Vergleichende Werte der Haupteinheiten 554
Physikalische Auffassung der Geschwindigkeit *a* 555

10. Capitel. — Allgemeine Theorien.

Ampère's Anschauungen . 558
Formeln von Gauss und Weber 558
Inductionserscheinungen . 562
Verschiedene Versuche einer Theorie 564
Elektromagnetische Theorie des Lichtes 566
Allgemeine Gleichungen . 566
Fortpflanzung von Wellenbewegungen in einem Dielektricum 568
Ebene Wellen . 568
Verteilung der Energieen 570
Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes 571
Specifische inductive Capacität 571
Anisotrope Mittel . 572
Unvollkommen isolirende Körper 574
Leitende Körper . 575
Drehende magnetische Polarisation 576
Hall'sches Phänomen . 576
Allgemeine Gleichungen . 578
Fortpflanzung einer ebenen Welle 578
Drehung der Polarisationsebene 579

9. Capitel. — Ergänzungen.

Folgerungen aus dem Carnot'schen Prinzip 582
Temperaturänderungen während der Magnetisirung 585
Elektrische Erwärmung des Turmalins 585
Prinzip der Erhaltung der Elektricität 586
Elektrocapillare Erscheinungen 587
Gascondensatoren . 588
Elektrische Ausdehnung des Glases 589
Compression des Turmalins 591
Verallgemeinerung des Lenz'schen Gesetzes 592

Erster Teil.

Statische Elektricität.

1. Capitel.

Einleitung.

1. Elektrisirung. — Die meisten Körper erhalten durch Reibung, wenigstens zeitweilig, die Eigenschaft, leichte Körper anzuziehen. Man nennt sie dann *elektrisirt*.

Zum Unterschiede bezeichnet man Körper als im natürlichen oder *neutralen* Zustande befindlich, wenn sie keine elektrischen Eigenschaften zeigen.

Kommt der angezogene Körper mit dem elektrischen Körper in Berührung, so wird er schliesslich nach längerer oder kürzerer Zeit abgestossen, und man findet, dass derselbe ebenfalls elektrisirt ist. Die elektrischen Eigenschaften können demnach durch blosse Berührung von einem Körper auf einen andern übertragen werden.

2. Leiter (Conductoren), Nichtleiter (Isolatoren). — Bei gewissen Körpern, wie Glas, Harz, Seide, Kautschuk, bleibt die Elektricität längere oder kürzere Zeit auf die Orte beschränkt, in welchen man sie durch Reibung oder Berührung hervorgerufen hat. Man bezeichnet diese Körper als *schlechte Leiter* der Elektricität.

Auf andern Körpern dagegen, wie auf Metallen, verbreiten sich die einem Punkte mitgeteilten elektrischen Eigenschaften fast unmittelbar über alle Punkte; solche Körper heissen *Leiter*. Der letzten Kategorie gehören die meisten Stoffe an, aus denen der Erdboden besteht; die Luft und die Dämpfe sind zu der ersteren Gattung zu zählen. Man kann demnach die Elektricität nur dann auf einem Leiter festhalten, wenn man diesen von der Erde *isolirt*, indem man ihn an einem schlecht leitenden Körper, wie an einem Glas-, Harz-, Hartgummi- oder Ebonitstabe oder auch an Seidenfäden oder dergleichen befestigt; daher der Name *Isolatoren* für schlecht leitende Körper.

In Wirklichkeit entspricht die Einteilung der Körper in Leiter und Isolatoren nicht einer *qualitativen* Verschiedenheit ihrer Eigenschaften. Die Elektricität verbreitet sich über alle Körper mehr oder weniger schnell. Man kennt keine absolut isolirende Körper, d. h. solche, auf denen die elektrischen Eigenschaften sich unbegrenzt ohne Aenderung erhalten.

Ebenso giebt es trotz der Schnelligkeit, mit der die Elektricität sich auf den besseren Leitern ausbreitet, keine Körper, auf denen diese Ausbreitung absolut augenblicklich erfolgt; man findet in dieser Hinsicht merkliche Unterschiede zwischen den einzelnen Leitern und kann den besonderen Widerstand bestimmen, den jeder von ihnen der Bewegung der Elektricität entgegensetzt.

3. Zwei Arten von Elektricität. — Bei der Reibung zweier Körper, z. B. eines Glas- und eines Harzstückes, an einander, werden beide elektrisch, aber in verschiedener Art: Jeder von ihnen stösst einen leichten isolirten Körper, den er berührt hat, und der dadurch einen Teil seiner Elektricität erhalten hat, ab; aber das Harzstück zieht den vom Glase berührten Körper an, das Glas den vom Harz berührten.

Demnach ist nach der Reibung der Zustand des Glases ein anderer als der des Harzes, was man dadurch ausdrückt, dass man sagt, die Elektricität des Glases sei *anderer Art* als die des Harzes. Der Versuch zeigt, dass alle elektrisirten Körper sich entweder wie Glas oder wie Harz bei dem angeführten Versuche verhalten. Ein elektrisirter Körper zieht den durch Glas elektrisirten Körper an und stösst den durch Harz elektrisirten ab, oder zieht umgekehrt den durch Harz elektrisirten Körper an und stösst den durch Glas elektrisirten ab.

Man kann diese fundamentale Eigenschaft der Elektricität durch den Satz ausdrücken: *Zwei mit gleichartiger Elektricität geladene Körper stossen einander ab, zwei mit ungleichartiger Elektricität geladene Körper ziehen einander an.*

4. Wirkungen der Elektricität. — Elektrische Massen. — Die Wirkung, welche zwei elektrisirte Körper, deren Dimensionen gegen ihre gegenseitige Entfernung klein sind, auf einander ausüben, hat die Richtung der dieselben verbindenden Geraden.

Coulomb hat direkt nachgewiesen, dass *diese Kraft dem Quadrate der Entfernung zwischen den auf einander wirkenden Körpern umgekehrt proportional ist.* Dieselbe hängt ferner von dem elektrischen Zustande, der *Elektrisirung,* der betreffenden Körper ab.

Wenn die elektrische Wirkung zwischen zwei genau gleichen, sehr kleinen Körpern, deren gegenseitige Entfernung der Längeneinheit gleich ist, die Einheit der Kraft beträgt, so sagt man, dass die *Menge der Elektricität* oder die *elektrische Masse* eines Jeden der beiden Körper der Einheit gleich ist.

Ist bei unverändertem Zustande des einen Körpers und bei unveränderter gegenseitiger Entfernung die Wirkung der beiden Körper auf einander 2, 3 ... mal so gross, so sagt man, dass die elektrische Masse des zweiten Körpers 2, 3 ... mal so gross geworden ist.

Die elektrische Masse ist demnach ceteris paribus der Kraft proportional, welche sie auf einen äusseren, in einer gegen seine Dimensionen grossen Entfernung befindlichen Körper ausübt, und die gegenseitige Einwirkung

zweier elektrischer Körper ist dem Produkte ihrer elektrischen Massen proportional.

5. — Wenn zwei Körper, z. B. eine Glas- und eine Metallplatte — die Metallplatte isolirt vorausgesetzt — nachdem sie an einander gerieben sind, in Berührung gebracht werden, so verhält sich dieser Körpercomplex jedem äusseren elektrischen oder unelektrischen Körper gegenüber so, als ob er sich in neutralem Zustande befände. Indessen sind die durch die Reibung hervorgerufenen elektrischen Eigenschaften nicht verschwunden; man braucht nur die beiden Platten von einander zu trennen, um zu constatiren, dass sie beide elektrisch sind. Demnach müssen die Wirkungen der beiden mit einander verbundenen Körper gleich und von entgegengesetztem Zeichen sein.

Daraus ergeben sich zwei Schlüsse:

Zwei Körper erhalten durch Reibung gegen einander gleiche Mengen Elektricität von verschiedener Art.

Die Abhängigkeit der Wirkung von der Entfernung ist für beide Elektricitätsarten dieselbe.

6. Zeichen der elektrischen Massen. — Dies führt zur Auffassung der elektrischen Massen verschiedener Art als Grössen von derselben Natur, aber von entgegengesetztem Zeichen. Wenn eine geschlossene Fläche Massen verschiedener Art einschliesst, dann ist die Wirkung auf eine äussere, der Einheit gleiche Masse, die sich in einer gegen die Dimensionen der betrachteten Fläche grossen Entfernung befindet, der Differenz der elektrischen Massen der beiden Arten proportional und ist eine anziehende oder abstossende, je nach der vorherrschenden Elektricitätsart. Indem man diese Massen mit den Zeichen + und — versieht, kann man sagen, dass die resultirende Wirkung der algebraischen Summe der in der Fläche eingeschlossenen elektrischen Massen proportional ist, und dass dieselbe eine anziehende oder eine abstossende ist, je nach dem Zeichen dieser Summe.

Es ist üblich, die auf dem Glase durch Reibung gegen Harz hervorgerufene Elektricität als *positive,* die gleichzeitig vom Harz angenommene Elektricität als *negative* zu bezeichnen.

7. Elektrische Kraft. — Die zwischen zwei kleinen Körpern, die sich in einem Abstande r von einander befinden und mit den Massen m bezw. m' geladen sind, ausgeübte Wirkung wird demnach ausgedrückt durch

$$f = \frac{m \cdot m'}{r^2}.$$

Dieser Ausdruck ist positiv, wenn die Massen gleiches Zeichen besitzen, die Kraft besteht dann in einer Abstossung. Im anderen Falle, wenn die Massen von entgegengesetztem Zeichen sind, ist das Produkt mm' negativ, und ihre Wirkung äussert sich als Anziehung.

Befindet sich eine elektrische Masse unter der Einwirkung irgend welcher elektrischen Körper, so ist klar, dass die auf dieselbe ausgeübte Wirkung

die Resultante aller Wirkungen ist, die die Massen, einzeln für sich betrachtet, ausüben würden, gleichviel ob die Massen verschiedenen Körpern angehören, oder ob sie Teile der Ladung eines und desselben Körpers sind.

Um einen kurzen Ausdruck zu gewinnen, werden wir *elektrische Kraft in einem Punkte* die Resultante aller Wirkungen nennen, die auf eine positive, der Einheit gleiche, in diesem Punkte befindliche Elektricitätsmenge ausgeübt werden.

8. Teilung elektrischer Massen. — Coulomb hat direkt nachgewiesen, dass, wenn eine leitende elektrische Kugel mit einer ihr genau gleichen in neutralem Zustande befindlichen Kugel in Berührung gebracht wird, nach Aufhebung der Berührung beide Kugeln elektrisch erscheinen, dass aber jede von ihnen nur halb so viel Elektricität besitzt, als die geladene Kugel ursprünglich hatte, und demgemäss für sich allein auf einen äusseren Punkt nur halb so stark wirkt als die geladene Kugel vor ihrer Berührung mit der ungeladenen. Hat sich die zweite Kugel nicht im neutralen Zustande befunden, sondern war sie selbst schon vor der Berührung mit der ersten elektrisch, so werden die schliesslichen Ladungen einander auch dann noch gleich; jede beträgt dann die Hälfte der algebraischen Summe der ursprünglichen Massen; dieselbe wird beispielsweise Null, die Körper gehen also in den neutralen Zustand über, wenn die ursprünglichen Ladungen gleich und von entgegengesetztem Zeichen waren.

Das Verhältnis bleibt dasselbe für zwei beliebig gestaltete Körper, wenn dieselben genau gleich sind, und wenn sie so mit einander in Berührung gebracht werden, dass sie zum Berührungspunkte symmetrisch liegen.

Ist die Bedingung der Symmetrie nicht erfüllt, so sind die Ladungen nach der Berührung nicht mehr gleich; aber die algebraische Summe derselben bleibt stets der ursprünglichen Masse gleich. Das Gesetz gilt ganz allgemein, wie viele und wie gestaltete Körper man auch in Berührung mit einander bringen mag; falls nicht in irgend einem Augenblicke einer der Leiter des Systems mit der Erde communicirt, bleibt die algebraische Summe der elektrischen Massen des Systems unveränderlich.

9. Berührungselektricität. — Volta hat die wichtige Thatsache entdeckt, dass schon die Berührung zweier ursprünglich im neutralen Zustande befindlicher, differenter Metalle, oder noch allgemeiner zweier beliebiger Körper von derselben Temperatur, ausreicht, sie in zwei differente elektrische Zustände zu versetzen und sie mit gleichen Mengen Elektricität von entgegengesetztem Zeichen zu laden.

Die Reibung ist nur eine besondere Art der Berührung. Die Ursache, welche die Elektricität hervorruft, scheint demnach in beiden Fällen dieselbe zu sein.

Aus der Entdeckung Volta's folgt, dass der oben aufgestellte Satz von der Gleichheit der Ladungen zweier zur Berührung gebrachter Kugeln nur unter der Bedingung gilt, dass dieselben aus gleichem Material bestehen

und dieselbe Temperatur besitzen. Aber der fundamentale Satz, dass die algebraische Summe der Ladungen vor und nach der Berührung dieselbe ist, bleibt in jedem Falle bestehen.

10. Elektrisirung durch Influenz. — Induction. — Bringt man einen ursprünglich im neutralen Zustande befindlichen Körper in die Nähe elektrischer Körper, so wird er, selbst wenn er keinen derselben berührt, elektrisch; diese Erscheinung wird als *Elektrisirung durch Influenz* oder *Induction* bezeichnet. Wenn der der Influenz ausgesetzte Körper isolirt ist, muss seine gesammte elektrische Ladung nach dem vorher Gesagten Null bleiben; er ladet sich demnach mit zwei gleichen Massen von entgegengesetztem Zeichen nach einem bestimmten Gesetze. Die Induction geht stets der Anziehung eines neutralen Körpers durch einen elektrischen Körper voraus, und die Wirkung, die zwischen den beiden Körpern ausgeübt wird, ist einfach die elektrischer Massen auf einander. Man kann es als eine experimentell festgestellte Thatsache ansehen, dass elektrische Massen nur auf andere elektrische Massen, nicht etwa auf die Körper einwirken.

11. Elektrisches Gleichgewicht. — Das wahre Wesen der Induction besteht darin, dass in jedem Punkte eines Körpers, in dem eine elektrische Kraft wirkt, Elektricität hervorgerufen wird. Nun kann in einem leitenden Körper nur dann elektrisches Gleichgewicht herrschen, wenn die elektrische Kraft in jedem seiner Punkte Null ist; die eigene Elektricität eines Körpers übt daher auf jeden Punkt des von ihm eingenommenen Raumes eine Wirkung aus, die der Wirkung der äusseren Massen entgegengesetzt gleich ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das elektrische Gleichgewicht in einem System von isolirten oder nicht isolirten Leitern ist demnach die, *dass die gesammte elektrische Kraft in jedem Punkte jedes einzelnen Leiters Null ist.*

12. Dielektrica. — Anders als in Leitern verhält sich die Elektricität in nicht leitenden Körpern oder Isolatoren; hier kann die elektrische Kraft wohl im Gleichgewichtszustande vorhanden sein, ohne dass die algebraische Summe ihrer Elemente verschwindet. Daher hat Faraday diese Körper *Dielektrica* genannt, um anzudeuten, dass dies Körper sind, in denen elektrische Kräfte existiren oder sich verbreiten können.

13. Die Existenz der Elektricität ist bei Leitern auf die Oberfläche beschränkt. — Die Versuche von Cavendish und von Coulomb haben gezeigt, dass bei jedem im Gleichgewichte befindlichen elektrischen System *die Leiter nur an ihrer Oberfläche Elektricität besitzen.* Auch die Oberfläche jeder geschlossenen Höhlung eines Leiters ist, wenn sie keine elektrischen Massen einschliesst, frei von Elektricität, und die elektrische Kraft ist in dem ganzen Raume der Höhlung Null. Wir werden sehen, dass diese fundamentale Eigenschaft nur mit dem quadratischen Gesetze der Fernwirkung vereinbar ist.

14. Induction auf einen geschlossenen Leiter. — Diese Beschränkung der Elektricität auf die Oberfläche der Leiter führt zu mehreren wichtigen Folgerungen.

Wird ein Leiter *durch Influenz* elektrisirt, so erhält er zugleich eine positive und eine negative Ladung; keine dieser Ladungen kann grösser sein als die Ladung des influenzirenden Körpers, des *Inductors*. Schliesst der influenzirte oder *inducirte* Leiter den Inductor vollständig ein, so ist die äussere elektrische Schicht von derselben Art wie die des Inductors, und die Stärke der Ladung ist in jedem Punkte dieser äusseren Schicht unabhängig von der Lage des inducirenden Körpers im Hohlraume des inducirten. Es ändert sich nichts hieran, selbst wenn der Inductor die innere Oberfläche berührt hat; in diesem Falle bildet derselbe aber, wenn er ebenfalls ein Leiter ist, mit dem inducirten Körper nur eine einzige leitende Masse, und die innere Oberfläche behält keine Spur von Elektricität. Es muss sich also im Innern des inducirten Körpers eine elektrische Schicht befunden haben, die zur Neutralisirung der Ladung des inducirenden Körpers bei der Berührung gerade ausreichte, die also derjenigen des Inductors entgegengesetzt gleich gewesen ist, und demnach besteht die Erscheinung darin, dass beide Begrenzungen des inducirten Körpers genau so stark geladen sind wie der Inductor, die innere mit Elektricität entgegengesetzter, die äussere mit solcher derselben Art.

Diese Eigenschaft bleibt noch bestehen, wenn der influenzirende Körper ein schlechter Leiter ist, und allgemeiner, wenn die influenzirenden Massen in beliebiger Weise in dem Hohlraume eines geschlossenen Leiters verteilt sind.

15. Addition von Ladungen. — Wir haben oben gesehen, dass man die elektrische Ladung eines Leiters halbiren kann. Man kann in derselben Weise der Ladung eines Leiters beliebige elektrische Massen hinzufügen. Es genügt hierzu, dass der Leiter eine fast vollständig geschlossene Höhlung besitzt, in die man elektrisirte Leiter einbringen kann; man kann dann durch Verbindung dieser mit der inneren Begrenzung die Elektricität, mit der dieselben geladen sind, auf die äussere Oberfläche überführen.

16. — So vermag man die algebraische Summe der im Innern einer geschlossenen Oberfläche enthaltenen elektrischen Massen beliebig zu vergrössern oder zu verkleinern, indem man positive oder negative Massen einbringt oder herausnimmt. Aber wohl gemerkt, wenn keine elektrische Masse durch die Oberfläche in dem einen oder anderen Sinne hindurchkommt, bleibt es unmöglich — welchen Einwirkungen man auch die eingeschlossenen Körper aussetzen mag, der Reibung, der Induction, dem Contact, physikalischen oder chemischen Einwirkungen — die Gesammtmenge der Elektricität zu ändern. Man ist nicht im Stande, auf irgend einem Körper eine bestimmte Elektricitätsmenge weder zu schaffen, noch zu zerstören, ohne dass gleichzeitig auf demselben oder auf einem andern

Körper eine gleiche Menge Elektricität von entgegengesetztem Zeichen hervorgerufen oder vernichtet wird.

17. Hypothesen über die Natur der Elektricität. — Die Elektricität, wie wir sie oben definirt und zu messen gelehrt haben, ist eine Grösse eigentümlicher Art. Sie ist vollständig bestimmt in Bezug auf ihre mechanischen Wirkungen, ist mit einem Zeichen behaftet wie eine Bewegungsgrösse, und die Theorie ihrer Erscheinungen kann auf Grund der experimentell bestimmten Gesetze ausgebildet werden ohne Zuhilfenahme irgend welcher Hypothese über ihr wahres Wesen. Wegen der Leichtigkeit, mit welcher die Elektricität sich in den Leitern verbreitet, hat man dieselbe mit einer Flüssigkeit verglichen, wie man früher die Erscheinungen der Wärmeleitung durch die Ausbreitung eines eigentümlichen Fluidums erklärt hat. Was die Eigentümlichkeit der Dualität, welche die elektrischen Erscheinungen zeigen, betrifft, so hat man dieselbe auf zwei Arten zu erklären versucht.

Nach Franklin enthält ein Körper in seinem natürlichen Zustande eine bestimmte normale Menge elektrischen Fluidums, und er wird positiv oder negativ elektrisch, je nachdem man durch die Einwirkung äusserer Körper seine Ladung mit diesem Fluidum vergrössert oder verkleinert. Die Anziehungen und Abstossungen der elektrischen Körper erklären sich dann durch die Annahme einer Abstossungskraft zwischen den Teilen des Fluidums selbst und einer Anziehungskraft, welche dieses Fluidum auf die ponderable Materie ausübt.

Die Hypothese der zwei Fluida, die von Symmer aufgestellt und, wenigstens provisorisch, von Coulomb adoptirt wurde, besteht in der Annahme, dass entsprechend den beiden Elektricitätsarten zwei differente Fluida vorhanden sind, dass die Moleküle desselben Fluidums sich abstossen, dass diejenigen verschiedener Fluida sich anziehen und dass endlich in einem Körper in seinem natürlichen Zustande gleichwertige Mengen der beiden Fluida vorhanden sind, die in ihrer Mischung ein neutrales Fluidum bilden. Ein Körper ist hiernach positiv oder negativ elektrisch, wenn er einen Ueberschuss von dem einen oder dem anderen Fluidum enthält. Die Anziehungen und Abstossungen werden gleichfalls durch die Wirkungen zwischen den Fluidis und der ponderabeln Materie erklärt.

Der geringste Fehler dieser Hypothesen ist noch, dass sie überflüssig sind. Da übrigens nichts bei den Versuchen anzudeuten scheint, dass es eine Grenze für die Elektrisirung der Körper giebt, ist man zu der Annahme gedrängt worden, dass nach der Franklin'schen Theorie die normale Ladung eines Körpers, nach der Theorie der zwei Fluida die Masse des neutralen Fluidums unbegrenzt ist, eine Consequenz, die augenscheinlich mit der Annahme eines materiellen Fluidums in Widerspruch steht.

Einige in der Elektricitätslehre angewandte Bezeichnungen rühren von der Vorstellung der Fluida her; es kann nichts schaden, diese Bezeichnungen beizubehalten, wenn man nur dafür sorgt, sie durch die mathematischen

und empirischen Eigenschaften, welche sie ausdrücken sollen, zu definiren, in der Absicht, wie Coulomb es ausdrückt, „mit den geringsten Mitteln die Resultate der Rechnung und der Erfahrung darzustellen, nicht aber die wahren Ursachen der elektrischen Erscheinungen anzugeben.“ *)

18. Elektrische Dichte. — In dieser Weise hat die Annahme eines Fluidums zum Begriff der elektrischen Dichte geführt. Wenn die Elektricität den ganzen Raum eines Körpers, was beispielsweise bei einem Dielektricum der Fall sein kann, einnimmt und dort gleichmässig verteilt ist, so nennt man *elektrische Dichte* die oben definirte Elektricitätsmenge, welche sich in der Raumeinheit befindet. Ist die Verteilung ungleichmässig, so ist die Dichte in einem Punkte das Verhältnis der elektrischen Ladung eines diesen Punkt umgebenden Volumelementes zu dem Rauminhalte dieses Volumelementes selbst.

Leiter besitzen nur auf ihrer Oberfläche Elektricität. Ist die Verteilung gleichmässig, so ist die *Flächendichte* die Elektricitätsmenge, die sich auf der Einheit der Fläche befindet. Bei beliebiger Verteilung ist die Flächendichte in einem Punkte das Verhältnis der Ladung eines um diesen Punkt gelegten Flächenelementes zum Flächeninhalt des Elementes.

Fasst man die elektrischen Erscheinungen als Wirkungen von Fluidis auf, so muss man annehmen, dass die elektrische Schicht an der Oberfläche eine gewisse Dicke besitzt und bis zu einer gewissen Tiefe, die so klein sein mag, als man will, in den Leiter oder in das umgebende Dielektricum eindringt. Da durch Versuch sich die Dicke dieser Schicht nicht bestimmen lässt, so kann man, immer bei denselben Grundannahmen, entweder die Dichte als veränderlich bei constanter Dicke oder die Dichte als constant bei veränderlicher Dicke annehmen; in diesem Falle sind die Bezeichnungen *elektrische Dichte und elektrische Dicke in einem Punkte* gleichbedeutend.

Man sieht, dass, abgesehen von jeder Annahme eines Fluidums, die Bezeichnungen der elektrischen Raumdichte oder Flächendichte einen rein mathematischen und experimentellen Sinn haben, unabhängig von jeder Hypothese.

*) Histoire de l'Académie des sciences pour 1788 p. 673. Neu abgedruckt: Collection de mémoires relatifs à la physique. Paris 1884, pag. 252.

2. Capitel.

Das Potential.

19. — Wir wollen zunächst der Erfahrung entsprechend annehmen, dass die Wirkung zwischen zwei elektrischen Körpern von kleinen Dimensionen längs der sie verbindenden Geraden erfolgt und nur mit der Entfernung veränderlich ist, kurz dass dieselbe der Definition der sogenannten *Centralkräfte* entspricht; ferner dass dieselbe nach der Definition (4) dem Produkte der Elektricitätsmengen, welche die beiden Körper besitzen, proportional ist.

Wir nehmen ferner an, dass die gegenseitige Einwirkung zweier elektrischer Körper von endlichen Dimensionen die Resultante der Einwirkungen ist, die nach derselben Funktion der Entfernungen zwischen den Elementarteilen der Ladungen bestehen.

20. Elektrisches Feld. — Man nennt *elektrisches Feld* die ganze Ausdehnung des Raumes, in welchem sich die Wirkung des betrachteten elektrischen Systems bemerkbar macht. Im Allgemeinen ist ein elektrisches Feld unbegrenzt; es kann aber auch begrenzt sein, z. B. in dem Falle, dass sämmtliche wirksame Massen sich im Innern eines vollkommen geschlossenen Leiters befinden. Für Massen, die ihrer Grösse und Lage nach gegeben sind, ist die elektrische Kraft in jedem Punkte des Feldes eine Funktion der Coordinaten dieses Punktes allein.

Im Gleichgewichtszustande ist die Kraft innerhalb aller Leiter Null; das elektrische Feld umfasst also die von Leitern eingenommenen Räume nicht, es besteht nur aus den von einem isolirenden Medium oder *Dielektricum* ausgefüllten Zwischenräumen.

21. Kraftlinien. — Eine *Kraftlinie* in einem elektrischen Felde ist eine Linie, die in jedem Punkte die Richtung der Kraft berührt. Eine solche Linie verläuft natürlich so lange continuirlich, als sie nicht auf wirksame Massen stösst.

22. Definition des Potentials. — Wir fassen ein im Gleichgewicht befindliches System ins Auge und nehmen an, dass man, während alle wirksamen Massen in den von ihnen eingenommenen Stellungen befestigt

sind, eine positive, der Einheit gleiche Elektricitätsmenge von A nach B verschiebt. Die Arbeit der elektrischen Kräfte, welche dieser Verschiebung entspricht, ist dann von dem Wege unabhängig, auf welchem die Verschiebung von A nach B stattgefunden hat. Dies folgt aus der Annahme (**19**), dass die Kräfte centrale sind, und man sieht, dass man andernfalls durch Hin- und Herbewegung einer elektrischen Masse auf passend gewählten Wegen zwischen A und B eine unbegrenzte Arbeitsmenge ohne entsprechende Aufwendung von Kraft erzeugen könnte. Die betrachtete Arbeit hängt also nur von den Coordinaten der Punkte A und B ab; dieselbe ist die Differenz der Werte V_A und V_B, welche eine und dieselbe Funktion V in diesen beiden Punkten annimmt, und man kann, wenn man diese während der Verschiebung der Elektricitätseinheit von A nach B von der elektrischen Kraft geleistete Arbeit mit W_A^B bezeichnet, setzen

(1) $$W_A^B = V_A - V_B.$$

Die Funktion V spielt in der Theorie der elektrischen Erscheinungen eine Hauptrolle; man hat sie *Potential* genannt. Da diese Funktion durch ein Integral definirt ist, ist ihr Wert nur bis auf eine Constante bestimmt und die Aenderungen ihres Wertes werden durch die elektrische Arbeit gemessen.

Gleichung (1) sagt aber aus: *der Ueberschuss des Potentials in einem Punkte A über das Potential in B ist gleich der durch die elektrischen Wirkungen auf die Masseneinheit, wenn dieselbe sich von A nach B bewegt, geleisteten Arbeit; oder auch, derselbe ist die Arbeit, die man gegen die elektrischen Kräfte aufwenden müsste, um diese Masse von B nach A überzuführen.*

Bewegt sich die Masseneinheit einer Kraftlinie entlang, so ist die Arbeit für eine unendlich kleine Verschiebung ds auch gleich Fds, und die gesammte Arbeit für die Ueberführung von A nach B wird ausgedrückt durch

(2) $$W_A^B = \int_A^B F ds,$$

wo F die Kraft in den einzelnen Punkten der Bahn s bedeutet.

23. Niveauflächen. — Elektromotorische Kraft. — Man nennt *Niveaufläche* eine Fläche, die in jedem ihrer Punkte zur Richtung der daselbst wirksamen Kraft normal ist, also eine Fläche, die alle von ihr geschnittenen Kraftlinien senkrecht trifft. Handelt es sich um Centralkräfte, so kann man durch jeden beliebigen Punkt eine Fläche legen, welche dieser Bedingung genügt. Bewegt sich eine elektrische Masse auf einer Niveaufläche, so bleibt das Element der Arbeit constant Null, da hier die Kraft stets zur Verschiebung normal steht. Demnach hat das Potential für alle Punkte einer Niveaufläche einen und denselben Wert.

Betrachten wir zwei Niveauflächen S_1 und S_2, deren Potentiale bezw. V_1 und V_2 sind, so hat die Arbeit der elektrischen Kräfte, welche der Ueberführung der Masseneinheit von einem Punkte der ersten Fläche auf einen Punkt der zweiten entspricht, den Wert $V_1 - V_2$; derselbe ist von der Gestalt und Lage des durchlaufenen Weges und selbst von der Lage des Ausgangspunktes sowohl wie des Punktes, zu dem die Ueberführung erfolgt, unabhängig.

Für eine Elektricitätsmenge m, die von der Niveaufläche S_1 auf die Fläche S_2 übergeht, ist die Arbeit $m(V_1 - V_2)$. Die elektrische Arbeit tritt wie die der Schwere eines fallenden Körpers als Produkt von zwei Faktoren auf, der eine, m, entspricht der Masse des Körpers, der andere, $V_1 - V_2$, dem Produkte der Fallhöhe in die Erdbeschleunigung.

Ist eine positive elektrische Masse sich selbst überlassen, so strebt sie längs einer Kraftlinie nach den Punkten überzugehen, in denen das Potential niedriger ist; die negative Elektricität strebt unter denselben Umständen nach Orten hohen Potentials hin.

Sind elektrische Massen auf dielektrischen Körpern verteilt, so können sie sich nur so verschieben, dass sie das Dielektricum selbst mit sich ziehen. Die Leiter hingegen sind durch die Eigenschaft charakterisirt, dass sie den elektrischen Massen völlig freie Bewegung gestatten; jede der Massen bewegt sich dann so lange, bis sie auf die Oberfläche des Leiters gelangt ist, wo sich die ganze Elektricität dann so verteilt, dass das Gleichgewicht gesichert ist.

In allen Fällen kann die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ als die Ursache angesehen werden, welche elektrische Massen in Bewegung setzt; man bezeichnet dieselbe daher oft als *elektromotorische Kraft*.

24. Ausdruck der Kraft als Funktion des Potentials. — Es seien S und S' (Fig. 1) zwei unendlich nahe Nivauflächen, deren Potentiale V bez. V' sind. Im Punkte M der ersten Fläche ist die Kraft F. Bezeichnet dn den

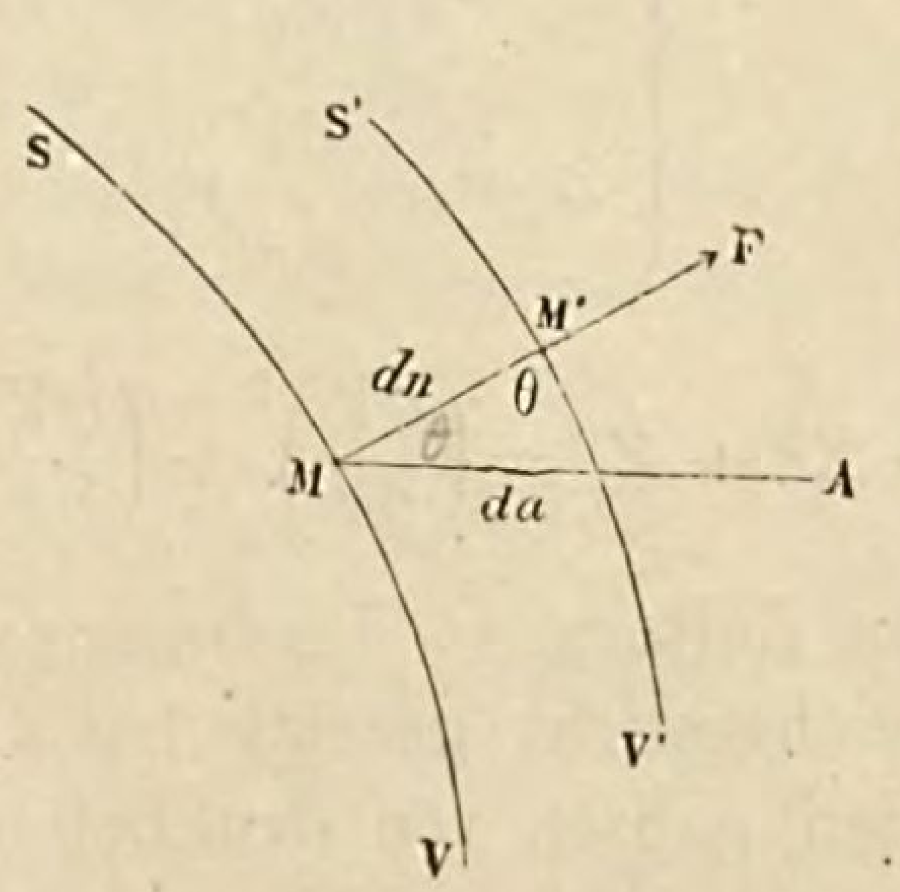


Fig. 1.

Abstand der beiden Flächen, gemessen auf der Normale, die von M ausgeht, so ist die durch diese Kraft beim Uebergange einer elektrischen Massen-

einheit von M nach M' geleistete Arbeit Fdn. Man erhält also die Gleichung

$$Fdn = V - V' = -dV,$$

woraus folgt

(3) $$F = -\frac{dV}{dn}.$$

So ist die Kraft in einem Punkte entgegengesetzt gleich der Ableitung des Potentials nach der Normale der Niveaufläche, die durch diesen Punkt geht.

Die Componente der Kraft nach irgend einer Richtung besitzt dieselbe Eigenschaft. Um dies zu zeigen, denken wir uns durch M eine Gerade MA gelegt, die mit der Normale in M einen Winkel θ bildet, und bezeichnen mit da den Teil dieser Geraden, der durch die beiden Flächen S und S' begrenzt ist. Die der Geraden MA parallele Componente F_a der Kraft F wird dann ausgedrückt durch

$$F_a = F\cos\theta = -\frac{dV}{dn}\cos\theta.$$

Es ist aber, wie aus der Figur zu ersehen,

$$dn = da\cos\theta,$$

demnach

$$F_a = -\frac{dV}{dn}\frac{dn}{da} = -\frac{\partial V}{\partial a}.$$

Die Componente der Kraft in irgend einer Richtung ist entgegengesetzt gleich der partiellen Ableitung des Potentials nach dieser Richtung.

Nimmt man drei rechtwinklige Achsen an, so sind hiernach die diesen Achsen parallelen Componenten X, Y, Z der Kraft F

(4) $$\begin{cases} X = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ Y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ Z = -\dfrac{\partial V}{\partial z}, \end{cases}$$

woraus folgt

(5) $$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

25. Gleichgewicht in Leitern. — Im Innern eines Leiters, auf dem die Elektricität sich ins Gleichgewicht gesetzt hat, ist die Kraft Null (**11**). Man hat demnach für den ganzen von den Leitern selbst eingenommenen Raum

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0;\quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

und folglich

$$V = \text{const.}$$

Hiernach *ist das ganze Volumen eines im Gleichgewichte befindlichen Leiters auf demselben Potential;* man könnte dies ein *Niveauvolumen* nennen. Da die Oberfläche desselben in diesem Falle eine Niveaufläche ist, steht die Kraft in jedem ihrer Punkte zu derselben normal; hieraus folgt: *Alle Kraftlinien verlassen die Leiter normal und stossen auf dieselben normal zu ihrer Oberfläche.*

26. Numerischer Wert des Potentials. — In allen Erscheinungen treten die elektrischen Niveaus nur mit den Differenzen, nicht mit den absoluten Werten der entsprechenden Potentiale auf. Man kann demnach diesen Potentialen eine beliebige Constante hinzufügen.

In dem Ausdrucke

$$W_1^2 = V_1 - V_2,$$

welcher die der Verschiebung einer Elektricitätseinheit von einer Fläche vom Niveau V_1 auf eine solche vom Niveau V_2 entsprechende Arbeit angiebt, wollen wir annehmen, dass die Fläche vom Niveau V_2 der Erdboden sei, und ferner festsetzen, dass das Potential der Erde Null sei, dann erhalten wir einfach

$$W_1^0 = V_1.$$

Der numerische Wert des Potentials in irgend einem Punkte ist die Zahl der Arbeitseinheiten, welche die wirkenden elektrischen Massen bei der auf irgend einem Wege erfolgenden Verschiebung der positiven Elektricitätseinheit von diesem Punkte bis zum Erdboden leisten. Das Zeichen des Potentials ist das der Arbeit der elektrischen Kräfte bei dieser Verschiebung.

In anderen Worten: *Das Potential in einem Punkte ist die Arbeit, welche man aufwenden muss, um eine der Einheit gleiche elektrische Masse von der Oberfläche der Erde oder von einem mit der Erde leitend verbundenen Körper in diesen Punkt überzuführen.*

27. Potential für das Coulomb'sche Wirkungsgesetz. — Wir haben bis jetzt das Gesetz, nach welchem sich die Wirkung elektrischer Massen mit der Entfernung ändert, unbestimmt gelassen. Wir wollen jetzt, entsprechend den experimentellen Bestimmungen Coulomb's, annehmen, dass dieses Gesetz das des *umgekehrten Quadrats der Entfernung* ist. In diesem Falle ergiebt sich das Potential einfach als Funktion der Massen und der Entfernungen.

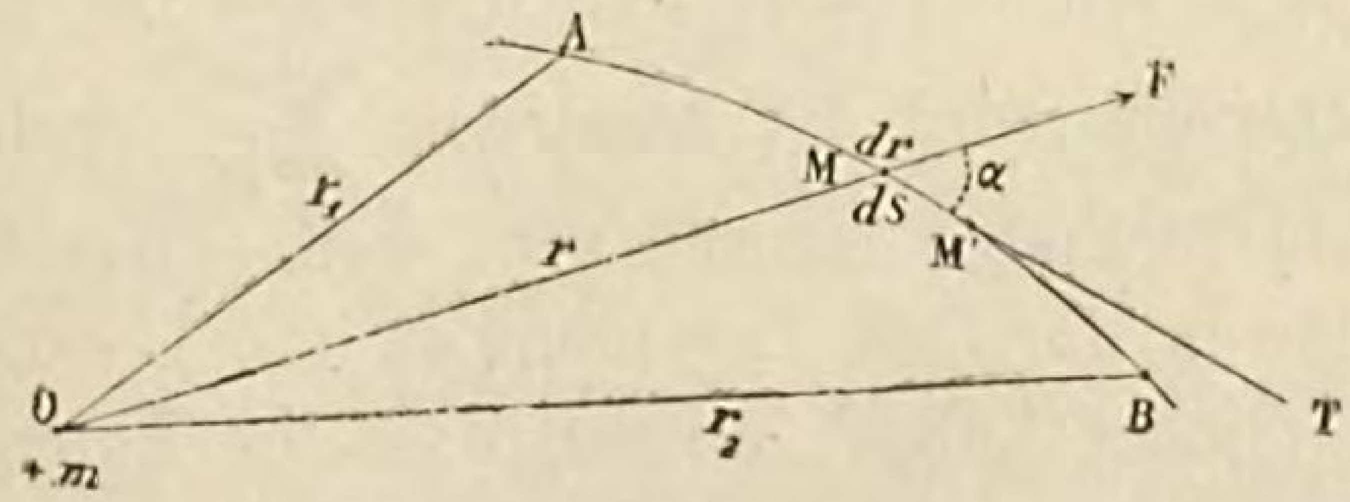


Fig. 2.

Wir nehmen zunächst an, dass sich das System auf eine im Punkte O (Fig. 2) befindliche Masse $+m$ beschränkt. Wird eine der Einheit gleiche

Masse, die im Punkte M in einem Abstande r von der ersten Masse liegt, um MM' oder ds auf irgend einer Curve verschoben, deren Tangente MT mit der Richtung der Kraft den Winkel α bildet, so ist das entsprechende Arbeitselement

$$dW = Fds\cos\alpha = Fdr.$$

Da die Kraft ausgedrückt wird durch

$$F = \frac{m}{r^2},$$

ergiebt sich

$$dW = \frac{m}{r^2}dr = -md\frac{1}{r} = -d\frac{m}{r}.$$

Die der Verschiebung der Masseneinheit von A nach B entsprechende Arbeit ist demnach, wenn man die Entfernungen OA und OB mit r_1 und r_2 bezeichnet

$$W_A^B = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der Gleichung (1), so sieht man, dass die Ausdrücke $\frac{m}{r_1}$ und $\frac{m}{r_2}$ den Wert des Potentials in A bezw. in B bis auf eine Constante darstellen; folglich ist das Potential einer einzelnen Masse auf einen in der Entfernung r gelegenen Punkt bis auf eine Constante gleich $\frac{m}{r}$, d. h. dem Quotienten der wirksamen Masse durch ihre Entfernung von dem betrachteten Punkte.

Nehmen wir jetzt an, dass mehrere wirksame Massen m, m', m'' ... vorhanden sind, so ist die der Verschiebung der Elektricitätseinheit entsprechende Arbeit gleich der algebraischen Summe der Teilarbeiten, welche den einzelnen Massen entsprechen. Bezeichnet man demnach mit $\sum\frac{m}{r_1}$ die Summe der Quotienten der verschiedenen Massen durch ihre Entfernungen vom Ausgangspunkte A und mit $\sum\frac{m}{r_2}$ die entsprechende Summe für den Ankunftspunkt B, so erhält man

$$W_A^B = \sum\frac{m}{r_1} - \sum\frac{m}{r_2} = V_A - V_B.$$

Steht der Punkt B mit der Erde in Verbindung, so ist das Potential V_B gleich Null. Andererseits wird der Ausdruck $\sum\frac{m}{r_2}$ auch Null, wenn der Punkt B von den betrachteten Massen sehr weit entfernt ist, gleichviel ob er auf der Erde oder in der Luft angenommen ist. Da die Erde, als ein im Gleichgewicht befindlicher Leiter, überall dasselbe Potential besitzt, so ist dieser Ausdruck, welcher implicite die auf die inducirte Elektricität bezüglichen Massen einschliesst, auch für die Erde Null. Der Wert von V_A reducirt sich in beiden Fällen auf $\sum\frac{m}{r}$.

Man erhält demnach allgemein als Ausdruck für das Potential V in irgend einem Punkte M des Feldes

$$(6) \qquad V = \sum \frac{m}{r};$$

Das Potential in einem Punkte ist gleich der algebraischen Summe der Quotienten, die man erhält, wenn man jede der wirksamen Massen durch ihre Entfernung von dem betrachteten Punkte dividirt.

28. Kraftströmungen. — Es sei A (Fig. 3) eine Niveaufläche und dA ein Element dieser Fläche im Punkte P. Wir legen durch den Umriss dieses

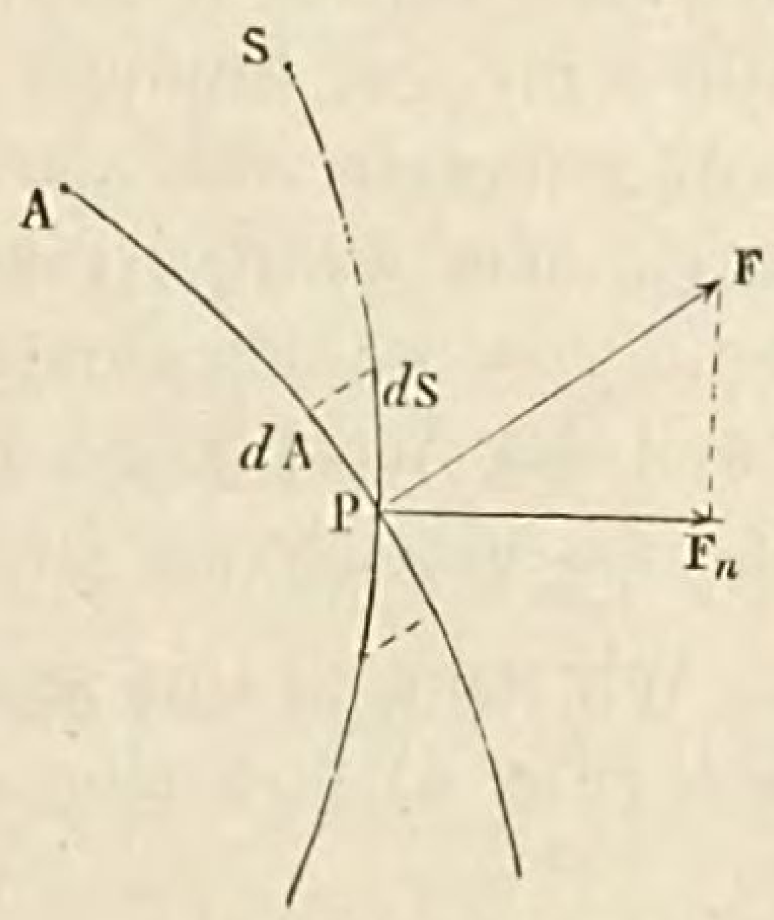


Fig. 3.

Elements die entsprechenden Kraftlinien, welche alle hinter einander liegenden Niveauflächen unter rechten Winkeln schneiden. Den so durch Kraftlinien begrenzten Kanal nennen wir *Kraftröhre.*

Wir legen durch den Punkt P der Niveaufläche A eine zweite beliebig gestaltete Fläche S; die vom Elemente dA ausgehende Kraftröhre schneidet dann ein P umgebendes Flächenelement dS aus.

Im Punkte P ist die elektrische Kraft F normal zu dA; ist F_n die Componente dieser Kraft nach der Normale der Fläche S, so erhält man, da der Winkel zwischen beiden Kräften dem zwischen den Flächenelementen gleich ist

$$\frac{F_n}{F} = \frac{dA}{dS}$$

oder

$$F dA = F_n dS.$$

Diese Gleichung lässt eine einfache Deutung zu, wenn man sich einer hydromechanischen Analogie bedient.

Denkt man sich eine Flüssigkeit continuirlich das Flächenelement dA normal zu demselben mit der Geschwindigkeit F durchfliessen, so stellt das Produkt FdA das Flüssigkeitsvolumen dar, welches in der Zeiteinheit durch das Element dA fliesst oder kürzer die diesem Elemente entsprechende Flüssigkeitsströmung. Diese Strömung wird aber auch durch das Produkt

$F_n dS$ ausgedrückt, welches man erhält, indem man einen beliebigen Querschnitt des Kanals in die nach der Normale dieses Querschnitts genommene Geschwindigkeitscomponente multiplicirt.

Wir wollen nach Analogie *Kraftmenge oder Kraftfluss in einem Flächenelemente das Produkt $F_n dS$ aus der Fläche des Elements in die zu demselben normale Componente der Kraft* nennen. Der Kraftfluss für die Flächeneinheit ist numerisch gleich dem in ihr normal wirkenden Teile der Kraft.

Die Eigenschaften, die wir nunmehr untersuchen wollen, werden diese Analogie vollkommen rechtfertigen.

Den Begriff der Kraftlinien verdankt man Faraday, und dieser so hervorragende Physiker hat auch den ganzen Vorteil klargelegt, den man aus der Einführung dieses Begriffes für das Studium der elektrischen Erscheinungen ziehen kann. Faraday nannte *Zahl der Kraftlinien*, was wir hier mit den Ausdrücken *Kraftmenge* oder *Kraftfluss* bezeichnen. Es schien uns nützlich eine andere Bezeichnung zu wählen, erstens um die Ausdrucksweise zu vereinfachen und dann, weil das Wort *Fluss* besser der Eigenschaft der Continuität entspricht, welche die bezeichnete Grösse zeigt.

29. Green'scher Satz. — Wir nehmen eine geschlossene, in ihrer ganzen Ausdehnung convexe Fläche S (Fig. 4) und eine elektrische Masse $+m$ in

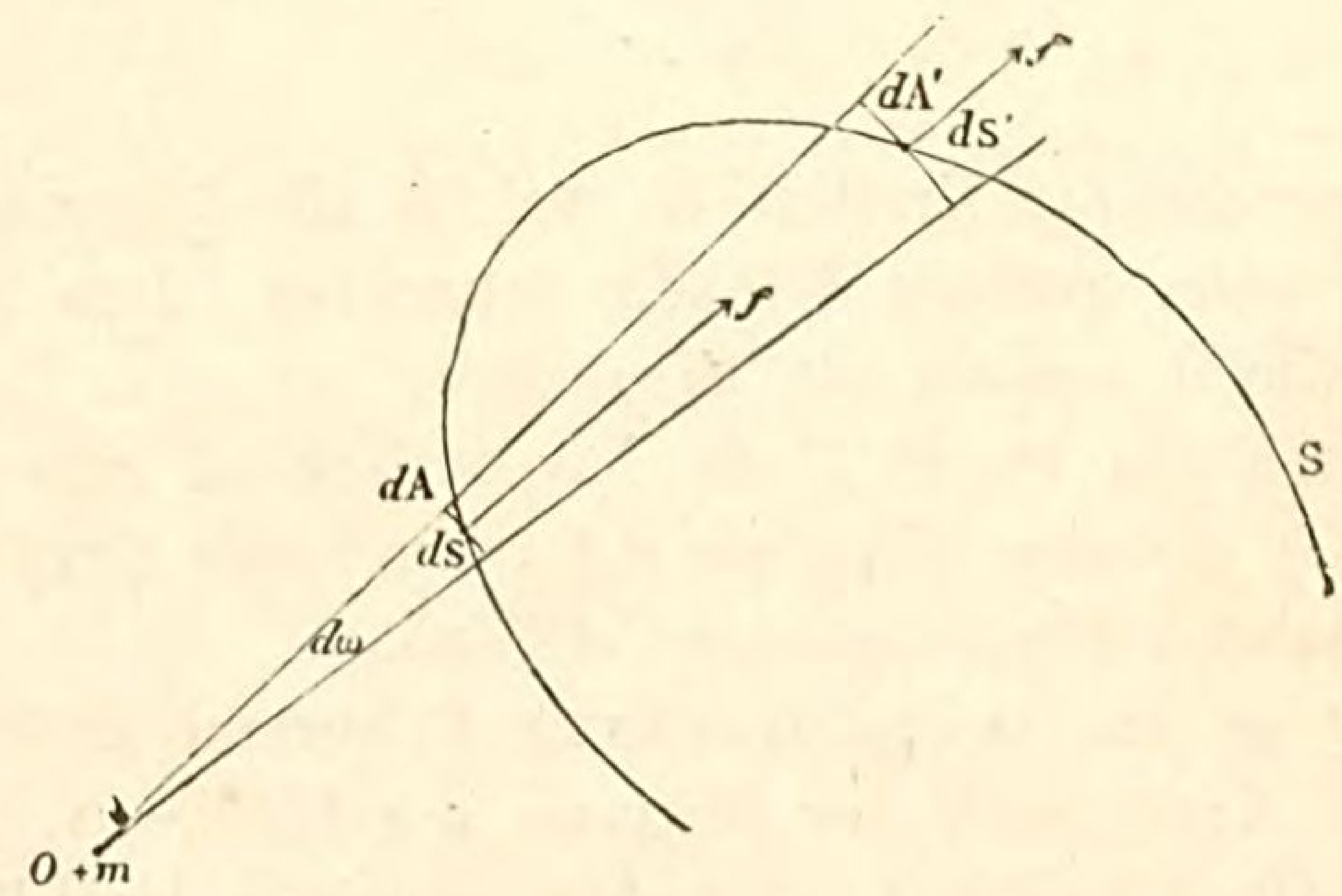


Fig. 4.

einem ausserhalb dieser Fläche gelegenen Punkte O an. Ein unendlich spitzer Kegel, dessen Scheitel sich in O befindet, schneidet von dieser Fläche zwei Elemente dS und dS' aus. Sind f und f' die Werte der vom Punkte O ausgehenden elektrischen Kraft in dS und dS', dA und dA' die entsprechenden Normalschnitte des Kegels, r und r' ihre Entfernungen von O, so erhält man

$$fr^2 = f'r'^2 = m,$$

$$\frac{dA}{r^2} = \frac{dA'}{r'^2} = d\omega,$$

wenn wir mit $d\omega$ die Winkelöffnung des Kegels, d. h. die Fläche bezeichnen,

welche derselbe auf einer Kugel ausschneidet, deren Radius der Längeneinheit gleich ist, und deren Mittelpunkt in O liegt.

Durch Multiplication folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$fdA = f'dA' = md\omega.$$

Nach dem Satze über den Kraftfluss ist aber auch, weil die Niveauflächen in diesem Falle den Punkt O umgebende Kugelflächen sind, die Elemente dA und dA' demnach solchen Niveauflächen angehören,

$$fdA = f_n dS, \quad f'dA' = f_n' dS',$$

und demnach wird

$$f_n dS = f_n' dS' = md\omega.$$

Trifft man die Bestimmung, dass von den zur Fläche normal gerichteten Componenten die nach aussen wirkenden als positiv, die nach innen wirkenden als negativ aufgefasst werden, so erhalten f_n und f_n' entgegengesetzte Zeichen und die letzte Gleichung geht über in

$$f_n dS + f_n' dS' = 0.$$

Besitzt die Fläche, während sie immer noch continuirlich bleibt, auch concave Teile, so kann der betrachtete Kegel $d\omega$ dieselbe in mehr als zwei Punkten schneiden, trifft sie aber stets eine gerade Anzahl Mal. Die Produkte $f_n dS$ haben dann für alle einzelnen von dem betreffenden Kegel ausgeschnittenen Elemente denselben absoluten Wert, aber diese Produkte müssen abwechselnd positiv und negativ genommen werden, und die algebraische Summe bleibt immer Null. Da man von O aus so viele Kegel legen kann, dass die Elemente dS und dS' die ganze Fläche ausfüllen, und da für jeden dieser Kegel die Summe der Produkte $f_n dS$ verschwindet, so erhält man demnach für eine beliebige geschlossene Fläche, ausserhalb deren die wirksame Masse m sich befindet, die Gleichung

$$\int f_n dS = 0,$$

d. h. *der gesammte Kraftfluss, welcher durch die Fläche geht, ist der Null gleich.*

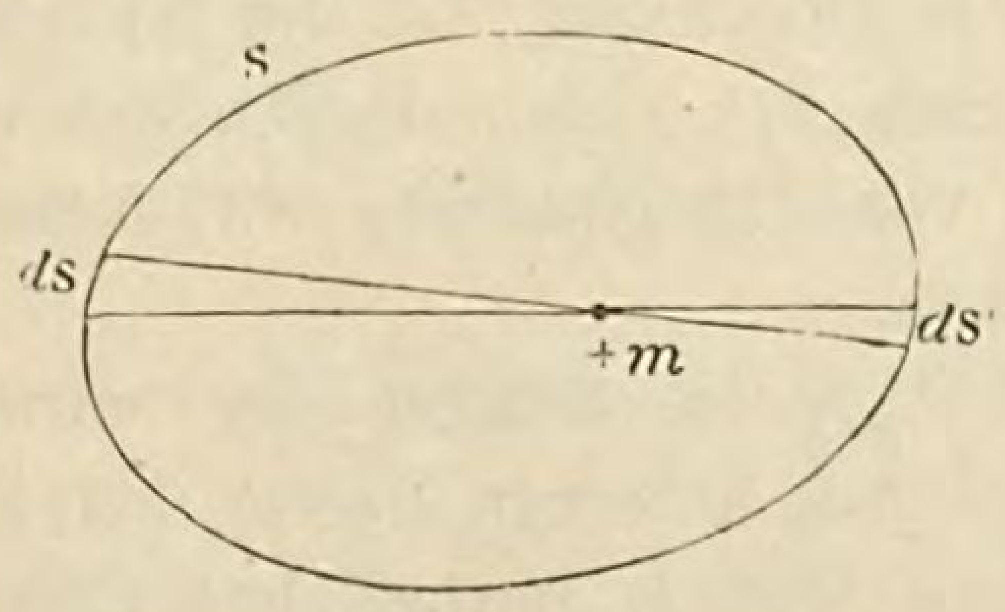


Fig. 5.

Liegt die wirksame Masse m innerhalb der geschlossenen Fläche S (Fig. 5), so liefern die Elemente dS und dS', die von einem Kegel von der

Oeffnung $d\omega$, der von der Masse m ausgeht, ausgeschnitten werden, immer noch die Beziehung

$$f_n dS = f'_n dS' = m d\omega.$$

Aber im vorliegenden Falle haben die normalen Componenten f_n und f'_n nicht mehr entgegengesetztes, sondern gleiches Zeichen. Man erhält demnach für die Gesammtoberfläche

$$\int f_n dS = m \int d\omega = 4\pi m.$$

Der Kraftfluss, der von einer eine wirksame Masse m einschliessenden Fläche ausgeht, ist gleich $4\pi m$. Man kann in andern Worten sagen: *Der gesammte von einer Masse m nach allen Richtungen ausgehende Kraftfluss ist* $4\pi m$.

Besitzt die Fläche Faltungen, so trifft ein von O ausgehender Kegel dieselbe eine ungerade Anzahl Mal. Aber in Bezug auf die Falten ist dann f_n abwechselnd positiv und negativ, also $\int f_n dS$ für die Falten gleich Null, und es bleibt wieder in Bezug auf die ganze Fläche

$$\int f_n dS = 4\pi m.$$

30. — Wir nehmen jetzt mehrere Massen $m, m', m'' \ldots$ innerhalb und andere Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ ausserhalb der Fläche an.

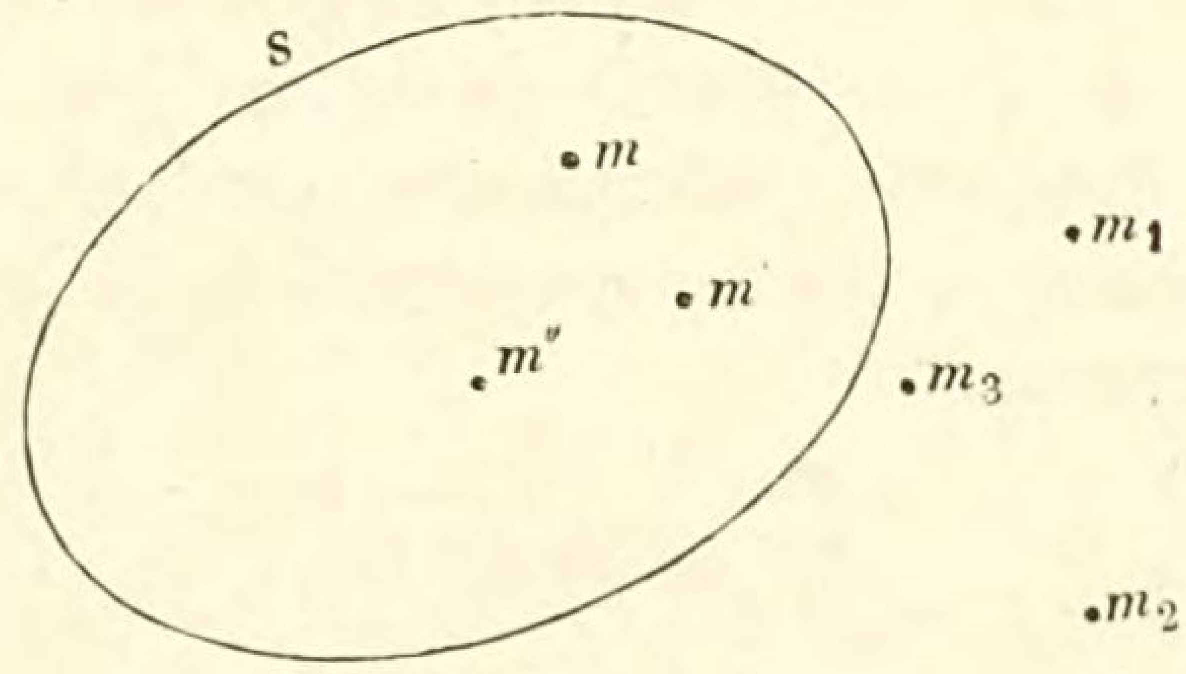


Fig. 6.

In jedem Punkte der Oberfläche ist die normale Componente F_n der resultirenden Kraft F gleich der algebraischen Summe der normalen Componenten der Kräfte, die von den einzelnen wirksamen Massen, den inneren wie den äusseren, ausgehen.

Bezeichnet man mit $\Sigma_a f_n$ die Summe der normalen Componenten in einem Punkte, welche von den äusseren Massen herrühren, und mit $\Sigma_i f_n$ die Summe der auf die inneren Massen bezüglichen Componenten, so wird der gesammte Kraftfluss, welcher durch die Fläche S geht, ausgedrückt durch

$$\int F_n dS = \int \Sigma_a f_n dS + \int \Sigma_i f_n dS.$$

Da der Kraftfluss für jede der äusseren Massen Null ist, so folgt

$$\int \Sigma_a f_n dS = 0.$$

Für jede innere Masse ist hingegen

$$\int f_n dS = 4\pi m,$$

und folglich

$$\int \Sigma_i f_n dS = 4\pi \Sigma m = 4\pi M,$$

wenn M die algebraische Summe aller inneren Massen bezeichnet.

Es bleibt schliesslich

$$\int F_n dS = 4\pi M. \tag{7}$$

Für jede in beliebiger Weise in einem elektrischen Felde construirte geschlossene Fläche ist der gesammte Kraftfluss, welcher die Fläche durchsetzt, das heisst der Ueberschuss der Strömung der austretenden Kräfte über die Strömung der eintretenden Kräfte, gleich der von der Fläche eingeschlossenen Elektricitätsmenge multiplicirt mit 4π.

Eine andere Form erhält Gleichung (7) durch Einführung des Potentials. Bezeichnet man nämlich mit i den Winkel zwischen der Richtung der Kraft F in einem Punkte der Fläche und der daselbst nach aussen gezogenen Normale n, so wird die in diese Normale fallende Componente der Kraft ausgedrückt durch

$$F_n = F \cos i.$$

Ist ferner a die nach aussen gerichtete Normale der durch den betrachteten Punkt gehenden Niveaufläche, so hat man noch

$$F = -\frac{\partial V}{\partial a} \quad \text{und} \quad F_n = -\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Hiernach kann der eben ausgesprochene Satz analytisch noch durch eine der beiden folgenden Gleichungen dargestellt werden

$$(8) \qquad \begin{aligned} -\int \frac{\partial V}{\partial a} \cos i \, dS &= 4\pi M, \\ -\int \frac{\partial V}{\partial n} dS \qquad &= 4\pi M. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen rühren von Green her.

31. Gleichungen von Laplace und Poisson. — Es seien X, Y, Z die Kraftcomponenten in einem Punkte P, dessen Coordinaten x, y, z sind, und $dx dy dz$ ein diesen Punkt umgebendes Volumenelement.

Enthält das Medium die wirksamen Massen in continuirlicher Verteilung, und ist dM die in dem Element enthaltene Gesammtmasse, so ist, wenn man mit ρ die Dichte bezeichnet,

$$dM = \rho\, dx\, dy\, dz.$$

Der durch die Fläche $dy\,dz$ eintretende Kraftfluss ist

$$X\,dy\,dz,$$

die durch die gegenüberliegende Fläche austretende Strömung

$$\left(X + \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz,$$

der Ueberschuss der austretenden Strömung also

$$\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Wiederholt man dieselbe Betrachtung auch für die andern Coordinaten, so sieht man, dass die Gesammtkraftströmung, welche das Volumenelement verlässt, ausgedrückt ist durch

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz.$$

Nach dem vorigen Satze ist dieser Ueberschuss gleich dem Produkte von 4π in die gesammte in dem Volumen enthaltene Elektricitätsmenge; demnach erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Man bezeichnet gewöhnlich die Summe der drei partiellen zweiten Ableitungen des Potentials nach den Coordinaten mit ΔV; demnach kann man schreiben

(9) $$\Delta V = -4\pi\rho.$$

Ist das Volumenelement nicht elektrisch, so ist $\rho = 0$, und die Gleichung reducirt sich auf

(10) $$\Delta V = 0.$$

Die Gleichungen (9) und (10) zusammen ergeben den Satz:

Die Summe der drei partiellen zweiten Ableitungen des Potentials nach drei rechtwinkligen Achsen ist für jeden Punkt entgegengesetzt gleich dem Produkte von 4π *in die Dichte der in diesem Punkte concentrirten wirksamen Masse.*

Diese Summe wird Null, wenn in dem Punkte keine Elektricität vorhanden ist.

Dieser Satz über die zweiten Ableitungen war zuerst in der Form (10) von Laplace in seinen Arbeiten über die allgemeine Anziehung ausgesprochen worden; die allgemeinere Form (9) rührt von Poisson her.

32. — Sind die Niveauflächen concentrische Kugeln, so steht die Kraft F im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate des Abstandes r von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte, und es ist

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r^2},$$

also

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{2A}{r^3} = \frac{2F}{r}.$$

Legen wir die z-Achse in die Normale, so liegen die beiden andern Achsen in der Tangentialebene; misst man noch den Abstand in der Richtung der Kraft, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{2F}{r},$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{F}{r}.$$

Hat die Niveaufläche eine beliebige Form, so sieht man leicht, dass die zweite Ableitung nach der Tangente eines Normalschnittes die nämliche ist, wie diejenige für den entsprechenden Hauptkrümmungskreis. Wenn die z-Achse auch hier normal zur Fläche ist und die beiden andern Achsen längs der Tangenten der Hauptschnitte, deren Krümmungsradien R_1 und R_2 sein mögen, verlaufen, so erhält man

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{F}{R_1}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{F}{R_2},$$

folglich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -F\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

33. In Leitern befindet sich die Elektricität nur auf der Oberfläche. — Der Poisson'sche Satz ermöglicht den Nachweis der fundamentalen Eigenschaft, dass *in jedem im Gleichgewicht befindlichen Leiter Elektricität nur an der Oberfläche existirt.*

Denn wir haben gesehen, dass die Kraft alsdann überall im Leiter Null ist und dass folglich das Potential im ganzen Raume des Leiters einen und denselben Wert hat. Die Ableitungen aller Ordnungen des Potentials sind in jedem Punkte Null; man erhält also

$$\Delta V = 0$$

und folglich

$$\rho = 0.$$

Demnach existirt im Innern eines Leiters bei elektrischem Gleichgewicht nicht blos keine elektrische Kraft, sondern auch keine Elektricität. Die Verteilung bleibt ausschliesslich auf die Oberfläche beschränkt.

34. Formel von Green. — Der die Kraftströmung betreffende Lehrsatz ergab für eine geschlossene Fläche die Gleichung

$$-\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = 4\pi M.$$

Die von der Fläche eingeschlossene Masse M ist aber gleich der Summe der Massen ρdv, welche in den verschiedenen Volumelementen enthalten sind; man erhält demnach unter Berücksichtigung der Gleichung (9)

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\int 4\pi\rho dv = \int \Delta V dv. \tag{11}$$

Diese Gleichung ist ein specieller Fall einer allgemeineren, von Green herrührenden Formel.

Es seien U und V zwei endliche und stetige Funktionen von x, y, z. Wir setzen

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

und betrachten das Integral

$$\int U \Delta V dv = \int\int\int U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz,$$

welches sich über den ganzen, von einer Fläche S eingeschlossenen Raum erstrecken möge. Dieses Integral setzt sich zusammen aus drei Gliedern von der Form

$$\int\int\int \frac{U\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \int\int dy\, dz \int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx.$$

Integrirt man diesen Ausdruck partiell, so erhält man

$$\int\int dy\, dz \int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx = \int\int U \frac{\partial V}{\partial x} dy\, dz - \int\int\int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

Auf der rechten Seite ist das Integral im ersten Gliede über die ganze Fläche S, dasjenige im zweiten Gliede über den ganzen von dieser Fläche begrenzten Raum zu nehmen. Verfährt man ebenso für die andern Coordinaten, so ergiebt sich als Summe der über die Fläche S zu nehmenden Integrale

$$\int\int U\left(\frac{\partial V}{\partial x} dy\, dz + \frac{\partial V}{\partial y} dz\, dx + \frac{\partial V}{\partial z} dx\, dy\right).$$

Betrachtet man aber V als ein Potential, was der Allgemeinheit des Beweises keinen Eintrag thut, so stellt der Ausdruck $-\frac{\partial V}{\partial x} dy\, dz$ oder $X dy\, dz$ den Kraftfluss durch das Flächenelement $dy\, dz$, d. h. durch die Projektion des Flächenelementes dS auf eine zur x-Achse senkrechte Ebene dar. Ebenso

verhält es sich mit den andern Gliedern, so dass die Klammer bis auf das Zeichen den durch das Flächenelement dS selbst gehenden Kraftfluss darstellt. Diese Klammer hat demnach den Wert $-F_n dS$ oder $\frac{\partial V}{\partial n} dS$, und man erhält schliesslich die Green'sche Formel

$$(12) \qquad \int U \Delta V dv = \int U \frac{\partial V}{\partial n} dS - \int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} \right) dv.$$

Setzt man $U = 1$, so kommt wieder die vorige Gleichung (11).

Sind U und V identische Funktionen, so ergiebt sich

$$(13) \qquad \int V \Delta V dv = \int V \frac{\partial V}{\partial n} dS - \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dv.$$

Stellt die Funktion V das Potential eines elektrischen Systems dar, so ist die Kraft F (25) bestimmt durch die Gleichung

$$F^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

woraus man erhält

$$(14) \qquad \int V \Delta V dv = \int V \frac{\partial V}{\partial n} dS - \int F^2 dv,$$

oder nach dem Poisson'schen Satze

$$(15) \qquad 4\pi \int V \rho dv = -\int V \frac{\partial V}{\partial n} dS + \int F^2 dv.$$

35. Kraftröhren. — Wir haben gesehen, dass eine Kraftröhre ein die Niveauflächen senkrecht schneidender, seitlich durch Kraftlinien begrenzter Kanal ist.

Wir fassen eine von zwei beliebigen Flächen S und S' (Fig. 7) begrenzte Kraftröhre ins Auge und wenden auf den so begrenzten Raum die

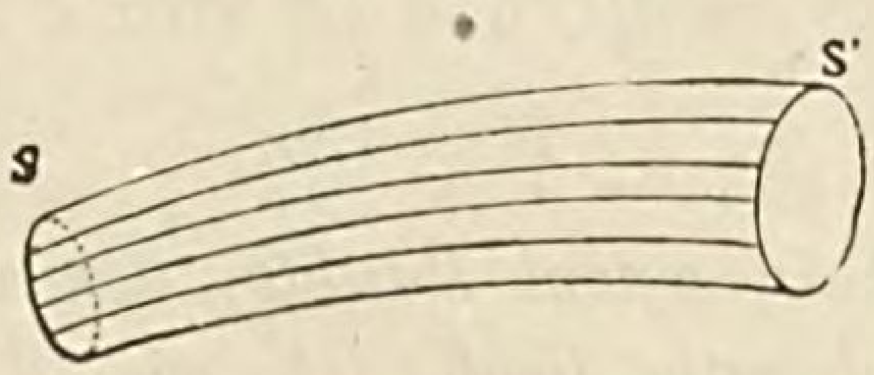


Fig. 7.

Gleichung (7) an. Die Mantelfläche trägt nichts zum Integral bei, da in jedem Punkte derselben die normale Kraftcomponente Null ist; das Integral reducirt sich also auf die beiden von den Endflächen gelieferten Teile.

Wir nehmen nun zunächst an, dass der Kanal keine elektrische Masse einschliesst. Das auf die beiden Grundflächen beschränkte Integral muss in diesem Falle Null werden, woraus man erhält

$$\int F_n dS + \int F'_n dS' = 0$$

oder, wenn man vom Zeichen absieht,

$$\int F_n dS = \int F'_n dS';$$

d. h. *der Kraftfluss ist beim Eintritt in den Kanal und beim Austritt aus demselben der nämliche.*

Man sieht hiernach, dass der Kraftfluss allgemein für alle Querschnitte eines Kanals dieselbe Stärke hat. Dieser Kraftfluss verhält sich also wie der Ausfluss einer bewegten Flüssigkeit, deren Geschwindigkeit in jedem Punkte der Kraft nach Grösse und Richtung völlig gleich ist.

Ist der Querschnitt des Kanals unendlich klein, und sind die Endflächen desselben zur Kraftrichtung normal, so geht die obige Gleichung über in

$$FdS = F'dS',$$

woraus folgt: *Die Kraft ist überall in der Röhre dem Querschnitt umgekehrt proportional.*

36. Coulomb'scher Satz. — Wir betrachten ein Flächenelement dS auf einem im Gleichgewicht befindlichen Leiter und legen nach aussen hin die entsprechende Kraftröhre bis zum Schnitte mit einer unendlich nahen Niveaufläche S_1; wir verlängern den Kanal in das Innere des Leiters, begrenzen ihn daselbst durch eine beliebige Fläche S_2 und wenden den letzten Satz auf den durch die Flächen S_1 und S_2 und den Mantel des Kanals begrenzten Raum an. Auf der ganzen Fläche S_2 ist die Kraft, weil dieselbe im Innern des Leiters liegt, Null, ebenso ist die normale Componente auf dem Mantel des Kanals Null; eine Kraftströmung ist demnach nur für die äussere Fläche dS vorhanden. Bezeichnet man mit σ die Flächendichte der Elektricität auf dem Elemente dS, so ist die gesammte in dem betrachteten Volumen enthaltene Masse σdS. Hieraus folgt

$$FdS_1 = 4\pi\sigma dS.$$

Da die beiden Flächen S und S_1 einander unendlich nahe und parallel sind, dürfen wir setzen $dS_1 = dS$, und es wird

$$F = 4\pi\sigma.$$

Die elektrische Kraft in einem Punkte, der einem im Gleichgewicht befindlichen Leiter unendlich nahe liegt, ist, wie übrigens auch die wirksamen Massen beschaffen sind, gleich der elektrischen Dichte in der Nähe dieses Punktes multiplicirt mit 4π.

Da andererseits $F = -\frac{dV}{dn}$

ist, so folgt, dass die Flächendichte an der Oberfläche irgend eines Leiters als Funktion der äusseren Kraft oder des Potentials ausgedrückt werden kann durch die Beziehung

$$\sigma = \frac{F}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dn}.$$

37. Correspondirende Elemente. — Wir ziehen schliesslich eine unendlich dünne Kraftröhre in Betracht, die zwischen zwei Leitern liegt, auf welche sie senkrecht stösst.

Die beiden Flächenelemente dS und dS', die von der Röhre ausgeschnitten werden, nennt man *correspondirende Elemente.*

Wir verlängern die Röhre nach beiden Seiten bis ins Innere der Leiter, wo wir sie uns durch irgend zwei Flächen begrenzt denken. Die Kraftströmung ist auf der ganzen Oberfläche des begrenzten Raumes Null, da die Kraft den Seitenwänden entlang tangential wirkt und an den beiden Grundflächen, welche den Leitern angehören, Null ist. Was die elektrischen Massen betrifft, so ist deren Summe, wenn man die Dichten auf den correspondirenden Elementen dS und dS' mit σ und σ' bezeichnet, $\sigma dS + \sigma' dS'$. Diese Summe muss Null werden, woraus sich ergiebt

$$\sigma dS = -\sigma' dS'.$$

Zwei correspondirende Elemente aben gleiche Mengen Elektricität, aber von entgegengesetztem Zeichen.

Sind die beiden einander gegenüberliegenden Flächen parallele Ebenen, so sind die Kraftlinien Normalen zu diesen Ebenen; die correspondirenden Elemente sind flächengleich, und es ist

$$\sigma = -\sigma'.$$

Dasselbe ist der Fall, wenn die beiden Leiter, ohne eben zu sein, einander unendlich nahe liegen, weil dann die Flächenelemente als gleich betrachtet werden können.

38. Gleichförmiges Feld. — Wenn die Kraftlinien einander parallel sind, dann sind die Niveauflächen parallele Ebenen. Da der Kraftfluss in einer cylindrischen Röhre constant ist, so hat, wie man sieht, die Kraft einen constanten Wert. Man nennt dann das Feld ein *gleichförmiges.*

Ist umgekehrt die Kraft in einem elektrischen Felde nach Grösse und Richtung constant, so sind die Niveauflächen notwendig parallele Ebenen.

39. Eine elektrische Fläche, welche zwei Dielektrica trennt. — Wir nehmen endlich an, dass eine elektrische Fläche S (Fig. 8), die nicht einem

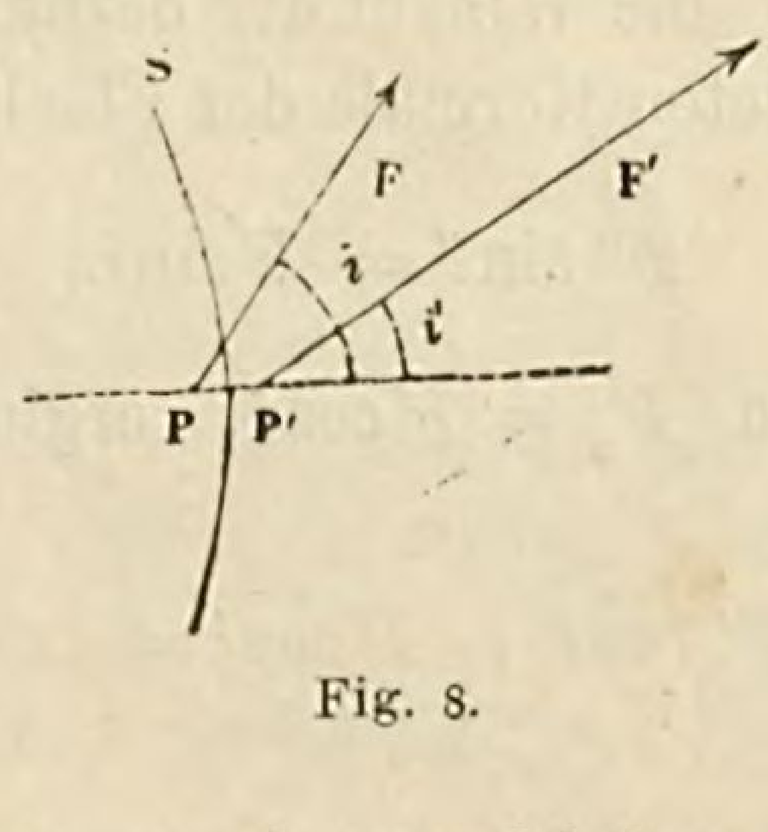


Fig. 8.

leitenden Körper angehört, zwei verschiedene Dielektrica von einander trennt.

Wir fassen ein Flächenelement dS ins Auge, auf welchem die Dichte σ ist, und legen durch den Umriss dieses Elementes einen senkrechten Kanal, der von zwei dS gleichen und parallelen Grundflächen begrenzt ist und so kurz ist, dass die Fläche des Mantels gegen die der Grundflächen sehr klein ist. Die Kraftströmung durch den Cylindermantel kann gegen die durch die Grundflächen vernachlässigt werden. Bezeichnet man mit F und F' die Kräfte in den beiden an dieses Element grenzenden Medien, so erhält man also

$$4\pi\sigma dS = F'_n dS - F_n dS,$$

oder

$$4\pi\sigma = F'_n - F_n.$$

Die Differenz der normalen Kraftcomponenten zu beiden Seiten einer elektrischen Fläche ist gleich dem Produkte aus 4π in die Dichte an der Fläche.

Dieser Satz enthält als speciellen Fall denjenigen von Coulomb (**36**), wenn S die Oberfläche eines leitenden Körpers ist.

40. — Betrachten wir zwei in den Mitten der Grundflächen des eben besprochenen Cylinders gelegene Punkte P und P', so setzt sich die Wirkung F auf den Punkt P aus der Wirkung aller ausserhalb des Elementes liegenden Massen und aus derjenigen $-\varphi$ des Elementes zusammen. Geht man von P zu P' über, so ändert sich die Wirkung der äusseren Massen nicht merklich, dagegen wechselt diejenige des Elementes ihr Zeichen und wird $+\varphi$. Infolge der symmetrischen Lage der Punkte zum Flächenelement ist diese Kraft φ normal zu demselben, und es ändert sich demnach die normale Kraftcomponente um 2φ, woraus sich ergiebt

$$F'_n - F_n = 2\varphi = 4\pi\sigma$$

oder

$$\varphi = 2\pi\sigma.$$

Da die normale Kraftcomponente allein sich geändert hat, sind die tangentialen Componenten F und F' zu beiden Seiten der Fläche dieselben. Bezeichnet man mit i und i' die Winkel der bezüglichen Kraftrichtungen, mit der nach einer Seite gerichteten Normale der Fläche, so erhält man demnach

$$F' \sin i' = F \sin i.$$

Da $F'_n = F' \cos i'$ und $F_n = F \cos i$, ergiebt die vorige Gleichung andererseits

$$F' \cos i' - F \cos i = 4\pi\sigma,$$

woraus folgt

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i'} = 1 + \frac{4\pi\sigma}{F \cos i} = 1 + \frac{4\pi\sigma}{F_n}.$$

Die Kräfte erleiden also eine Art *Brechung*, wenn sie auf eine elektrische Fläche stossen. Beiläufig sieht man, dass, da das Brechungsgesetz durch das Verhältnis der Tangenten der Winkel zwischen der Normale und den Kräften bestimmt ist, eine der totalen Reflexion entsprechende Erscheinung hier nicht auftreten kann.

41. Elektrostatischer Druck. — Die Elektricität nimmt an der Oberfläche eines Leiters eine sehr dünne Schicht ein, deren Dicke zwar experimentell nicht bestimmbar scheint, die aber notwendig nicht Null sein kann. Wahrscheinlich gehört diese Schicht dem umgebenden dielektrischen Medium an und ist durch die Oberfläche des Leiters selbst begrenzt.

AB (Fig. 9) sei die Dicke dieser Schicht. Die Kraft ist in dem der inneren Fläche S_1 angehörenden Punkte *A* Null und hat vom Punkte *B* ab

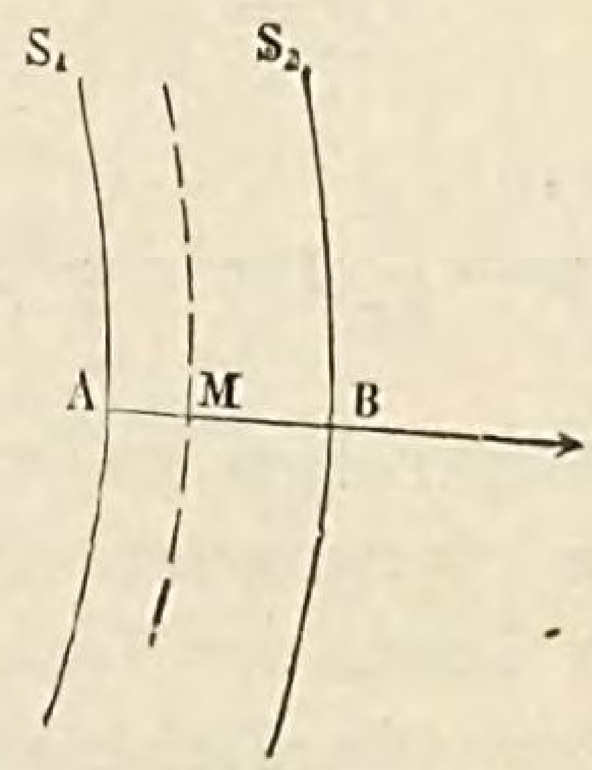


Fig. 9.

auf der äusseren Fläche S_2 den Wert $F = 4\pi\sigma$. In dem Zwischenraume muss also die Kraft von 0 bis *F* nach einem uns nicht bekannten Gesetze angewachsen sein.

Es sei ρ die Dichte der Schicht in einem Punkte *M* und *V* das Potential daselbst. Die Kraft in diesem Punkte ist zu einer zwischen S_1 und S_2 liegenden Niveaufläche normal und hat den Wert $-\frac{dV}{dn}$. Bezeichnen wir die Dicke von *AB* mit *e*, so stellt das, was wir bisher Flächendichte genannt haben, die Elektricitätsmenge dar, die sich in der Schicht *e* auf der Flächeneinheit befindet, man erhält also

$$\sigma = \int_0^e \rho dn.$$

Wir wählen drei rechtwinklige Achsen, von denen die eine, *z*, die Richtung der Normale der Niveaufläche in *M*, also der Normalen der Flächen S_1 und S_2 hat, während die andern beiden, *x* und *y*, in der Tangentialebene dieser Niveaufläche liegen.

Da auf der Niveaufläche *V* constant ist, wird die Dichte (**31**) ausgedrückt durch

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{d^2V}{dn^2}.$$

Die gesammte auf die elektrische Schicht σdS eines Flächenelementes ausgeübte Kraft ist demnach, wenn man die Kraftwirkung auf eine Flächeneinheit mit p bezeichnet

$$pdS = \int_0^e \rho dS dn \left(-\frac{dV}{dn}\right) = \frac{dS}{4\pi}\int_0^e \frac{d^2V}{dn^2}\frac{dV}{dn}dn = \frac{dS}{8\pi}\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)^2\right]_A^B.$$

Da $\frac{dV}{dn}$ für den Punkt A Null ist, bleibt einfach

$$p = \frac{1}{8\pi}F^2.$$

Andererseits ist

$$F = 4\pi\sigma,$$

also

$$p = \frac{1}{8\pi}16\pi^2\sigma^2 = 2\pi\sigma^2.$$

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dass diese strenge Ableitung keine andere Annahme voraussetzt, als die, dass die Dicke e unendlich klein ist, demnach für jedes Gesetz der Verteilung längs der Normalen gilt.

So wird die über jeder Oberflächeneinheit ausgebreitete elektrische Masse mit einer Kraft von der Stärke $2\pi\sigma^2$, die demnach dem Quadrate der Dichte proportional ist, nach aussen getrieben. Diesem *elektrostatischen Druck* oder dieser *elektrischen Spannung* wird durch den Widerstand des Dielektricums das Gleichgewicht gehalten.

Befinden sich die Leiter in der Luft, so besteht eine Wirkung dieser Kraft darin, dass der Luftdruck an der Oberfläche verkleinert wird. Ist der Luftdruck für die Flächeneinheit der im neutralen Zustande befindlichen Körper P, so geht derselbe nach der Elektrisirung in jedem Punkte der Oberfläche des Leiters über in

$$P - p = P - 2\pi\sigma^2.$$

So würde eine isolirte Seifenblase durch Elektrisirung an Volumen zunehmen und ihr ursprüngliches Volumen erst wiedererhalten, wenn man sie in den natürlichen Zustand zurückversetzt hat. Van Marum hat in der That constatirt, dass ein mit Wasserstoff gefüllter Ballon scheinbar leichter und dass seine Steigkraft grösser wird, wenn man ihn elektrisirt.

Ist die Dichte auf einem Leiter gleichförmig, so ist dies auch mit dem elektrostatischen Drucke der Fall, und da dieser in jedem Punkte der Oberfläche normal wirkt, ist seine Resultante Null, das heisst, er vermag den Leiter als solchen nicht in Bewegung zu setzen.

Aendert sich die Dichte von Punkt zu Punkt, so kann für den Gesammtdruck im Allgemeinen eine Kraft und ein Kräftepaar gesetzt werden. Das so erhaltene Resultat ist augenscheinlich identisch mit dem, welches eine

direkte Betrachtung der Wirkung der äusseren Massen auf die verschiedenen elektrischen Massen des Leiters, die man mit der ponderabeln Materie festverbunden annehmen könnte, ergeben würde.

42. Folgerung aus der Thatsache, dass die Elektricität sich bei Leitern nur an der Oberfläche aufhält. — Die behandelte Theorie hat das Gesetz von Coulomb zur Grundlage, welches als experimentell bewiesen angenommen ist. Man könnte einen andern Weg einschlagen, indem man als Ausgangspunkt die andere, viel leichter und genauer zu beweisende Thatsache wählt, dass *die Elektricität bei Leitern nur an der Oberfläche existirt und dass im Innern derselben weder Elektricität noch elektrische Kraft vorhanden ist, selbst wenn die Leiter geschlossene Höhlungen enthalten.*

Wir nehmen eine elektrische Fläche S (Fig. 10) an und legen durch

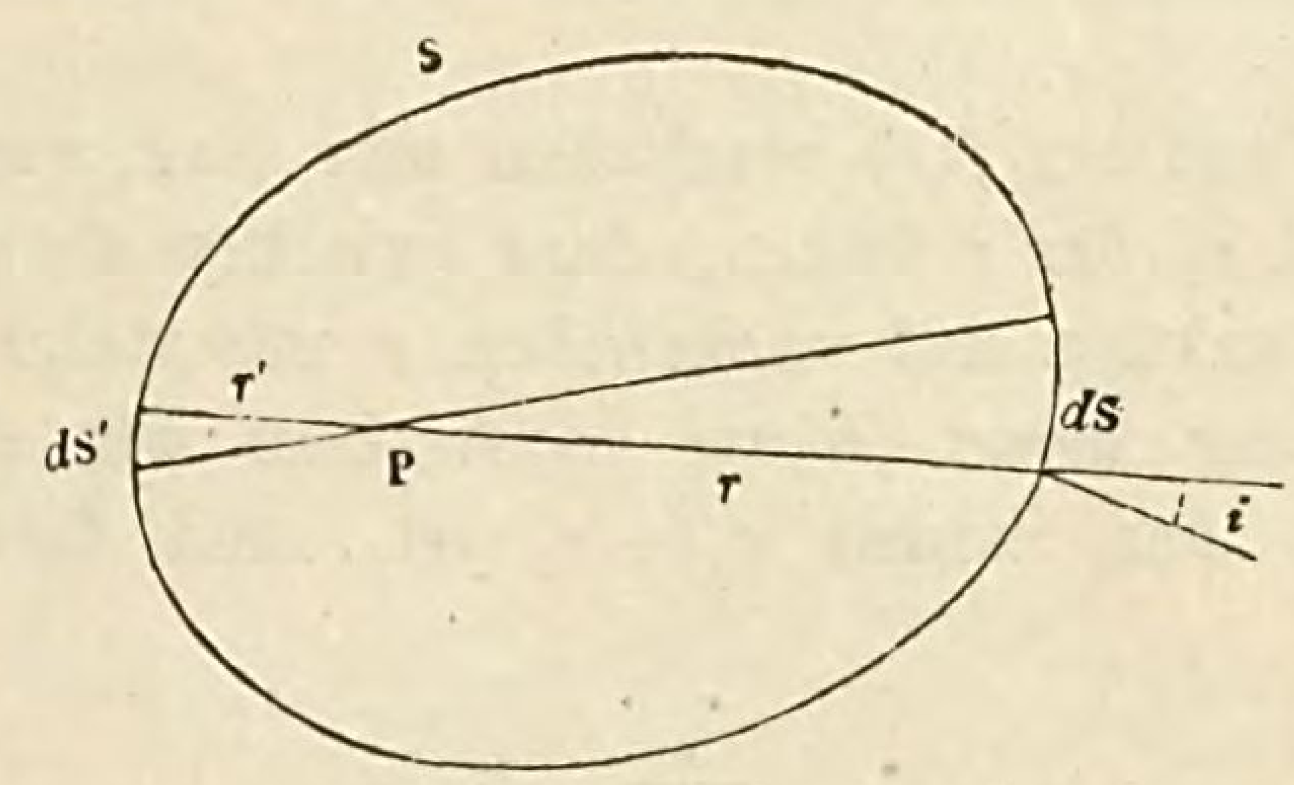


Fig. 10.

einen Punkt P innerhalb derselben einen Kegel von unendlich kleiner Oeffnung $d\omega$, der auf der Fläche in den Entfernungen r und r' zwei Flächenelemente dS und dS' ausschneidet, auf denen die Dichten bezw. σ und σ' seien.

Sind die elektrischen Kräfte einer Funktion $f(r)$ der Entfernung proportional, so kann die Wirkung des Elementes dS auf die Masseneinheit im Punkte P geschrieben werden

$$\varphi = \sigma dS f(r).$$

Ist i der Winkel zwischen dem Radius vector und der Normale im Elemente dS, so erhält man

$$r^2 d\omega = dS \cos i,$$

woraus sich ergiebt

$$\varphi = \frac{\sigma d\omega}{\cos i} r^2 f(r).$$

Ebenso ist die Wirkung des Elementes dS' auf denselben Punkt P

$$\varphi' = \frac{\sigma' d\omega}{\cos i'} r'^2 f(r'),$$

und diese beiden Wirkungen sind nach der angeführten Erfahrung einander direkt entgegengesetzt.

Bei einer Kugel sind die Winkel i und i' gleich. Ist die Kugel ferner isolirt und jeder fremden Einwirkung entzogen, so ist die Verteilung gleichförmig, und die Dichten σ und σ' haben gleichen Betrag.

Die Kraft im Punkte P ist aber Null, wenn die Wirkungen der gegenüberliegenden Elemente dS und dS' gleich sind, und hierfür genügt die Beziehung

$$r^2 f(r) = r'^2 f(r') = \text{const},$$

d. h. die elektrischen Kräfte müssen dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sein.

Das quadratische Gesetz genügt also der angeführten Thatsache; dass es aber auch das einzige Gesetz ist, welches derselben gerecht wird, kann man in einfacher Weise durch folgende von Bertrand herrührende Ueberlegung sehen.

Wie auch die Funktion $f(r)$ beschaffen sein mag, kann man stets zwei solche Werte r_1 und r_2 für r finden, dass zwischen diesen beiden Werten der Variabeln die Funktion mit wachsendem r nur steigt oder nur fällt.

Nach Bestimmung dieser Werte construiren wir eine Kugel, deren Durchmesser gleich der Summe $r_1 + r_2$ ist, und fassen den Punkt P

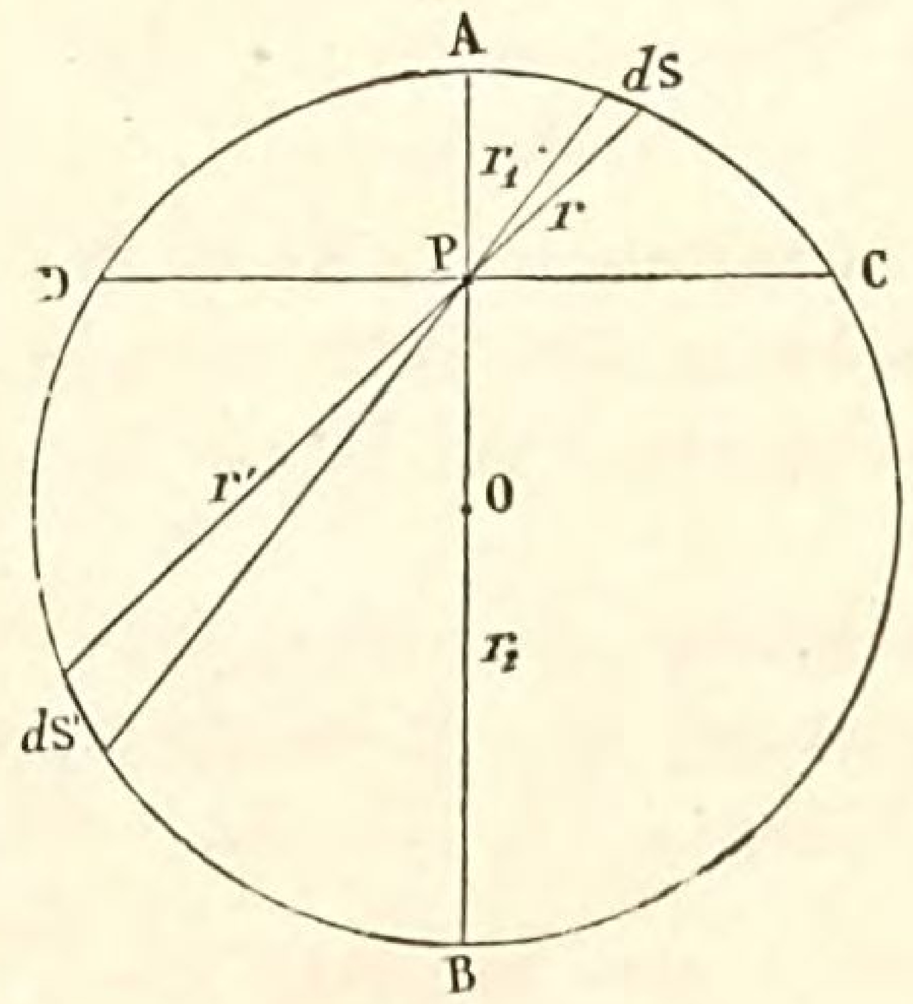


Fig. 11.

ins Auge, der einen Durchmesser in die beiden Abschnitte r_1 und r_2 teilt. Die Wirkungen der durch einen Kegel von der Oeffnung $d\omega$ bestimmten gegenüberliegenden Elemente dS und dS' auf P sind

für dS

$$\frac{\sigma d\omega}{\cos i} r^2 f(r)$$

und für dS'

$$\frac{\sigma d\omega}{\cos i} r'^2 f(r').$$

Alle Werte von r und von r' liegen zwischen den Grenzen r_1 und r_2 und der Wert von r ist stets kleiner als der entsprechende Wert von r'; der

Wert von $r^2 f(r)$ ist also für die Elemente des oberen Teiles stets kleiner oder stets grösser als der von $r'^2 f(r')$ für die Elemente des unteren Teiles; und folglich ist die Wirkung der Calotte DAC kleiner oder grösser als die der Calotte DBC. Das Gleichgewicht ist demnach unmöglich, ausser wenn $r^2 f(r)$ eine Constante ist, d. h. ausser wenn die Funktion $f(r)$ genau im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung steht.

43. Wirkung der Kugelschalen. — *Die Wirkung einer gleichmässig geladenen Kugelschale auf einen äusseren Punkt ist dieselbe, wie wenn die ganze Ladung der Schale im Mittelpunkte derselben vereinigt wäre.*

Wir betrachten zum Beweise die Wirkung, welche eine Kugel S (Fig. 12), die mit einer homogenen Schicht von der Dichte σ belegt ist, auf einen äusseren Punkt P ausübt.

Da die Wirkung wegen der Symmetrie nach dem Mittelpunkte gerichtet ist, genügt es, die Summe der nach dieser Richtung wirkenden Componenten zu bilden.

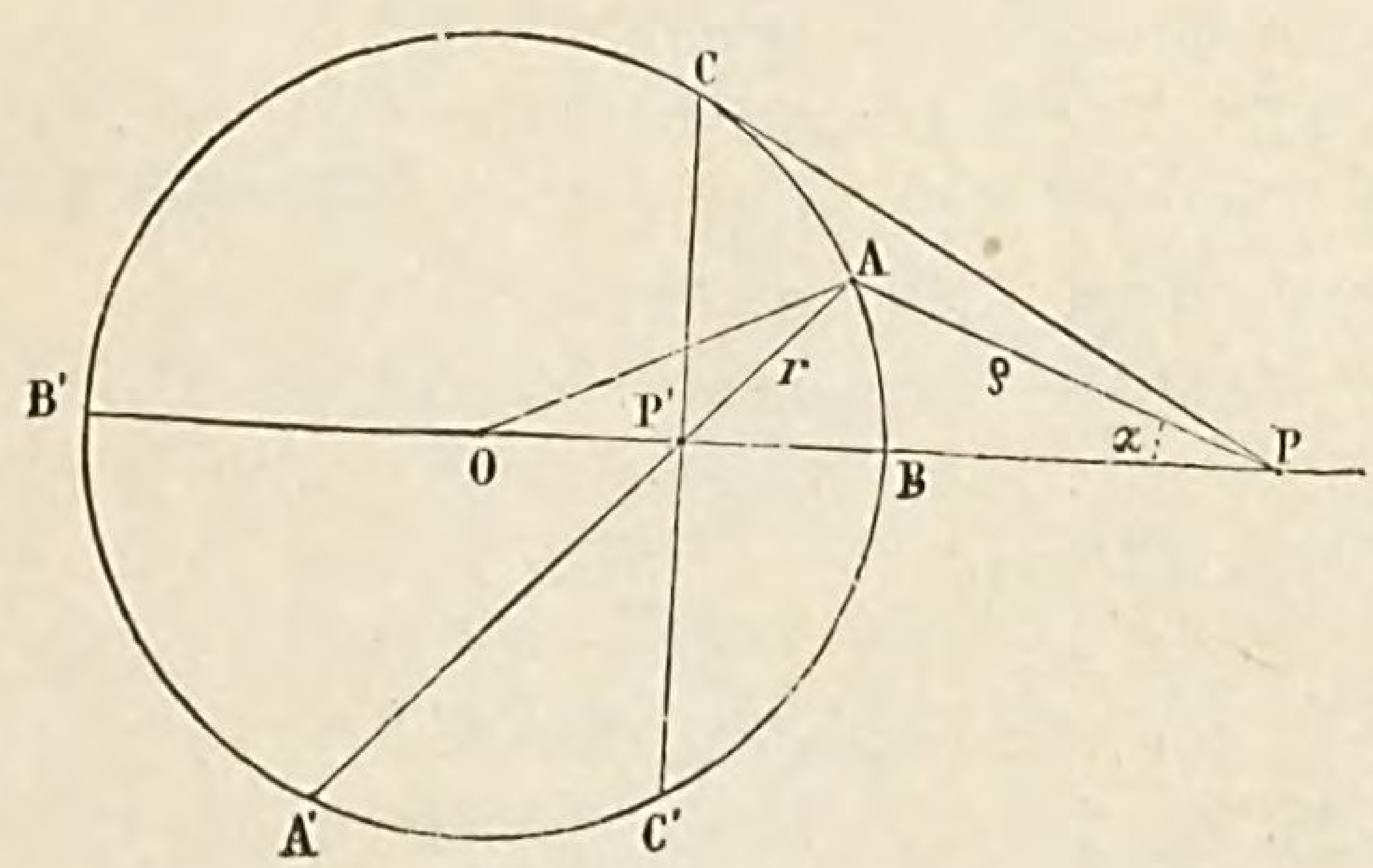


Fig. 12.

Für das im Punkte A in der Entfernung ρ von P gelegene Flächenelement dS ist die bezeichnete Componente

$$\varphi = \frac{\sigma dS}{\rho^2} \cos\alpha.$$

Wir wählen auf dem durch P gehenden Durchmesser einen Punkt P', der so gelegen ist, dass

$$OP' . OP = R^2.$$

Zieht man AP' und AO, so sind die Dreiecke AOP' und POA ähnlich wegen des gemeinschaftlichen Winkels in O und wegen der Beziehung

$$\frac{OP'}{R} = \frac{R}{OP}.$$

Die Winkel OPA und OAP' sind demnach gleich, und man erhält, wenn man die Entfernung $P'A$ mit r und die Entfernung OP mit D bezeichnet,

$$\frac{\rho}{r} = \frac{D}{R}.$$

Ist endlich $d\omega$ die scheinbare Grösse des Elementes dS im Punkte P', so ist

$$r^2 d\omega = dS \cos\alpha.$$

Ersetzt man in dem Ausdrucke für die Componente φ den Faktor $dS\cos\alpha$ durch diesen Wert, so ergiebt sich

$$\varphi = \sigma d\omega \frac{r^2}{\rho^2} = \sigma d\omega \frac{R^2}{D^2}$$

und die Wirkung der ganzen Kugel ist

$$F = \sigma \frac{R^2}{D^2} \int d\omega = \frac{4\pi R^2 \sigma}{D^2} = \frac{M}{D^2}.$$

Man sieht, dass die Wirkung dieselbe ist, wie wenn die ganze Masse M im Mittelpunkte der Kugel concentrirt wäre.

Das Potential der Kugelschale nach aussen ist ebenfalls dasselbe, wie wenn die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Liegt der Punkt P der Oberfläche sehr nahe, so ist $D = R$ und die Wirkung der Schicht wird $4\pi\sigma$, entsprechend dem, was wir bereits (**36**) für einen beliebig gestalteten Leiter gefunden haben.

Die mit OP parallele Componente der auf den Punkt P von dem Elemente dS ausgeübten Wirkung hängt nur von dem Winkel $d\omega$ ab, unter welchem man dieses Element vom Punkte P' aus sieht. Diese Componente ist demnach für ein in A', dem ersteren in Bezug auf P' entgegengesetzt gelegenes Element dS' von derselben Grösse.

Ebenso verhält es sich mit allen Elementen der Calotte $CB'C'$, wenn man sie mit den Elementen von CBC' paarweis vergleicht.

Die Ebene CC' teilt demnach die Kugelfläche in zwei Teile, deren Einwirkungen auf den Punkt P einander gleich sind, und zwar ist jede $2\pi\sigma \frac{R^2}{D^2}$.

Ist der Punkt P unendlich entfernt, so werden die beiden Calotten gleich gross, ist derselbe der Fläche unendlich nahe, so wird die vordere Calotte unendlich klein, und ihre Wirkung auf den unendlich nahen Punkt ist $2\pi\sigma$; ein Resultat, welches wir bereits (**40**) für jede beliebige Fläche erhalten haben.

44. Wirkung einer aus homogen geladenen Schalen bestehenden Kugel. — Wir betrachten zunächst eine in ihrer ganzen Dicke elektrisirte Kugel, die aus concentrischen homogenen Schalen besteht.

Die Wirkung dieser Kugel auf einen äusseren Punkt ist dieselbe, wie wenn die ganze wirksame Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, oder auch auf die äussere Oberfläche so übertragen wäre, dass sie dort eine gleichförmige Schicht bildet.

Auf einen im Innern der Kugel gelegenen Punkt ist die Wirkung der denselben einschliessenden Schichten Null; die Wirkung der Schichten, deren Radius kleiner ist als die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte

bleibt noch die nämliche, wie wenn die ganze Masse derselben im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Nähert man sich dem Mittelpunkte, so wird die wirksame Masse immer kleiner; die Kraft ist immer längs des Radius gerichtet und hängt von der Art ab, wie sich die Dichte ändert.

Ist die Dichte der Elektricität in der Kugel constant, so ist die auf einen inneren, im Abstande r gelegenen Punkt ausgeübte Wirkung

$$F = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \frac{4}{3} \pi \rho r;$$

dieselbe ist demnach dem Abstande vom Mittelpunkte proportional.

Ist die Dichte in jedem Punkte der nten Potenz des Abstandes l vom Mittelpunkte proportional, $\rho = a l^n$, so ist die Wirkung einer Schicht von der Dicke dl in der Entfernung r

$$\frac{4\pi l^2 a l^n dl}{r^2} = \frac{4\pi a}{r^2} l^{n+2} dl$$

und die Gesammtwirkung wird

$$F = \frac{4\pi a}{r^2} \int_0^r l^{n+2} dl = \frac{4\pi a r^{n+3}}{r^2 (n+3)} = \frac{4\pi a}{n+3} r^{n+1}.$$

Diese Wirkung ist für $n = -1$ von r unabhängig, also in der ganzen Kugel gleich gross; dagegen wächst dieselbe bei der Annäherung an den Mittelpunkt, wenn $n < -1$ wird.

Die Gesammtmasse einer solchen Kugel vom Radius R hat den Betrag

$$M = \int 4\pi l^2 a l^n dl = \frac{4\pi a}{n+3} R^{n+3},$$

woraus man erhält

$$F = M \frac{r^{n+1}}{R^{n+3}}.$$

Nehmen wir noch allgemeiner an, dass die Dichte sich nach einem beliebigen Gesetze ändert, und nennen wir m die ausserhalb einer durch P gelegten Kugelfläche befindliche Masse, ρ_0 die mittlere Dichte der ganzen Kugel, und ρ die mittlere Dichte der äusseren Schichten, so erhält man

$$F = \frac{M - m}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 - \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) \rho \right] = \frac{M}{r^2} \left[1 - \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \frac{\rho}{\rho_0} \right].$$

An der Oberfläche ist die Kraft $F_1 = \frac{M}{R^2}$, woraus sich ergiebt

$$\frac{F}{F_1} = \frac{R^2}{r^2} \left[1 - \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \frac{\rho}{\rho_0} \right].$$

Die Kraft kann zunächst von der Oberfläche an wachsen, dann ein Maximum erreichen und endlich bis zum Mittelpunkte abnehmen. Dies findet beispielsweise für die Aenderung des Gewichtes im Innern der Erde statt. Hierfür muss sein

$$\left(1-\frac{r^3}{R^3}\right)\frac{\rho}{\rho_0}<1-\frac{r^2}{R^2}.$$

Ist die Dicke $h=R-r$ der über dem betreffenden Punkt befindlichen Schale sehr klein gegen R, so lässt sich diese Bedingung ausdrücken durch

$$3\left(\frac{r}{R}\right)^2\frac{h}{R}\frac{\rho}{\rho_0}<2\frac{r}{R}\cdot\frac{h}{R} \quad \text{oder} \quad \frac{\rho}{\rho_0}<\frac{2}{3}<0,67.$$

Die mittlere Dichte der Erde ist ungefähr gleich 5,5, diejenige an der Oberfläche 2,5; hier ist also

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{2,5}{5,5}=0,45,$$

somit die obige Bedingung erfüllt.

3. Capitel.

Allgemeine Sätze.

45. Emission und Absorption von Kraft durch elektrische Massen. — Die Kraftströmung in einer Kraftröhre bleibt, wie wir gesehen haben (**35**), constant, so lange diese Röhre nicht auf eine wirksame Masse stösst, und ist von Orten höheren nach solchen niedrigeren Potentials hin gerichtet.

Stösst die Röhre auf eine Elektricitätsmasse m, so erfährt die Kraftströmung einen Zuwachs von $4\pi m$, den sie nun weiter so lange beibehält, als sie nicht auf neue Massen trifft. Liegt die betreffende Masse auf der Oberfläche eines Leiters, so reducirt dieselbe die durch die Röhre sich fortpflanzende Kraftströmung auf Null; man kann also von zwei conjugirten Elementen dS und dS', auf denen die Dichten σ und σ' sind, sagen, dass die positive Elektricität des Elementes dS eine Kraftströmung $4\pi\sigma dS$ *aussendet*, welche an dem andern Ende der Röhre in der gleichen Menge auf dem Elemente dS' gelegener negativer Elektricität *absorbirt* wird.

Nach den Anschauungen Faraday's würden unbegrenzte Kraftröhren überhaupt nicht existiren; eine von einem elektrischen Körper ausgehende Kraftlinie würde stets irgendwo auf einem andern Körper so endigen, dass sie dort auf dem entsprechenden Elemente eine gleiche Elektricitätsmenge von entgegengesetztem Zeichen inducirt. Hiernach könnte nirgends eine absolute Elektricitätsmenge, weder eine positive noch eine negative, unabhängig existiren, der nicht am andern Ende der von ihr ausgehenden Röhre eine complementäre Menge entspräche.

Keine Kraftlinie kann zwischen zwei mit derselben Elektricitätsart geladenen Punkten bestehen. Ebenso kann eine solche nicht zwischen zwei Punkten desselben Potentials vorhanden sein. Endlich kann auf einem Leiter einem nicht mit Elektricität geladenen Punkte nie eine Kraftlinie entsprechen (**36**).

46. Ausserhalb der wirksamen Massen kann das Potential weder ein Maximum noch ein Minimum besitzen. — Eine in einem Punkte concentrirte Masse m kann als eine über einen sehr kleinen Leiter ausgebreitete Schicht aufgefasst werden. Ist die Masse m positiv, so ist der Punkt A, welchen dieselbe einnimmt, ein Emissionscentrum der Kraft für alle Richtungen; ist dieselbe negativ, so ist der Punkt ein Absorptionscentrum für alle

Richtungen. In beiden Fällen sind die Niveauflächen in der Nähe des geladenen Punktes geschlossen und gehen im Grenzfalle in Kugelflächen über, die den Punkt umgeben; denn in sehr kleiner Entfernung vom Punkte A wird das Potential der äusseren Massen unendlich klein gegen das Potential $\frac{m}{r}$ der Masse m.

Da die Niveauflächen um A herum geschlossen sind, ist dort das Potential ein Maximum oder ein Minimum: ein Maximum, wenn die Masse m positives, ein Minimum, wenn sie negatives Zeichen besitzt.

Umgekehrt befindet sich überall, wo das Potential einen Maximal- oder einen Minimalwert hat, Elektricität.

Denn vom Punkt A des Maximums aus nimmt das Potential der Voraussetzung nach in allen Richtungen ab, die benachbarten Niveauflächen sind notwendig geschlossen, die eine sehr kleine, den Punkt A umgebende Kugelfläche durchfliessende Kraftströmung hat daher einen bestimmten, von Null verschiedenen Wert Q. Es muss also im Innern dieser Fläche eine positive Elektricitätsmenge $\frac{Q}{4\pi}$ vorhanden sein.

Ebenso ist der Ort eines Potentialminimums ein Absorptionscentrum der Kraft, in welchem sich eine entsprechende negative Elektricitätsmenge befindet.

Demnach *kann es in einem beliebigen elektrischen System ausserhalb der wirksamen Massen weder ein absolutes Maximum noch ein absolutes Minimum des Potentials geben.*

47. Punkte und Linien des Gleichgewichtes. — Ist V_0 das Potential in einem festen Punkte P_0, V dasjenige in einem benachbarten Punkte, dessen Coordinaten in Bezug auf ein durch ersteren Punkt gehendes Achsensystem x, y, z sind, so kann man mit Hilfe der Maclaurin'schen Reihe nach steigenden Potenzen der Coordinaten entwickeln, und man erhält

$$V = V_0 + H_1 + H_2 + H_3 + \cdots$$

wo H_1 eine homogene Funktion ersten Grades, H_2 eine solche zweiten Grades etc. der Coordinaten des Punktes P ist.

Die Laplace'sche Gleichung muss für jede dieser Funktionen erfüllt sein, und man erhält allgemein

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial z^2} = 0.$$

Ist die Funktion H_1 identisch Null, sind also die drei partiellen Ableitungen des Potentials im Punkte P_0 Null, also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 0,$$

so ist der Punkt P_0 ein singulärer Punkt der Niveaufläche V_0, die Kraft ist dort Null, er ist also ein *Gleichgewichtspunkt.*

Für die unmittelbar benachbarten Punkte kann man die Funktionen höheren Grades gegen H_2 vernachlässigen, die Gleichung der Niveaufläche reducirt sich dann auf

$$V = V_0 + H_2.$$

Die Niveaufläche berührt dann im Punkte P_0 einen Kegel zweiten Grades, dessen Gleichung $H_2 = 0$ ist.

Ist die Funktion H_2 ebenfalls identisch Null und ist H_n die erste Funktion der Reihe für V, welche nicht verschwindet, so stellt die Gleichung

$$H_n = 0$$

einen Kegel nten Grades dar, welcher die Niveaufläche im Punkte P_0 berührt. Dieser Kegel besteht aus n oder einer kleineren Anzahl von Falten, welche einer gleichen Anzahl von Falten der Niveaufläche entsprechen.

Schneiden sich die Falten des Kegels nicht, so verhält es sich ebenso mit den Falten der Niveaufläche, und P_0 ist ein isolirter Gleichgewichtspunkt.

Schneiden sich die Falten des Kegels, so ist jede Schnittlinie auch eine Schnittlinie der entsprechenden Falten der Niveaufläche, und bildet eine *Gleichgewichtslinie,* welche durch den Punkt P_0 geht.

48. — *Besteht die Niveaufläche durch P_0 aus zwei sich schneidenden Falten, so erfolgt der Schnitt der Falten unter einem rechten Winkel.*

Besteht die Niveaufläche aus zwei Schalen, die sich schneiden, so reducirt sich der Berührungskegel zweiten Grades in einem Punkte P_0 der Schnittlinie auf zwei Ebenen.

Wir wählen die Tangente dieser Linie als z-Achse, die Gleichung des Kegels $H_2 = 0$ enthält dann kein Glied in z. Um die Laplace'sche Gleichung, die sich demnach auf

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} = 0$$

reducirt, zu befriedigen, müssen die Coefficienten der Glieder mit x^2 und y^2 entgegengesetzt gleich sein, also nimmt die Gleichung des Kegels die Form an

$$A(x^2 - y^2) + Bxy = 0;$$

diese Gleichung stellt aber zwei gegen einander senkrechte Ebenen dar, deren Schnittlinie die z-Achse ist.

Wir fassen als Beispiel den Fall eines Leiters A ins Auge, dessen Oberfläche zum Teil mit positiver, zum Teil mit negativer Elektricität geladen ist; die Trennungslinie der beiden Schichten ist eine *neutrale Linie.* Die Kraft ist in allen Punkten der neutralen Linie Null (**35**), und es ist im Dielektricum ein zweites Blatt der Niveaufläche vorhanden, welches die Oberfläche des Leiters längs dieser Linie senkrecht schneidet. Man sieht, dass dieses Blatt der Niveaufläche die von dem Leiter A *ausgehenden* Kraft-

linien von denen trennt, die dort *endigen.* Man kann dasselbe demnach als Scheidungsfläche der Kraftlinien auffassen.

49. — *Besteht eine Niveaufläche aus n Blättern, die sich in derselben Linie schneiden, so erfolgen die Schnitte der Reihe nach unter dem Winkel* $\frac{\pi}{n}$.

Alle Funktionen H der Entwickelung des Potentials, als Fortsetzung des in dem Punkte P_0 der Gleichgewichtslinie geltenden, sind bis zu derjenigen vom nten Grade identisch Null, da der Berührungskegel aus n Falten besteht. Soll die Gleichung $H_n = 0$ n durch die z-Achse gehende Ebenen darstellen, so kann dieselbe keine Glieder in z enthalten. Die Laplace'sche Gleichung reducirt sich demnach auf

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} = 0$$

oder, wenn man setzt

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

auf

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial \theta^2} = 0.$$

Die Funktion nten Grades, die dieser Gleichung genügt, ist

$$H_n = A_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n).$$

Setzt man dieselbe gleich Null, so ergiebt sich

$$\cos(n\theta + \alpha_n) = 0,$$

eine Gleichung, die n durch die z-Achse gehende Ebenen darstellt, von denen je zwei benachbarte einen Winkel $\frac{\pi}{n}$ mit einander bilden. Die Blätter der Niveaufläche schneiden einander demnach unter demselben Winkel.

50. Der Gleichgewichtszustand ist ein eindeutig bestimmter. — Zunächst sieht man ein, *dass die Uebereinanderlagerung zweier Gleichgewichtszustände wieder einen Gleichgewichtszustand ergiebt.*

In jedem der beiden Gleichgewichtszustände ist das Potential auf allen Leitern constant. Die Uebereinanderlagerung zweier Systeme von elektrischen Schichten ruft aber in jedem Punkte ein Potential hervor, welches der Summe der von den beiden ursprünglichen Zuständen herrührenden Potentiale gleich ist. Das Potential ist also noch auf jedem Leiter constant, und das Gleichgewicht bleibt bestehen.

Hieraus folgt, dass, wenn man die elektrische Dichte in allen Punkten in einem und demselben Verhältnisse ändert, man wiederum einen Gleichgewichtszustand erhält, da dies auf dasselbe hinauskommt, wie wenn man zwei oder mehrere Gleichgewichtszustände über einander legt.

51. — *Ein System von Leitern A_1, A_2, A_3 . . ., deren elektrische Ladungen sämmtlich einzeln Null sind, ist notwendig im neutralen Zustande.*

Wir bezeichnen mit V_1, V_2, V_3 . . . die Potentiale dieser verschiedenen Leiter und nennen V_1 das grösste unter ihnen.

Es kann dann im Dielektricum keinen Punkt geben, in dem das Potential höher als V_1 ist, da ausserhalb der wirksamen Massen ein Maximum des Potentials nicht existirt. Das Potential fällt vom Leiter A_1 aus nach allen Richtungen ab, alle Kraftlinien gehen also von diesem Leiter aus und keine endigt auf ihm. Nun muss die Kraftströmung Null sein, da nach der Voraussetzung die Gesammtladung von A_1 Null ist, und das kann, da A_1 Kraft nur ausströmt, allein der Fall sein, wenn alle von A_1 ausgehenden Elementarströmungen einzeln Null sind. Die Dichte ist demnach in jedem Punkte der Oberfläche für sich Null, und folglich ist der Leiter überhaupt nicht elektrisch.

Da der Leiter A_1 hiernach im neutralen Zustande ist und also eine Wirkung auf die benachbarten Leiter nicht ausübt, kann man sich ihn fortdenken und dieselbe Schlussweise auf den zweiten Leiter A_2 anwenden; so zeigt man, dass alle Leiter sich im neutralen Zustande befinden.

Wir nehmen jetzt an, dass. während die Leiter A_1, A_2, A_3 . . . von Null verschiedene Ladungen M_1, M_2, M_3 . . . besitzen, zwei Gleichgewichtszustände möglich wären, indem die Dichten auf den Leitern A_1, A_2, A_3 . . . das eine Mal durch die Funktionen σ_1, σ_2, σ_3 . . ., das andere Mal durch σ'_1, σ'_2, σ'_3 . . . darstellbar wären.

Aendert man nunmehr die Zeichen sämmtlicher elektrischer Massen im zweiten Zustande, so bleibt das Gleichgewicht bestehen, fügt man diesen Zustand zum ersten hinzu, so erhält man einen Gleichgewichtszustand, in dem die Gesammtladung auf jedem Leiter Null ist.

In diesem Falle muss nach der vorhergehenden Betrachtung die Dichte überall Null sein. Man erhält demnach für jeden Punkt der einzelnen Leiter

$$\sigma_1 = \sigma'_1$$
$$\sigma_2 = \sigma'_2$$
$$\sigma_3 = \sigma'_3$$
$$\cdots\cdots$$

Die Verteilung ist in beiden Zuständen dieselbe, der Gleichgewichtszustand ein eindeutiger. Enthielte das System räumlich verteilte Massen, so könnte man dieselben stets als ein Aggregat von auf unendlich kleinen Leitern ausgebreiteten Ladungen auffassen, und nichts würde sich in der Schlussweise ändern. Der Lehrsatz gilt also allgemein.

52. Sätze über geschlossene Oberflächen. — *Ist das Potential auf einer geschlossenen Fläche S, welche keine wirksame Masse umfasst, constant, so ist dasselbe im ganzen eingeschlossenen Raume constant.*

Denn das Potential könnte im Innern der Fläche S nicht variiren, ohne ein Maximum oder Minimum zu erreichen, was es aber (**46**) nicht kann, da dort Elektricität nicht vorhanden ist.

Ist die betrachtete Fläche die äussere Oberfläche eines Leiters, so sieht man, dass das Potential nicht blos in der Masse des Leiters constant ist, was eine bereits aus den Bedingungen des Gleichgewichts abgeleitete Folge ist, sondern auch in Höhlungen, die etwa die Substanz des Leiters unterbrechen.

53. — *Grenzt eine Fläche von constantem Potential einen Teil des Dielektricums ab, und schliesst dieselbe wirksame Massen aus, so ist das Potential constant, nicht bloss im inneren Raume, sondern auch im ganzen äusseren Raume ausserhalb der wirksamen Massen.*

Zunächst folgt aus dem vorigen Satze, dass das Potential im Innern der Fläche constant ist. Da es also hier überall einen und denselben Wert hat, und Kraftlinien nur von Orten höheren zu solchen niederen Potentials verlaufen, so existirt innerhalb der Fläche keine Kraftlinie. Alle Kraftlinien müssen also von der Fläche ausgehen oder in ihr endigen. Die Fläche besitzt aber gar keine Elektricität; somit kann eine Kraftlinie weder von ihr ausgehen noch in ihr endigen. Es existirt also keine die Fläche treffende Kraftlinie, somit ist das Potential ausserhalb in der unmittelbaren Nähe der Fläche Null; man kann also eine weitere Fläche S' construiren, welche die erstere vollkommen einschliesst und die dieselbe Eigenschaft besitzt, auf diese kann man dann wiederum dieselbe Schlussweise anwenden, und so ohne Ende weiter, unter der Bedingung, dass man sich stets ausserhalb der wirksamen Massen hält.

54. — Dieser letzte Lehrsatz ist von Gauss in etwas anderer Weise unter Benutzung des folgenden Hilfssatzes bewiesen worden.

Schliesst eine sphärische Fläche keine wirksame Masse ein, so ist das Potential im Mittelpunkte so gross als der Mittelwert der Potentiale auf die verschiedenen Punkte der Oberfläche.

Ist R der Radius der Kugel, m eine der wirksamen Massen, die in einem Punkte A in der Entfernung d vom Mittelpunkte liegt, und r die Entfernung des Punktes A von einem Elemente dS der Oberfläche, so wird der mittlere Wert des von der Masse m herrührenden Potentials auf die einzelnen Punkte der Oberfläche ausgedrückt durch

$$V_m = \frac{\int \frac{m dS}{r}}{4\pi R^2}$$

die Summe $\int \frac{m dS}{r}$ ist aber auch der Wert des Potentials einer homogenen Schicht von der Dichte m, welche die Kugel bedecken würde, auf A; da nun dieses Potential aber (**43**) gleich

$$\frac{4\pi R^2 m}{d}.$$

ist, so wird der mittlere Wert des Potentials von A auf die Punkte der Kugelfläche

$$V_m = \frac{m}{d},$$

d. h. gleich dem Werte des Potentials von A auf den Mittelpunkt der Kugelfläche.

Diese Schlussweise kann augenscheinlich auf jede beliebige Anzahl von Massen ausgedehnt werden.

Wir nehmen jetzt an, dass in einem durch die Fläche S begrenzten Teile des Dielectricums das Potential einen constanten Wert V besitzt; wäre ausserhalb der Fläche der Wert des Potentials von V verschieden, so würde es immer möglich sein, eine Kugel zu construiren, die ihren Mittelpunkt innerhalb S hat und ausserhalb nur solche Punkte trifft, in denen das Potential einen Wert besitzt, der stets grösser oder stets kleiner als V ist; dann wäre aber der mittlere Wert des Potentials auf der Kugel von dem Werte V desselben im Mittelpunkte verschieden. Der Wert des Potentials ausserhalb S kann also nicht von V verschieden sein.

55. — *Umfasst eine geschlossene Fläche S alle wirksamen Massen und hat das Potential auf dieser Fläche einen constanten Wert V, so hat dasselbe in jedem äusseren Punkte einen Wert, der zwischen V und Null liegt.*

Wir nehmen V als positiv an. Da das Potential im Unendlichen Null ist, kann dasselbe in einem ausserhalb der Fläche befindlichen Punkte P keinen höheren Wert als V haben, andernfalls müsste irgendwo ein Maximum des Potentials und folglich eine wirksame Masse existiren, was unserer Annahme zuwiderläuft. Ebensowenig kann das Potential in P kleiner als Null sein, andernfalls müsste ein Minimum existiren. Das Potential ausserhalb S variirt also zwischen V und Null. Dasselbe kann auch nicht gleich V sein, ausser wenn V selbst Null ist. Denn es kann nicht gleich V sein, ohne ein Maximum gegen die benachbarten Punkte oder ohne Teil eines Ortes constanten Potentials zu sein, der sich bis zur Fläche S erstrecken müsste; aber im letzteren Falle wäre das Potential nach dem vorhergehenden Satze im ganzen Dielektricum constant und könnte nur den Wert Null haben, da dasselbe im Unendlichen Null ist.

56. — *Eine leitende Fläche S, die alle wirksamen Massen einschliesst, kann nur Elektricität einer Art besitzen.*

Denn ist V das Potential der Fläche, das wir als positiv voraussetzen, so würden, wenn in irgend einem Punkte A der Fläche negative Elektricität vorhanden wäre, in diesem Punkte Kraftlinien endigen, und es müsste irgendwo ein äusserer Punkt P existiren, wo das Potential einen grösseren Wert als V besitzt, was nach dem vorigen Satze unmöglich ist.

57. — *Wenn in einem im Gleichgewichte befindlichen System ein leitender Körper verschiedene elektrische Massen einschliesst, dann ist die algebraische Summe der im Innern und an der inneren Oberfläche des Körpers belegenen Elektricitätsmengen Null.*

Es seien $m, m', m'' \ldots$ die im Innern des Leiters A (Fig. 13) enthaltenen Massen und M die Masse der über der inneren Oberfläche S ausgebreiteten Schicht; wir nehmen ferner an, dass auch auf der äusseren Oberfläche S' Elektricität vorhanden ist, und dass sich ausserhalb noch andere Massen befinden. Auf einer geschlossenen Fläche S_1, die in der Substanz des Leiters angenommen ist und die alle inneren Massen einschliesst, ist die Kraft in jedem Punkte Null.

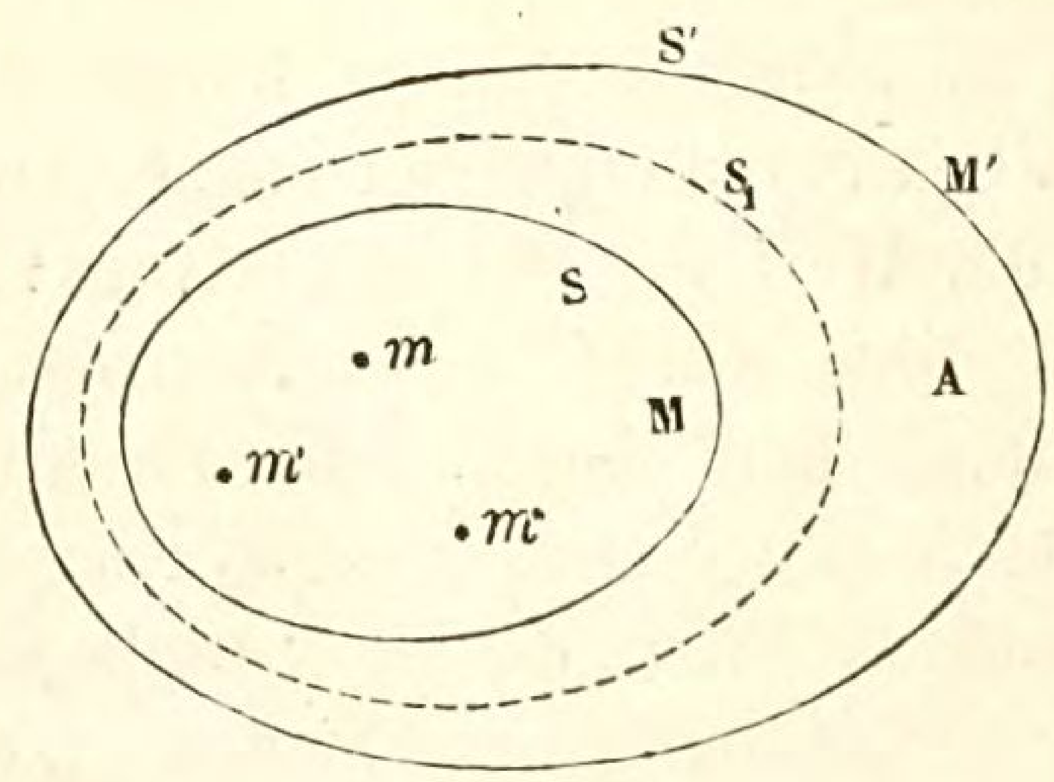


Fig. 13.

Die auf diese Fläche bezogene Kraftströmung ist demnach ebenfalls Null, und folglich ist die algebraische Summe der von derselben eingeschlossenen Massen Null. Man erhält also

$$M + m + m' + m'' + \cdots = 0,$$

oder

$$M + \Sigma m = 0.$$

Die durch Influenz auf der Fläche S hervorgerufene Schicht M ist entgegengesetzt gleich der algebraischen Summe der in der Höhlung enthaltenen Massen. Diese Schicht *absorbirt* die von den inneren Massen ausgehende Kraftströmung. Das System dieser Schicht und der eingeschlossenen Massen giebt für jeden äusseren Punkt ein Potential gleich Null und eine Wirkung gleich Null.

Steht der Leiter A mit dem Erdboden in Verbindung, so ist sein Potential Null; wenn also keine andern wirksamen Massen vorhanden sind, als die in der Höhlung enthaltenen, dann befindet sich die äussere Fläche S' im neutralen Zustande, und das Potential ist überall ausserhalb der Höhlung Null.

Eine auf die isolirte Fläche S' gebrachte elektrische Masse M' verteilt sich dort in einer von den inneren Massen unabhängigen Weise. Sie erzeugt ein Potential V', welches in der ganzen Ausdehnung des Leiters A und der von demselben eingeschlossenen Höhlungen constant ist, und dieses Potential addirt sich in jedem Punkte zu dem bereits vorhandenen Potential. Die Masse M' übt demnach auf das Gleichgewicht der inneren Massen keinen Einfluss.

58. — Sind keine andern wirksamen Massen vorhanden als die in der Höhlung enthaltenen, und war der Leiter A ursprünglich im neutralen Zustande, so muss seine Gesammtladung Null bleiben; zugleich mit der Schicht M auf der inneren Oberfläche S entsteht eine entgegengesetzt gleiche Schicht M' auf der äusseren Fläche S', und man erhält

$$M' = -M = m + m' + m'' + \cdots = \Sigma m.$$

Diese Schicht M', welche der algebraischen Summe der inneren Massen genau gleich ist, ist von selbst im Gleichgewicht, welches auch die Lage der inneren Massen sein möge.

Man findet so das Gesetz von Faraday: *Die von einem elektrischen System auf einem dasselbe einschliessenden leitenden Körper inducirte Elektricitätsmenge ist der inducirenden Menge gleich.*

59. — *Die Wirkung, welche gegebene elektrische Massen ausserhalb irgend einer geschlossenen Fläche ausüben, ist dieselbe wie die einer Schicht von gleicher Masse, die nach einem bestimmten Gesetze auf dieser Fläche ausgebreitet ist.*

Es seien m, m', m'' ... oder Σm die gegebenen Massen, die wir als unverrückbar annehmen wollen, wie wenn sie nichtleitenden Körpern angehörten; eine beliebig gestaltete Fläche schliesse sie ein. Wir denken uns für einen Augenblick die Fläche durch eine materielle Schale ersetzt, die aus einem unendlich dünnen, mit der Erde verbundenen Leiter besteht; die innere Fläche dieser Schale würde sich dann mit einer Masse $-M = -\Sigma m$ bedecken, deren Potential für alle äusseren Punkte dem von Σm entgegengesetzt gleich ist. Eine in derselben Weise auf der Fläche S verteilte Masse $+M$ besitzt demnach überall ausserhalb ein Potential, welches demjenigen der betrachteten Massen Σm genau gleich ist.

Im Allgemeinen ist die Schicht M nicht von selbst im Gleichgewicht, d. h. sie besitzt nicht die Verteilung, die sie nach der Form der Fläche und nach der Wirkung der äusseren Massen haben müsste; die Kraftlinien schneiden die Fläche nicht normal.

60. — *Die Schicht $+M$ ist von selbst im Gleichgewicht, wenn die Fläche S eine Niveaufläche des ursprünglichen Systems mit Berücksichtigung auch der äusseren Massen ist.*

Wir bezeichnen mit $\Sigma m'$ die äusseren Massen. Die Kraftlinien des Feldes sind ausserhalb S dieselben für das System Σm und $\Sigma m'$ wie für das System M und $\Sigma m'$; da diese Kraftlinien nach der Voraussetzung auf S normal stehen, ist die dieselbe bedeckende Schicht M dort im Gleichgewicht und hat ein constantes Potential V.

Man kann also für die äusseren Punkte das System Σm durch eine gleiche, im Gleichgewicht befindliche Masse auf einer dasselbe umgebenden Niveaufläche ersetzen, wobei die Dichte in jedem Punkte durch die Beziehung bestimmt ist (**36**)

$$\sigma = \frac{F}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}.$$

Diese Vertauschung ändert aber das Feld im Innern der Fläche S; in dem vorliegenden Falle ist das innere Potential constant und gleich V geworden, da es auf der Fläche constant ist und da die Höhlung nach der gemachten Annahme keine Elektricität mehr einschliesst.

Ist das Potential constant, so ist die Kraft Null, das äussere System $\Sigma m'$ und die Schicht M üben also im Innern der Fläche S entgegengesetzt gleiche Wirkungen aus; eine Schicht $-M$ würde also genau gleiche Wirkungen ausüben wie $\Sigma m'$. Man kann demnach für alle Punkte innerhalb der Niveaufläche S statt der Wirkung der äusseren Massen diejenige einer im Gleichgewichte befindlichen Schicht einführen, die den inneren Massen entgegengesetzt gleich ist.

61. — Hieraus ergeben sich die folgenden Sätze:

Betrachtet man eine Niveaufläche S in irgend einem elektrischen System, so kann man:

1. Für alle äusseren Punkte die inneren Massen Σm durch eine genau gleiche, auf dieser Fläche im Gleichgewicht befindliche Masse ersetzen;

2. Für die inneren Punkte die äusseren Massen $\Sigma m'$ durch dieselbe Masse M, aber von entgegengesetztem Zeichen, d. h. durch eine den inneren Massen entgegengesetzt gleiche Masse, auf der Fläche ersetzen, vorausgesetzt, dass diese Schicht sich ebenfalls im Gleichgewichte befindet.

62. Lehrsatz von Gauss. — Sind zwei elektrische Systeme gegeben, das eine aus den Massen m_1, m_2, m_3 . . . bestehend mit dem Potential V, das andere aus den Massen m'_1, m'_2, m'_3 . . . bestehend mit dem Potential V', so erhält man identisch

$$\Sigma m V' = \Sigma m' V,$$

in andern Worten: *Die Summe der elementaren Massen des ersten Systems, jede multiplicirt mit dem Potential des zweiten Systems in dem Punkte, in welchem sie sich befindet, ist gleich der analogen für die Massen des zweiten Systems gebildeten Summe;* die Summen sind natürlich durch Integrale zu ersetzen, wenn die Massen einen ausgedehnten Raum einnehmen.

Dieser Satz spricht eine Identität aus, und es genügt, um sich von der Richtigkeit derselben zu überzeugen, die Potentiale durch ihre Werte als Funktionen der Massen und der Entfernungen zu ersetzen. Man sieht dann, dass jede Seite der Gleichung gleich der Summe der Produkte ist, die man erhält, wenn man jede Masse des einen Systems mit einer Masse des andern Systems multiplicirt und das erhaltene Produkt durch ihre gegenseitige Entfernung dividirt.

Es genügt auch zu beachten, dass die Summen $\Sigma m' V$ und $\Sigma m V'$ die Arbeit ausdrücken, die man aufwenden müsste, um jedes System in Gegenwart des andern aus dem Unendlichen auf den Ort überzuführen, an dem es sich thatsächlich befindet, während die beiden Systeme Σm und $\Sigma m'$ als starr vorausgesetzt sind, da diese Arbeit augenscheinlich in beiden Fällen dieselbe ist.

Nimmt man die beiden Systeme als aus im Gleichgewichte befindlichen Leitern A_1, A_2, A_3 ... bestehend an, so ist das Potential auf jedem Leiter constant, und bezeichnet man deren Gesammtmassen in zwei verschiedenen Zuständen mit M_1, M_2, M_3 ... und M'_1, M'_2, M'_3, so folgt aus der obigen Gleichung

$$M_1 V'_1 + M_2 V'_2 + M_3 V'_3 + \cdots = M'_1 V_1 + M'_2 V_2 + M'_3 V_3 + \cdots$$

63. Folgerungen. — Die folgenden, von Bertrand bewiesenen Sätze können als Folgerungen aus dem Satze von Gauss angesehen werden.

I. — *Wird ein im neutralen Zustande befindlicher, isolirter oder nicht isolirter Leiter A der Wirkung einer Masse m ausgesetzt, die sich nach einander in den Punkten P und P' des Dielektricums befindet, so ist das von der in A inducirten Ladung herrührende Potential auf den Punkt P' bei der ersten Lage der Masse m dasselbe wie dasjenige auf P bei der zweiten Lage.*

Wir bemerken zunächst, dass man jeden Punkt des Dielektricums stets auffassen kann als den Mittelpunkt einer unendlich kleinen, leitenden Kugel, da die Gesammtladung, die diese Kugel annimmt, stets Null ist und stets in seinem Mittelpunkte ein der Null gleiches Potential liefert.

Steht der Körper A mit der Erde in leitender Verbindung, so hat man folgende zwei Gleichgewichtszustände in Betracht zu ziehen

		Potential	Ladung
1.	Kugel P	U	m
	Kugel P'	V	0
	Körper A	0	x
2.	Kugel P	V'	0
	Kugel P'	U'	m
	Körper A	0	x'.

Wendet man den Gauss'schen Satz auf diese beiden Zustände an, so erhält man

$$mV' = mV$$

oder

$$V = V'.$$

Ist der Körper A isolirt, so ist zwar sein Potential nicht Null, aber seine Gesammtladung ist in beiden Fällen Null, und das Endresultat bleibt dasselbe.

II. — *Wenn von zwei Leitern A und B einer nach dem andern mit einer Elektricitätsquelle in Verbindung gebracht wird, die ihn auf das Potential V bringt, während der zweite mit der Erde in leitender Verbindung steht, und folglich das Potential Null hat, so ist in beiden Fällen die auf dem zweiten Körper durch Influenz hervorgerufene Elektricitätsmenge dieselbe.*

Denn man findet im ersten Falle

	Potential	Ladung
A	V	x
B	0	$-M$

und im zweiten Falle

A	0	$-M'$
B	V	x.

Wendet man den vorigen Satz an, so erhält man

$$M'V = MV$$

oder

$$M' = M.$$

64. Lehrsatz von Earnshaw. — *Ein elektrischer Körper kann sich in einem elektrischen Felde nicht in stabilem Gleichgewichte befinden.*

Es befinde sich ein elektrischer Körper A in einem von äusseren Massen B gebildeten Felde, und es seien alle Massen, diejenige von A inbegriffen, als fest vorausgesetzt.

Wir bezeichnen mit m die elektrische Masse eines Volumelementes von A in einem Punkte P, in welchem das Potential der äusseren Massen allein V ist. Die Energie des Körpers in Bezug auf das Feld ist

$$W = \Sigma m V. \tag{1}$$

Für das stabile Gleichgewicht ist die Bedingung zu erfüllen, dass für jede Richtung r die Ableitung $\frac{\partial W}{\partial r}$ Null oder positiv ist.

Sind x, y, z die Coordinaten des Punktes P; ξ, η, ζ die eines im Innern des Körpers A angenommenen Punktes P_0 und a, b, c die des Punktes P in einem neuen Coordinatensystem, dessen Achsen denen des ersten parallel sind, und das in P_0 seinen Anfangspunkt hat, so erhält man

$$x = a + \xi$$
$$y = b + \eta$$
$$z = c + \zeta.$$

Das Potential V kann als Funktion von a, b, c und ξ, η, ζ aufgefasst werden. Wird der Körper A gezwungen, sich parallel zu sich selbst zu bewegen, so erhält man

$$dx = d\xi$$
$$dy = d\eta$$
$$dz = d\zeta$$

und folglich

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}.$$

Diese Summe ist für jeden Summanden mV der rechten Seite der Gleichung (1) Null, da V das Potential der äusseren Massen bedeutet, und man erhält demnach auch

$$(2) \qquad \Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Die Energie W ist demnach eine Funktion der Coordinaten des Punktes P_0, und diese Funktion genügt der Laplace'schen Gleichung so lange, als die Gleichung (2) selbst noch befriedigt wird. Man kann nun annehmen, dass P_0 innerhalb einer Kugel von so kleinem Radius r eingeschlossen bleibt, dass der betrachtete Körper A bei seiner Bewegung keine der äusseren Massen trifft. Für jede Ortsveränderung parallel einem Radius dieser Kugel ist die Aenderung der Energie

$$dW = \frac{\partial W}{\partial r} dr.$$

Wenden wir die Green'sche Formel (**34**) auf die Oberfläche dieser Kugel an, so erhalten wir

$$\int \frac{\partial W}{\partial r} dS = \int \Delta W dv = 0.$$

Da also das Integral $\int \frac{\partial W}{\partial r} dS$ Null sein muss, so folgt, dass die Ableitung $\frac{\partial W}{\partial r}$ für gewisse Richtungen negativ, für andere positiv sein muss; folglich ist der Körper A nicht im Gleichgewicht, und er strebt sich nach Orten hin zu bewegen, für welche die Energie W kleiner wird.

Gleichgewicht ist dann vorhanden, wenn $\frac{\partial W}{\partial r}$ stets Null, d. h. wenn die Energie constant ist oder durch ein absolutes Maximum oder Minimum geht. Man erhält dann

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial W}{\partial x} = \Sigma m \frac{\partial V}{\partial x} = -\Sigma m X = 0,$$

und ebenso

$$\Sigma m Y = 0,$$
$$\Sigma m Z = 0.$$

Die Componenten X, Y, Z der Kraft des von den äusseren Massen hervorgerufenen Feldes können nach steigenden Potenzen der Coordinaten a, b, c und der Componenten X_0, Y_0, Z_0 des Punktes P_0 entwickelt werden, wodurch man erhält

$$X = X_0 + H_1 + H_2 + \cdots H_n + \cdots,$$

wo $H_1, H_2 \ldots H_n \ldots$ Funktionen 1ten, 2ten ... nten ... Grades der Coordinaten a, b, c sind.

Es ergiebt sich

$$\Sigma m X = \Sigma m (X_0 + H_1 + H_2 + \cdots H_n + \cdots) = 0.$$

Damit diese Gleichung befriedigt werde, müssen alle Coefficienten der Entwicklung Null sein; dies erfordert zunächst, dass alle Ableitungen von X Null sind, da die Lage des Punktes P_0 willkürlich ist, und daraus folgt, dass

$$X_0 \Sigma m = 0.$$

Es muss demnach entweder die Gesammtladung Σm des Körpers A Null sein, oder die Componenten X_0, Y_0, Z_0 der Kraft müssen selbst Null sein.

Damit demnach ein elektrischer Körper sich in einem elektrischen Felde im Gleichgewicht befinde, muss entweder die Kraft des Feldes Null sein, oder, wenn das Feld ein gleichmässiges ist, muss die algebraische Summe der elektrischen Massen des Körpers Null sein.

Wir haben für diesen Beweis die Voraussetzung gemacht, dass die Elektricität auf A fest sei, und dass die äusseren Massen für sich ein starres System bilden. Der Satz gilt a fortiori für den Fall, wo das System Leiter enthält. Wenn stabiles Gleichgewicht bei Einführung starrer Verbindungen nicht vorhanden ist, kann es noch weniger bestehen, wenn man diese Verbindungen fallen lässt, beispielsweise wenn die elektrischen Körper zum Teil Leiter sind, wobei der Spielraum für die Ortsveränderung der elektrischen Massen ein grösserer ist.

4. Capitel.

Elektrisches Gleichgewicht.

65. Gleichgewichtsbedingungen für Leiter. — Die allgemeine Aufgabe für das elektrische Gleichgewicht kann, wenn es sich nur um Leiter handelt, in folgender Weise ausgesprochen werden:

Teils isolirte, teils mit der Erde in leitender Verbindung stehende Leiter, die ersteren mit bestimmten Elektricitätsmengen geladen, sind gegeben; es soll das Potential für jeden Punkt bestimmt werden.

In andern Worten kommt die Aufgabe darauf zurück, eine Funktion V der Coordinaten zu bestimmen, welche folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Funktion soll im Unendlichen Null werden und auf jedem Leiter einen constanten, vorgeschriebenen Wert annehmen, wobei dieser Wert auf allen mit der Erde in Verbindung stehenden Leitern Null ist.

2. Die Summe der drei zweiten partiellen Ableitungen soll in der ganzen Ausdehnung der Dielektrica und im Innern der Leiter Null sein, da die elektrische Dichte an allen diesen Orten Null ist; ausserdem sollen innerhalb der Leiter die Ableitungen nach den Coordinaten einzeln Null sein.

3. In jedem Punkte der Oberfläche der Leiter soll die Flächendichte bestimmt sein durch die Gleichung

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn},$$

so dass die Gesammtladung M eines Leiters ausgedrückt wird durch

$$M = \int \sigma dS = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dn}\,dS.$$

Diese drei Bedingungen sind hinreichend, da sie einen Gleichgewichtszustand bestimmen, der den gestellten Forderungen genügt, und da für das System nur ein Gleichgewichtszustand besteht (**50**).

Die Aufgabe bietet vom mathematischen Standpunkte grosse Schwierigkeiten, und man kennt keine allgemeine Lösung derselben. Nur in einigen speciellen Fällen, von denen wir die wichtigsten später behandeln werden, ist die Lösung gelungen; aber man kann schon aus der allgemeinen Fassung der Aufgabe eine gewisse Anzahl wichtiger Beziehungen herleiten.

66. Allgemeine Bemerkungen. — Wir nehmen zunächst an, dass unter allen vorhandenen Leitern A_1, A_2, A_3 ... ein einziger A_1, der isolirt ist, eine Ladung M erhalten habe, und dass alle andern mit der Erde leitend verbunden sind.

Sobald sich das Gleichgewicht hergestellt hat, hat das Potential auf A_1 einen constanten Wert V_1 und ist auf allen andern Leitern Null. Wir nehmen $V_1 > 0$ an.

In der ganzen Ausdehnung des Dielektricums kann das Potential weder grösser als V_1, noch kleiner als Null sein, und es liegt zwischen V_1 und 0 (55). Es folgt daraus, dass die mit der Erde verbundenen Leiter nur negative Elektricität enthalten können; denn wenn ihre Oberfläche teilweis auch positive Elektricität besässe, so würden von dort Kraftlinien ausgehen, die nach Punkten niedrigeren Potentials, wo dasselbe also negativ ist, gerichtet wären, und solche sind nicht vorhanden.

Alle Kraftlinien des Feldes gehen also ausschliesslich vom Leiter A_1 aus, teils endigen sie an Leitern, die mit der Erde in Verbindung stehen, teils verlaufen sie ins Unendliche.

Hieraus folgt, dass die negative Ladung aller übrigen Leiter zusammen nur ein Bruchteil der auf A_1 befindlichen ist; die beiden Ladungen sind nur dann gleich, wenn einer von den mit der Erde verbundenen Leitern den Leiter A_1 vollständig einschliesst.

67. — Wir nehmen jetzt an, dass in Gegenwart des Leiters A_1 noch andere isolirte Leiter A_2, A_3 ... vorhanden sind, die sich zunächst im neutralen Zustande befinden, und deren Gesammtladung folglich Null geblieben ist.

Das Potential ist in der ganzen Ausdehnung des Dielektricums auch jetzt noch positiv und kleiner als V_1. Dasselbe hat auf jedem der andern Leiter einen constanten Wert; dieser Wert ist positiv, da bei allen Leitern ein Teil der Oberfläche mit positiver Elektricität geladen ist, da folglich von dort Kraftlinien ausgehen, und da diese Kraftlinien sich dorthin erstrecken, wo das Potential überall positiv ist.

Es sei A_2 derjenige unter den isolirten Leitern, dessen Potential V_2 das höchste ist; ein Teil seiner Oberfläche ist negativ geladen, derselbe nimmt also Kraftlinien auf. Keine derselben kann von der Erde noch auch, wie vorausgesetzt, von den andern Leitern herkommen, deren Potential ja niedriger ist; alle kommen also vom Leiter A_1, und folglich ist V_2 kleiner als V_1. Da ausserdem die von A_2 aufgenommenen Kraftlinien nicht die Gesammtheit der von A_1 ausgesandten ausmachen, so ist sowohl die positive, als die negative Schicht, welche die Ladung von A_2 ausmachen, kleiner als die Gesammtladung von A_1.

Dieselbe Schlussweise kann man auf alle andern Leiter anwenden; so nimmt der der Grösse des Potentials nach folgende Leiter A_3 Kraftlinien von A_1 und A_2 auf, und die letzteren können als indirekt von A_1 herrührend angesehen werden.

Auf allen isolirten Leitern zusammengenommen ist also die negative Ladung kleiner als die positive Ladung von A_1, ausser wenn einer von ihnen eine den Leiter A_1 vollständig einschliessende Oberfläche besitzt.

68. Beziehungen zwischen den Ladungen und den Potentialen. — Wir bezeichnen die Leiter mit $A_1, A_2 \ldots A_n$, ihre Ladungen seien bezw. $M_1, M_2 \ldots M_n$ und die entsprechenden Potentiale $V_1, V_2 \ldots V_n$.

Wir nehmen zunächst an, dass alle Leiter isolirt sind, sich im neutralen Zustande befinden und das Potential Null besitzen. Geben wir jetzt einem derselben, A_1, eine positive, der Einheit gleiche Ladung, so werde sein Potential α_{11}, und die Potentiale der andern Leiter seien bezw. α_{21}, $\alpha_{31} \ldots \alpha_{n1}$. Giebt man dem Leiter A_1 statt einer der Einheit gleichen Ladung die Ladung M_1, so werden alle Potentiale mit M_1 multiplicirt; sie sind $\alpha_{21} M_1$, $\alpha_{31} M_1 \ldots \alpha_{n1} M_1$. Nehmen wir jetzt an, dass man A_1 entladet und dem Leiter A_2 die Ladung M_2 giebt, so werden die Potentiale $\alpha_{12} M_2$, $\alpha_{22} M_2 \ldots \alpha_{n2} M_2$ u. s. f. Der Endzustand ist schliesslich, wenn alle Leiter gleichzeitig die ihnen zukommenden Ladungen erhalten haben, die Uebereinanderlagerung der so einzeln erhaltenen Zustände; man erhält also als Ausdruck des Potentials auf jedem einzelnen Leiter eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad V_p = \alpha_{p1} M_1 + \alpha_{p2} M_2 + \cdots \alpha_{pn} M_n,$$

und demnach n ähnliche Gleichungen für das ganze System.

Hieraus schliesst man:

In jedem im Gleichgewichte befindlichen elektrischen System lassen sich die Potentiale der verschiedenen Leiter linear als Funktionen der Ladungen ausdrücken.

Unter den n^2 Coefficienten der Gleichungen (1) giebt der Coefficient α_{pp} das Potential des Leiters A_p an, wenn er mit der Elektricitätseinheit geladen ist, während alle andern ohne Ladungen bleiben; ein Coefficient wie α_{qp} bezeichnet das Potential, welches gleichzeitig ein anderer Leiter A_q erhält.

Es ist leicht einzusehen, dass diese letzteren Coefficienten der Bedingung genügen

$$(2) \qquad \alpha_{pq} = \alpha_{qp}.$$

Denn betrachten wir nach einander die beiden Zustände, wo jeder der Leiter A_p und A_q allein mit der Elektricitätseinheit geladen ist, während alle andern ohne Ladung bleiben, so giebt die Anwendung des Gauss'schen Satzes (**62**) unmittelbar die Gleichung (2).

Die oben (**67**) gemachte Bemerkung zeigt, dass alle Coefficienten α positiv sind, und dass ein Coefficient wie α_{qp} nie grösser ist als α_{pp} oder α_{qq}.

69. — Wenn man die Gleichungen (1) nach den Ladungen auflöst, erhält man n Gleichungen von der Form

$$(3) \qquad M_p = \gamma_{p1} V_1 + \gamma_{p2} V_2 + \cdots + \gamma_{pn} V_n,$$

die n^2 Coefficienten enthalten, deren Bedeutung klar ist.

Der Coefficient γ_{pp} drückt die Ladung aus, die man dem Leiter A_p geben muss, um ihn auf das Potential Eins zu bringen, während die andern sämmtlich das Potential Null besitzen. Dieser Coefficient, der in der Elektricitätslehre eine grosse Rolle spielt, heisst die *Capacität* des Leiters A_p; wir kommen bald hierauf zurück. Ein Coefficient wie γ_{qp} drückt die Ladung aus, die gleichzeitig der mit der Erde verbundene Leiter A_q erhält; man könnte ihn den *Coefficienten der auf A_q durch A_p inducirten Elektricität* nennen.

Die Anwendung des Gauss'schen Satzes auf den Fall zweier auf einander folgender Zustände, wo jeder der Leiter A_p und A_q auf das Potential Eins gebracht wird, während die andern mit der Erde verbunden sind, zeigt, dass auch von diesen Coefficienten je zwei gleich sind, und dass man die Beziehung erhält

$$(4) \qquad \gamma_{qp} = \gamma_{pq},$$

eine Formel, die nur eine Erweiterung des oben (**63**) für zwei Leiter bewiesenen Satzes darstellt.

Berücksichtigt man die Bemerkung in § 66, so sieht man leicht, dass während die Coefficienten γ_{pp}, welche die Capacitäten ausdrücken, sämmtlich positiv sind, die Coefficienten der inducirten Elektricität, wie γ_{pq}, sämmtlich negativ sind; ferner dass die Summe aller der Coefficienten, die sich auf die von demselben Leiter ausgeübte Induktion beziehen, dem absoluten Werte nach niemals grösser als die Capacität dieses Leiters ist. Beispielsweise erhält man

$$-[\gamma_{1p} + \gamma_{2p} + \cdots + \gamma_{np}] < \gamma_{pp}:$$

ausser wenn einer unter den mit der Erde leitend verbundenen Leitern, beispielsweise A_q, den Leiter A_p vollständig einschliesst. In diesem Falle ist

$$\gamma_{pp} = -\gamma_{qp}$$

und die übrigen $n-2$ auf den Leiter A_p bezüglichen Coefficienten γ_{1p}, $\gamma_{2p} \cdots \gamma_{np}$ werden Null.

70. Analogieen für die Aufgabe über das elektrische Gleichgewicht. — Es ist interessant mit der eben behandelten Aufgabe zwei andere Aufgaben zu vergleichen, die sich zwar auf völlig andere Erscheinungen beziehen, die aber vom mathematischen Standpunkte aus die vollkommenste Analogie bieten, nämlich die gleichförmige Ausbreitung der Wärme in einem homogenen Mittel und die stationäre Bewegung einer incompressibeln reibungslosen Flüssigkeit.

Die elektrische Aufgabe ist, um das Gesagte nochmals zusammen zu fassen, charakterisirt durch die Existenz einer Funktion V der Coordinaten, die im Unendlichen Null wird, auf jedem der Leiter einen constanten vorgeschriebenen Wert hat und für jeden Punkt des Dielektricums der Gleichung

$$\Delta V = 0$$

genügt, deren physikalische Deutung sehr einfach ist. Sind X, Y, Z die Componenten der Kraft in einem Punkte P, so stellt die Grösse $-\Delta V dv$ die gesammte Kraftströmung dar, die von einem um diesen Punkt herum angenommenen Volumenelemente dv ausgeht, und die Gleichung $\Delta V = 0$ besagt, dass diese Strömung im Dielektricum oder im Innern eines Leiters, wo Elektricität nicht vorhanden ist, Null ist.

Wir stellen uns jetzt vor, dass man in einer Aufgabe über statische Elektricität das isolirende Mittel durch ein die Wärme leitendes homogenes und *isotropes* Mittel, d. h. ein solches, welches in allen Richtungen dieselben Eigenschaften zeigt, ersetzt, und ebenso denken wir uns jeden elektrischen Leiter durch Wärme abgebende oder Wärme absorbirende Quellen ersetzt, die auf ihren Oberflächen die Temperaturen constant halten und zwar Temperaturen, die dem numerischen Werte nach bezw. gleich den ursprünglichen Potentialen sind, so dass man für jeden dieser Leiter erhält $t = V$.

Ist einmal das Gleichgewicht hergestellt, so besitzt jeder Punkt des Mittels eine bestimmte Temperatur, und man kann *isotherme* Flächen construiren, d. h. solche von gleicher Temperatur oder von gleichem thermischen Niveau. Es ist klar, dass die Temperatur eines Punktes P, der zwischen zwei isothermen Flächen S und S' liegt, unabhängig von der Lage der Wärmequellen ist, und dass sie dieselbe bleiben würde, wenn man die Wärmequellen unterdrückte und die beiden Flächen in irgend einer andern Weise constant auf den Temperaturen t und t' erhielte.

Die Hypothese von Fourier besteht zunächst in der Annahme, die man übrigens als einfache Uebersetzung der Thatsachen ansehen kann, dass die Wärme sich von Punkt zu Punkt verbreitet, dass der thermische Zustand eines Punktes einen merklichen Einfluss nur auf die ihm sehr nahen Punkte ausübt, und dass die wärmeren Punkte die Temperatur der kälteren zu erhöhen streben. Fourier macht ferner die weniger unmittelbar einleuchtende Annahme, dass die Temperaturabgaben nur von den Differenzen der Temperatur, nicht von deren absoluten Werten abhängen.

Die Wärmeströmung, die durch ein Element dS einer isothermen Fläche S (Fig. 14) hindurchgeht, ist wegen der Symmetrie normal zu dieser Fläche und zu allen isothermen Flächen, die sie trifft. Die Wärmeströmung dQ, welche in der Zeiteinheit vom Element dS zu dem unendlich nahen Elemente dS' übergeht, ist der Fläche dS, der unendlich kleinen Temperaturdifferenz $t - t'$, einem Coefficienten h, der nur von der Natur des Mittels

abhängig ist, und endlich einer Funktion der Entfernung jener Elemente von einander proportional.

Man kann also setzen

$$dQ = h dS \frac{t - t'}{\varphi(e)} \cdot$$

Zieht man eine Zwischenfläche S_1, welche die Temperatur t_1 besitzt, in Betracht, so geht die von dS nach dS' sich bewegende Wärmeströmung zunächst durch das Element dS_1, welches sich in der Entfernung e_1 befindet, woraus sich ergiebt

$$dQ = h dS \frac{t - t_1}{\varphi(e_1)} = h dS \frac{t - t'}{\varphi(e)} \cdot$$

Da die Temperaturdifferenzen $t - t_1$ und $t - t'$ den senkrechten Entfernungen proportional sind, so kann hiernach die Funktion φ nur der Entfernung proportional sein. Nennt man demnach dt die in Richtung der Wärmeströmung erfolgende Temperaturänderung, und dn die Entfernung der

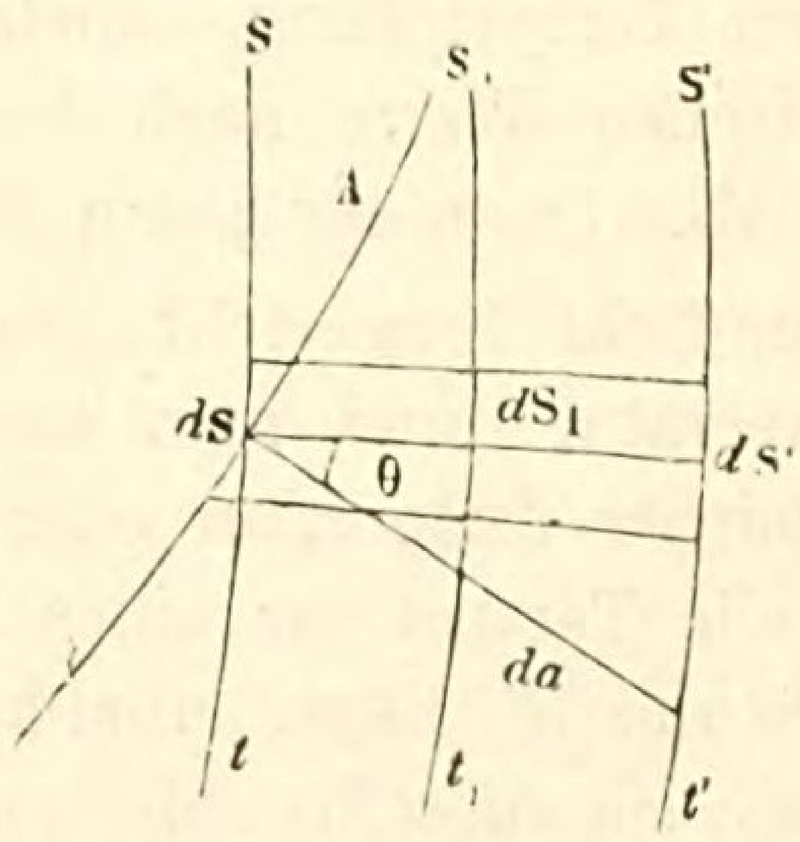


Fig. 14.

Elemente, so kann die Wärmeströmung zwischen zwei unendlich nahen entsprechenden Elementen ausgedrückt werden durch

$$dQ = -k dS \frac{dt}{dn} \cdot$$

Der Coefficient k ist der *Coefficient der Leitungsfähigkeit* des Mittels. Derselbe stellt die durch die Flächeneinheit zwischen zwei um die Längeneinheit von einander entfernten parallelen Ebenen, deren Temperaturdifferenz 1° beträgt, gehende Wärmeströmung dar.

Im vorliegenden Falle hat die Strömung durch die Flächeneinheit den Wert

$$Q = -k \frac{dt}{dn};$$

dieselbe ist der Ableitung des Potentials nach der Normale der entsprechenden Niveaufläche proportional.

Die Wärmeströmung durch ein Element dA einer beliebigen Fläche A, welches durch denselben Kanal begrenzt ist, ist die nämliche. Nennt man θ den Winkel, welchen dieses Element mit der Niveaufläche bildet und da den Teil der Normale des Elementes dA, welcher von den Flächen S und S' begrenzt wird, so erhält man

$$dQ = -k dA \cos\theta \frac{dt}{dn} = -k dA \cdot \frac{dt}{dn}\frac{dn}{da} = -k dA \frac{\partial t}{\partial a}.$$

Die Wärmeströmung durch ein Element einer beliebigen Fläche ist demnach der partiellen Ableitung der Temperatur des Mittels nach der Normale dieser Fläche proportional.

Sobald das Gleichgewicht hergestellt ist, muss die gesammte Wärmeströmung, die irgend einer geschlossenen, eine Wärmequelle nicht einschliessenden Fläche entspricht, Null sein. Sind u, v und w die Componenten der Strömung in einem Punkte P, und ist $dx dy dz$ ein Volumenelement um denselben Punkt, so ist die durch eine Grenzfläche $dy dz$ eintretende Wärmeströmung $u dy dz$; die durch die gegenüberliegende Fläche austretende Strömung ist $\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz$, der Unterschied $dx dy dz \frac{\partial u}{\partial x}$; die der ganzen Fläche entsprechende Strömung ist also

$$dx dy dz \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

da diese Strömung Null sein soll, folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\Delta t = 0.$$

Ferner ist klar, dass die Wirkung des Systems in grossen Entfernungen nicht merklich ist, und dass die von demselben hervorgerufene Temperatur t im Unendlichen Null ist.

Die Funktion t genügt also für jeden Punkt des Mittels und für die Grenzen denselben Bedingungen wie die Funktion V. Man sieht ferner, dass, wenn die Constante k der Einheit gleich ist, die numerischen Werte der elektrischen Kraftströmung und die der Wärmeströmung für die Zeiteinheit in jedem Punkte in beiden Aufgaben dieselben sind.

71. — Wir betrachten jetzt die entsprechende Aufgabe der Hydrodynamik. Wir nehmen an, dass der ursprünglich vom Dielektricum eingenommene Raum von einer incompressibeln reibungslosen Flüssigkeit ausgefüllt werde; wir nehmen ferner an, dass die Leiter durch poröse Flächen ersetzt sind, derart, dass die Flüssigkeit in jedem Punkte ihrer bezüglichen Oberflächen eine zu diesen normale Geschwindigkeit besitzt, welche dem ursprünglichen numerischen Werte der elektrischen Kraft in diesem Punkte gleich ist. Die Gesammtheit der Bahnen derjenigen Molecüle, welche zugleich das Element dS der Oberfläche eines Leiters durchsetzt haben, bildet einen

Flüssigkeitsfaden, der sich von derselben senkrecht entfernt und in jedem seiner Querschnitte dasselbe Quantum liefert. Da nirgends eine Anhäufung von Flüssigkeit eintritt, ist die in das Volumelement $dxdydz$ eintretende, in irgend einem Punkte P gemessene Strömung gleich der aus demselben austretenden; wenn man demnach mit u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten im Punkte P bezeichnet, kann diese Bedingung ausgedrückt werden durch die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Die Bewegung ist ausserdem im Unendlichen unmerklich; man sieht demnach, dass die Geschwindigkeit in jedem Punkte von einer Funktion der Coordinaten abhängt, die denselben Bedingungen wie das Potential oder die Temperatur genügt. Ueberall fallen also die Strömungslinien mit den entsprechenden Kraftlinien der elektrischen Aufgabe zusammen, und in jedem Punkte haben die elektrische Kraft und die Geschwindigkeit der Flüssigkeit denselben numerischen Wert.

Der eben ausgeführte Vergleich bietet grossen Nutzen; denn wenn es klar ist, dass die analytischen Schwierigkeiten in den drei Arten von Aufgaben dieselben sind, so ist ebenso einzusehen, dass gewisse Consequenzen in dem einen Ideengang leichter zu ziehen sind als in einem andern, und dass jedes in dem einen Falle erhaltene Resultat unmittelbar bei passender Uebertragung der Bezeichnungen auf die beiden andern angewandt werden kann. Man wird weiter mehrere Beispiele hierfür finden.

72. Elektrische Capacität. — Wir haben (69) *Capacität eines Leiters die Ladung* genannt, *die man ihm mitteilen muss, um ihn auf das Potential Eins zu bringen, wenn alle ihn umgebenden Leiter mit der Erde leitend verbunden sind.*

Aus dieser Definition folgt, dass die Capacität eines Leiters nicht blos von seiner Form, sondern auch von der Form und der Lage aller ihn umgebenden Leiter abhängt.

Wir bezeichnen diese Constante mit C. Wenn man unter Beibehaltung aller übrigen Bedingungen einem Leiter eine Ladung M giebt, so ist sein Potential nach dem Princip der Superposition der Gleichgewichtszustände

$$V=\frac{M}{C};$$

hieraus folgt

$$M=CV.$$

Die Aufgabe, die Capacität eines Leiters in einem gegebenen Augenblick zu bestimmen, besteht also darin, den Gleichgewichtszustand des Systems zu suchen, welches aus dem fraglichen Leiter und allen ihn umgebenden Leitern besteht, wobei die letzteren als mit der Erde verbunden vorausgesetzt sind; die Aufgabe fällt also mit der allgemeinen über das Gleichgewicht zusammen.

Das Wort *Capacität* ist wegen der Analogie aus der Wärmetheorie entlehnt; aber man muss sich wohl vor Augen halten, dass, während die Wärmecapacität eines Körpers nur von der Natur und dem Gewichte desselben abhängt, die elektrische Capacität eines Leiters weder von seiner Natur, noch von seinem Gewichte, sondern allein von seiner Form und von der Form und Lage aller benachbarten Leiter abhängig ist. Die elektrische Capacität ist demnach keineswegs wie die Wärmecapacität eine feste Constante für den betrachteten Körper.

73. Capacität einer Kugel. — Wir betrachten eine von allen andern Leitern unendlich entfernte Kugel; R sei ihr Radius, M ihre Ladung. Wegen der Symmetrie bildet diese Ladung auf der Oberfläche eine gleichförmige Schicht; dieselbe genügt ausserdem den Bedingungen des Gleichgewichts, denn ihre Wirkung auf jeden inneren Punkt ist Null (**42**) Das Potential ist also im ganzen inneren Raum constant, der Wert desselben im Mittelpunkte ist $\frac{M}{R}$; folglich ist

$$V = \frac{M}{R} \text{ oder } M = RV.$$

Die Capacität der Kugel ist demnach

$$C = R;$$

dieselbe ist dem Radius gleich.

Dieses Beispiel zeigt, dass die elektrostatische Capacität eine *lineare* Grösse ist.

74. Capacität eines Ellipsoids. — Wenn ein durch eine Ellipsoidfläche begrenzter Leiter mit einer elektrischen Schicht bedeckt ist, die ihrerseits durch eine zweite mit der ersten concentrische, ähnliche und ähnlich liegende ellipsoidische Fläche begrenzt ist, so ist die Wirkung der Schicht auf irgend einen inneren Punkt P Null.

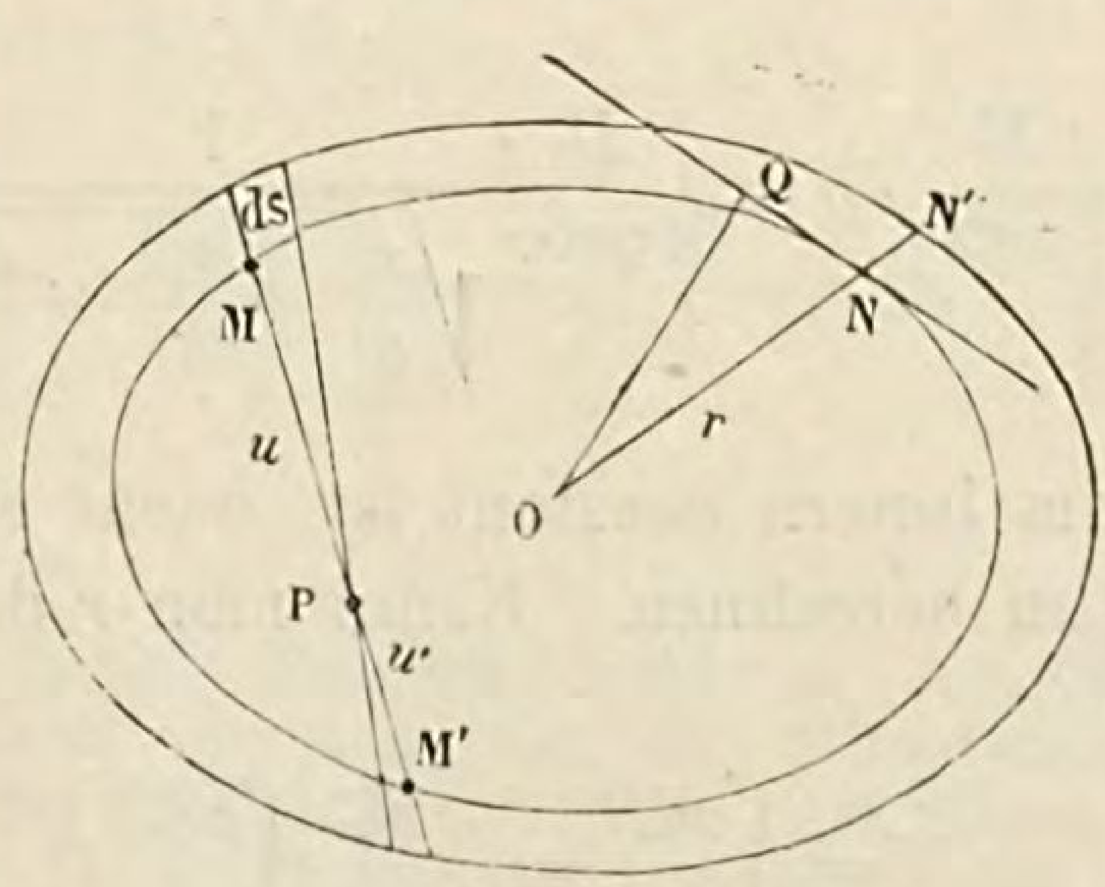


Fig. 15.

Denn setzen wir diese Schicht als sehr dünn voraus, und legen wir durch den Punkt P (Fig. 15) einen unendlich dünnen Kegel $d\omega$, der in M in der Entfernung u ein Flächenelement dS und in der Schicht ein Volumen-

element ausschneidet, dessen Dicke in Richtung des Radius vector du ist, so ist die Wirkung dieses Volumenelementes in P nach dem Radius vector gerichtet und hat den Wert

$$\frac{\rho u^2 d\omega \cdot du}{u^2} = \rho d\omega du,$$

wenn man die Dichte mit ρ bezeichnet.

In derselben Weise ist die Wirkung des correspondirenden in M' belegenen Elementes $\rho d\omega du'$. Da aber die Dicken du und du' gleich und die Kraftrichtungen genau entgegengesetzt sind, ist ihre Resultante Null; ebenso verhält es sich mit allen Elementenpaaren der Fläche, und die Wirkung der ganzen Schicht auf den Punkt P ist Null. Eine nach diesem Gesetze auf einem Ellipsoide verteilte elektrische Schicht ist demnach im Gleichgewicht und hat im Innern ein constantes Potential.

Es sei $(1 + \alpha)$ das Aehnlichkeitsverhältnis der beiden Flächen, die wir einander sehr nahe voraussetzen. Die Dicke der Schicht in einem Punkte N ist der Entfernung der Tangentialebenen in den Punkten N und N' proportional und gleich $p\alpha$, wenn man mit p das Lot OQ bezeichnet, welches vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte O auf die Tangentialebene in N gefällt werden kann; die Flächendichte σ hat den Wert

$$\sigma = \rho p \alpha.$$

Ist das Ellipsoid durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dargestellt, so ist die gesammte Elektricitätsmenge

$$M = \frac{4}{3}\pi abc[(1 + \alpha)^3 - 1]\rho = 4\pi abc\rho\alpha.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sigma = \frac{M}{4\pi abc} \cdot p = \frac{M}{4\pi abc} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Da das Potential im Innern constant ist, reicht es aus, den Wert desselben im Mittelpunkte zu berechnen. Nennt man r den Radius vector ON, so erhält man

$$V = \int \frac{\sigma dS}{r} = \frac{M}{4\pi abc} \int \frac{p dS}{r},$$

und die Capacität des Ellipsoides ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi abc} \int \frac{p dS}{r}.$$

75. — Für ein Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen ist die Capacität eine elliptische Funktion; dieselbe ist aber für ein Rotationsellipsoid leicht zu bestimmen.

Wir nehmen als Flächenelement dS die Zone an, die durch ein Element ds der Meridiancurve beschrieben ist, und setzen die Achse a als Rotationsachse voraus. Man erhält dann

$$dS = 2\pi y\,ds = \frac{2\pi y\,dx}{\left(\frac{dx}{ds}\right)} = \frac{2\pi y\,dx}{\frac{py}{b^2}} = \frac{2\pi b^2}{p}\,dx,$$

oder

$$p\,dS = 2\pi b^2 dx.$$

Diese Beziehung zeigt schon, dass Zonen gleicher Höhe gleiche Ladungen besitzen. Auf einem sehr langen Ellipsoid, welches eine doppelte Spitze bildet, ist also die Liniendichte constant*).

Hieraus ergiebt sich für die Capacität des Rotationsellipsoides

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi a b^2}\int \frac{p\,dS}{r} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ist das Rotationsellipsoid durch Drehung um die grosse Achse entstanden, so erhält man, wenn die Excentricität $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ mit e und die Capacität mit C_1 bezeichnet wird,

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{b^2 + e^2x^2}} = \frac{1}{2ae}\left\{ l_n \left[ex + \sqrt{b^2 + e^2x^2} \right] \right\}_{-a}^{+a}$$

$$= \frac{1}{2ae}\, l_n \frac{1+e}{1-e}.$$

Ist das Ellipsoid durch Drehung um die kleine Achse b entstanden, so ist die Capacität C_2 gegeben durch

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{+b} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2e^2}{b^2}y^2}} = \frac{1}{2ae}\left[\arcsin \frac{ey}{b} \right]_{-b}^{+b} = \frac{\arcsin e}{ae}.$$

*) Diese Bemerkung erklärt die *Spitzenwirkung*. Auf einem sehr langen doppelt zugespitzten Ellipsoid steht, wie man sieht, die Flächendichte im umgekehrten Verhältnisse zum Durchmesser und wächst stets in dem Masse, als man sich dem Ende nähert. Wäre die isolirende Kraft der Luft unendlich, so würde die Dichte und die Spannung, die dem Quadrat der Dichte proportional ist (**41**), ins Unendliche wachsen. In Wirklichkeit geht aber die Elektricität, wenn die Spannung bei gegebenem Luftdruck einen bestimmten Wert erreicht hat, vom Leiter auf die umgebenden Luftmassen über, und diese entweichen, sobald sie mit Elektricität geladen sind, in Richtung der Kraftlinien und rufen die als *elektrischer Wind* und *Spitzenentladung* bekannten Erscheinungen hervor.

Beide Formeln ergeben, wenn die Excentricität Null ist, d. h. wenn das Ellipsoid in eine Kugel übergeht,

$$C_1 = C_2 = a.$$

76. — Eine elliptische Platte kann als ein sehr abgeplattetes Ellipsoid angesehen werden. Man hat dann im Grenzfalle

$$\lim\left(\frac{p}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Die Dichte auf der Platte wird demnach ausgedrückt durch

$$\sigma = \frac{M}{4\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

und man sieht, dass die Linien gleicher Dichte concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen sind.

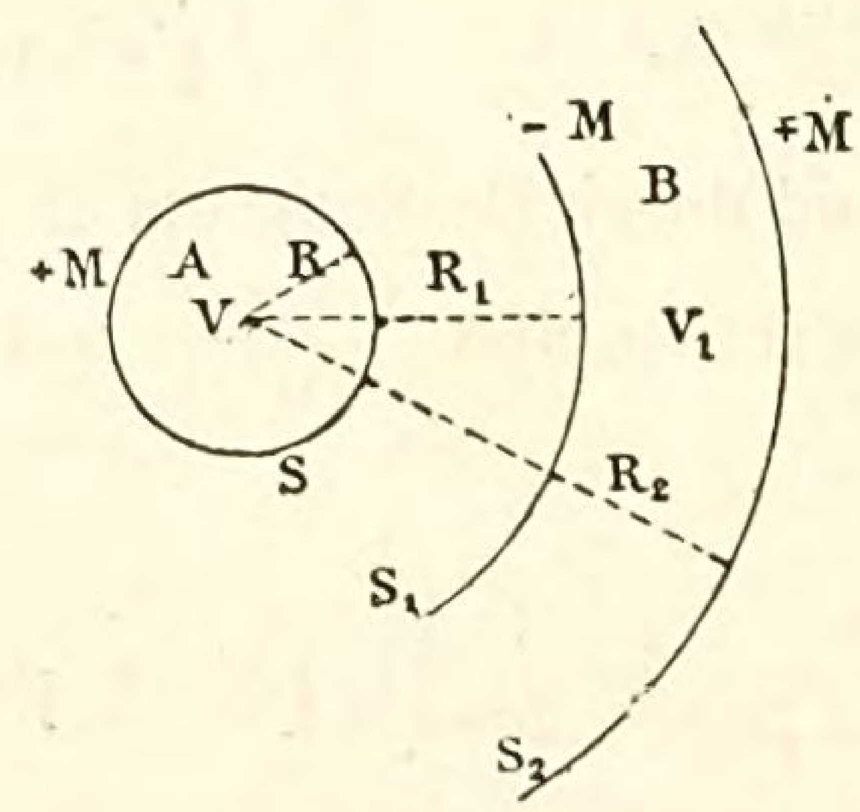


Fig. 16.

Für eine kreisförmige Platte erhält man einfach in der Entfernung r vom Mittelpunkte

$$\sigma = \frac{M}{4\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = \frac{M}{4\pi a\sqrt{a^2 - r^2}},$$

und die Capacität der Platte wird

$$C = \frac{2a}{\pi} = \frac{a}{1{,}571}.$$

77. Von einer concentrischen Schale eingehüllte Kugel. — Wir nehmen jetzt an, eine leitende Kugel sei von zwei mit ihr concentrischen Kugelflächen umhüllt.

Es sei R der Radius der Kugel A (Fig. 16), R_1 und R_2 seien die Radien der concentrischen Umhüllung B, die wir zunächst als isolirt voraussetzen.

Wird der Kugel A eine elektrische Ladung M zugeführt, so nimmt B (58) eine Ladung $-M$ auf der inneren Fläche S_1 an und eine Ladung $+M$ auf ihrer Aussenfläche S_2. Das Potential im Mittelpunkte der Kugel erhält, wie man sieht, den Wert

$$V = \frac{M}{R} - \frac{M}{R_1} + \frac{M}{R_2} = M\left[\frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right].$$

Die beiden Schichten $+M$ auf der Kugel A und $-M$ auf der Fläche S_1 haben ausserhalb das Potential Null. Demnach hängt das Potential V der Umhüllung B nur von der äusseren Schicht $+M$ ab und ist dasselbe wie im Mittelpunkte der Kugel S_2, wenn diese homogen wäre, woraus sich ergiebt

$$V_1 = \frac{M}{R_2}.$$

Steht die Hülle B mit der Erde in leitender Verbindung, so wird ihr Potential Null, die äussere Ladung $+M$ verschwindet und die Capacität des Systems wird bestimmt durch

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} = \frac{e}{RR_1},$$

wenn man e die Dicke des Dielektricums nennt.

Ist die Dicke des Dielektricums klein gegen den Radius der Kugel, so kann man den Unterschied zwischen R_1 und R vernachlässigen und $\frac{R^2}{e}$ statt $\frac{RR_1}{e}$ für die Capacität setzen. Drückt man diese Capacität als Funktion des Kugelmantels S aus, so erhält man

$$C = \frac{R^2}{e} = \frac{4\pi R^2}{4\pi e} = \frac{S}{4\pi e}.$$

Die Ladung, die erforderlich ist, um die Kugel auf das Potential V zu bringen, wird demnach

$$M = \frac{SV}{4\pi e}.$$

Man sieht, dass die concentrische Umhüllung unter allen Umständen, da sie die Capacität der Kugel vergrössert, die Wirkung hat, das zu einer gegebenen Ladung gehörige Potential zu verkleinern, oder umgekehrt die zu einem gegebenen Potential gehörige Ladung zu vergrössern.

78. Condensatoren. — Das Vorhandensein der Umhüllung gestattet also auf der Kugel A bei demselben Potential eine grössere Elektricitätsmenge anzuhäufen oder zu condensiren, als wenn diese Umhüllung nicht

vorhanden wäre. Dieselbe Wirkung würde auch auf jedem beliebigen Leiter A durch die Gegenwart eines zweiten Leiters B, der mit der Erde in Verbindung steht, oder zwar isolirt ist, aber die Ladung Null besitzt, hervorgerufen, da dieser Leiter den Wert des Potentials von A für eine gegebene Ladung verkleinert. Man nennt *Condensator* eine Verbindung von Leitern, die durch ein Dielektricum getrennt und so aufgestellt sind, dass dadurch die Capacität des einen von ihnen in einem merklichen Verhältnisse vergrössert wird. Im vorliegenden Falle bilden die Kugel und ihre Umhüllung das, was man die *Armaturen* oder *Belegungen* des Condensators nennt, wobei die Kugel A als *Collector*, die Umhüllung B als *Condensator* bezeichnet wird.

Die *condensirende Kraft* eines Condensators ist das Verhältnis, welches zwischen der Ladung des Collectors, so lange derselbe Teil eines Condensationsapparates ist, und der Ladung besteht, die ihn auf dasselbe Potential bringen würde, wenn er von jedem Leiter fern wäre; es ist dies also das Verhältnis der Capacitäten in diesen beiden Lagen. In einem kugelförmigen Condensator mit concentrischen Flächen hat die condensirende Kraft den Wert

$$\frac{C}{R} = \frac{R}{e}.$$

Die condensirende Kraft bietet übrigens in den Anwendungen kein Interesse; die Grösse, auf deren Kenntnis es allein ankommt, ist die Capacität eines Condensators.

79. Leydener Flasche. — Man nennt *Leydener Flasche* ein Glasgefäss, dessen innere und äussere Oberfläche mit einem Metallblatte belegt ist, wobei das Glas in der Nähe der Oeffnung unbelegt gelassen ist, damit die Metallbelegungen nicht mit einander in leitende Berührung kommen. Ein leitender Stab, der durch den Hals der Flasche geht, stellt die Verbindung mit der inneren Belegung her.

Die Verbindung dieser beiden leitenden Flächen und der dielektrischen Füllmasse bildet einen fast vollständig geschlossenen Condensator.

Die vorher behandelte Aufgabe entspricht dem Falle einer kugelförmigen Flasche von constanter Dicke. Die kleine Calotte, die man auf der äusseren Fläche fortlassen muss, um die Verbindung mit dem Innenraume zu ermöglichen, übt nur einen unbedeutenden Einfluss aus; die Capacität wird demnach durch $\frac{S}{4\pi e}$ und die Ladung durch die Formel

$$M = \frac{SV}{4\pi e}$$

dargestellt. Man kann leicht sehen, dass diese Formel in derselben Weise auf eine Leydener Flasche von beliebiger Form und von constanter, sehr geringer Dicke angewendet werden kann, deren Armaturen die ganze Fläche von innen und aussen bedecken.

Es seien S_1 und S_2 (Fig. 17) die gegenüberliegenden Flächen der beiden Armaturen, V_1 und V_2 deren Potentiale. Da die äussere Armatur die innere vollständig einschliesst, sind die elektrischen Massen auf diesen beiden Flächen entgegengesetzt gleich (**57**). Für einen Punkt P einer dieser Flächen hat die Kraft den Wert

$$F = -\frac{dV}{dn} = 4\pi\sigma,$$

wenn man σ die Dichte der inneren Schicht in A nennt.

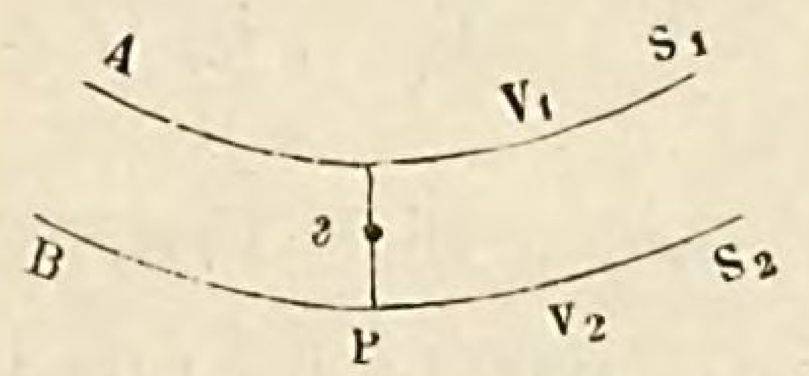


Fig. 17.

Da die Dicke e sehr klein angenommen ist, ist die Ableitung $\frac{dV}{dn}$ merklich gleich $\frac{V_2 - V_1}{e}$, woraus man erhält (**36**)

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{V_1 - V_2}{e}.$$

Die Ladung eines Flächenelementes dS ist σdS und die Gesammtladung

$$M = \int \sigma dS = \frac{V_1 - V_2}{4\pi}\int\frac{dS}{e}.$$

Ist die Dicke e constant, so folgt einfach, indem man V für $V_1 - V_2$ setzt,

$$M = \frac{V_1 - V_2}{4\pi} \cdot \frac{S}{e} = \frac{VS}{4\pi e}.$$

Die Capacität der Flasche, d. h. die Ladung, die einer der Einheit gleichen Potentialdifferenz zwischen den Armaturen entspricht, wird demnach ebenso ausgedrückt, wie bei kugelförmigen Condensatoren, nämlich durch

$$C = \frac{S}{4\pi e}.$$

Die Ladung hängt nur von der Differenz der Potentiale ab, nicht von deren absoluten Werten; dieses Resultat war leicht vorauszusehen, da die Kraft selbst nur von dieser Differenz abhängt.

80. Coaxiale Kreiscylinder. — Zwei coaxiale Cylinder von kreisförmiger Grundfläche mit den Radien R_1 und R_2 mögen die Potentiale V_1 und V_2 besitzen. Wir fassen den unendlich kleinen Winkel $d\omega$ ins Auge, der von zwei durch die Achse gehenden Ebenen gebildet wird, und schneiden denselben durch zwei Ebenen, die zur Achse senkrecht stehen,

deren eine wir zur Ebene der Figur wählen (Fig. 18). Da alle Kraftlinien wegen der Symmetrie zur Achse normal stehen, ist der so begrenzte Raum eine Kraftröhre; die Flächenstücke, welche diese Kraftröhre auf den Cylindern ausschneidet, stehen zu einander in demselben Verhältnisse wie die Bogen dS_1 und dS_2. Sind demnach F_1 und F_2 die Werte der Kraft in den Entfernungen R_1 und R_2, so erhält man

$$F_1 dS_1 = F_2 dS_2.$$

Da andererseits

$$d\omega = \frac{dS_1}{R_1} = \frac{dS_2}{R_2},$$

resultirt

$$F_1 R_1 d\omega = F_2 R_2 d\omega, \quad \text{oder} \quad F_1 R_1 = F_2 R_2 = A.$$

Die Kraft in irgend einem Punkte des Dielektricums ist also der Entfernung von der Achse umgekehrt proportional.

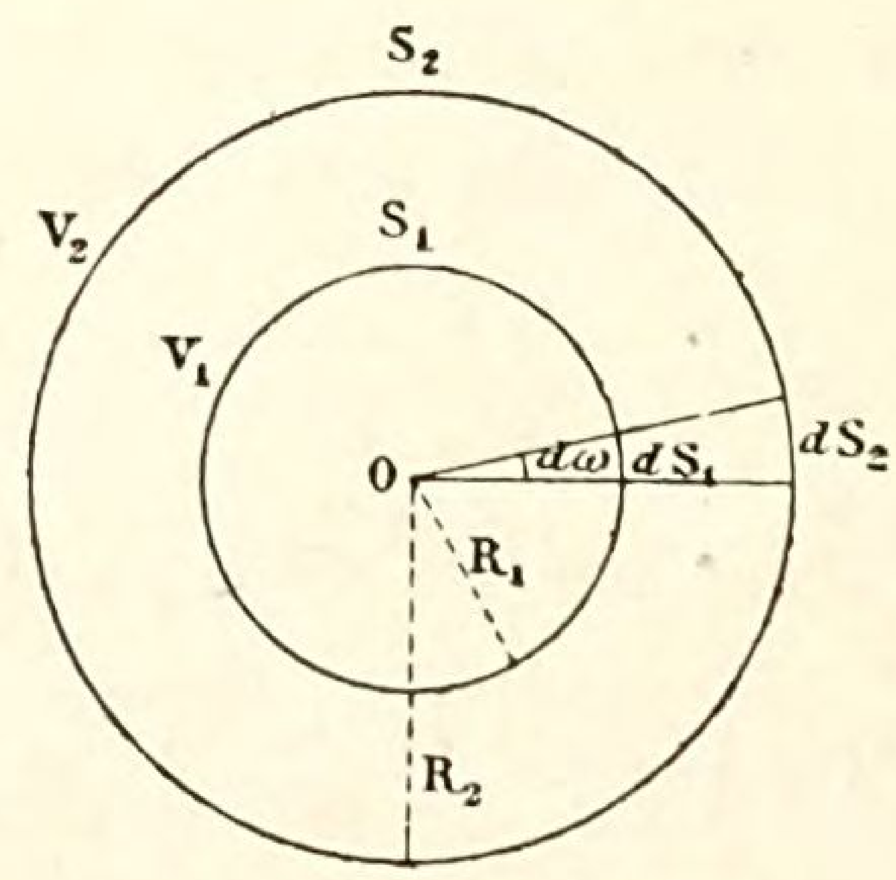


Fig. 18.

Bezeichnet man mit F die Kraft und mit V das Potential in irgend einer Entfernung R, so erhält man demnach

$$F = \frac{A}{R} = -\frac{dV}{dR};$$

und folglich

$$V = -A\int\frac{dR}{R}.$$

Nimmt man dieses Integral über den zwischen den Flächen S_1 und S_2 enthaltenen Raum, so ergiebt sich

$$V_2 - V_1 = -A\, l_n R_2 + A\, l_n R_1 = -A\, l_n \frac{R_2}{R_1}.$$

Hieraus erhält man für die Constante A

$$A = \frac{V_1 - V_2}{l_n \frac{R_2}{R_1}}.$$

Andererseits ist die elektrische Dichte an der inneren Oberfläche des Cylinders

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} F = \frac{A}{4\pi R_1} = \frac{1}{4\pi R_1} \cdot \frac{V_1 - V_2}{l_n \frac{R_2}{R_1}}.$$

Ist S die Grösse der Oberfläche zwischen den beiden Normalschnitten, so ist die Elektricitätsmenge M, die über diese Fläche ausgebreitet ist,

$$M = S \cdot \sigma = \frac{(V_1 - V_2) S}{4\pi R_1 \, l_n \frac{R_2}{R_1}}.$$

Ist L die Länge des so begrenzten Cylinders, so ist

$$S = 2\pi R_1 L,$$

woraus sich schliesslich ergiebt

$$M = \frac{L}{2 \, l_n \frac{R_2}{R_1}} (V_1 - V_2).$$

Die Capacität eines cylindrischen Leiters ist demnach für die Längeneinheit

$$C = \frac{1}{2 \, l_n \frac{R_2}{R_1}}.$$

Diese Aufgabe ist für die Praxis sehr wichtig, weil sie genau den Fall der Telegraphenkabel wiedergiebt, die aus Leitern bestehen, die von einer isolirenden Schicht umgeben sind, die ihrerseits mit einer metallischen Armatur versehen ist.

81. Condensatorplatten. — Wir behandeln jetzt zwei Leiter, die von parallelen Ebenen S_1 und S_2 begrenzt sind, welche sich in der Entfernung e von einander befinden und die Potentiale V_1 und V_2 besitzen (Fig. 19).

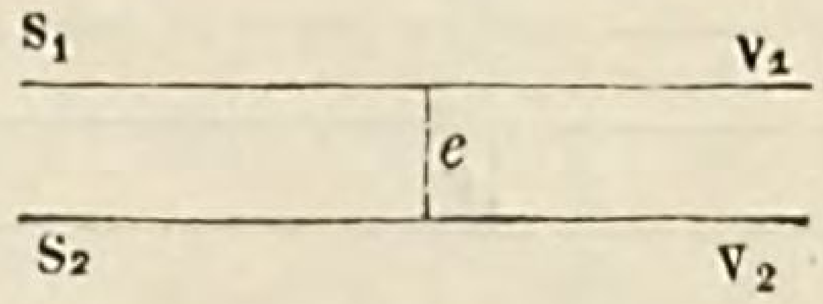


Fig. 19.

In einer gegen die Dicke des Dielektricums grossen Entfernung von dem Rande des Leiters sind die Kraftlinien unter einander parallele Gerade, welche zu den betrachteten Flächen senkrecht stehen.

Das elektrische Feld zwischen den beiden Ebenen ist demnach gleichförmig; die Kraft wird ausgedrückt durch

$$F = \frac{V_1 - V_2}{e}$$

und die Dichte auf der Fläche S_1 ist

$$\sigma = \frac{F}{4\pi} = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

Der elektrostatische Druck (**40**), d. h. die Kraft, die auf die Einheit der Fläche wirkt, ist

$$p = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e}\right)^2;$$

dieselbe ist dem Quadrat der Potentialdifferenz direkt und dem Quadrat der Dicke des Dielektricums umgekehrt proportional.

Ist ein Teil der Fläche S_1 von der Grösse a, der sich in grosser Entfernung vom Rande der Platte befindet, allein beweglich und behält derselbe seine Verbindung mit der Gesammtfläche bei, so dass das Potential immer dasselbe bleibt und die Dichte sich nicht ändert, so ist die Kraft P, die nötig ist, um der elektrischen Anziehung Widerstand zu leisten und den beweglichen Teil in seiner Ebene festzuhalten,

$$P = pa = \frac{a}{8\pi} \cdot \left(\frac{V_1 - V_2}{e}\right)^2.$$

W. Thomson hat hiervon bei der Construktion seiner absoluten Elektrometer Anwendung gemacht; er nennt *Schutzring* (guard-plate) den Teil der Fläche S_1, der den beweglichen Teil umgiebt, um auf demselben eine constante Dichte aufrecht zu erhalten.

82. — Es sei jetzt eine Platte A vom Potential V_1 (Fig. 20) zwischen

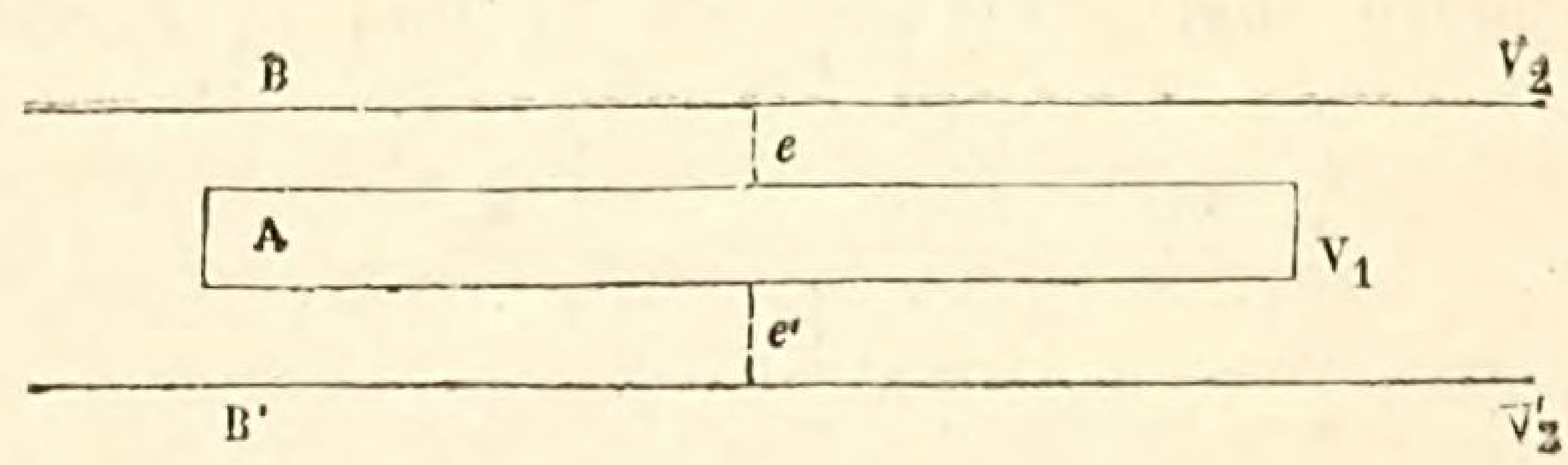


Fig. 20.

zwei Leitern B und B' aufgestellt, die dort durch Flächen begrenzt sind, die denen der Platte parallel sind, die eine vom Potential V_2 in der Entfernung e, die andere vom Potential V_2' in der Entfernung e'.

Die Dichte auf dem Leiter A, in grosser Entfernung von dessen Rande, ist $\frac{V_1 - V_2}{4\pi e}$ für die obere Fläche und $\frac{V_1 - V'_2}{4\pi e'}$ für die untere Fläche, so dass die der Flächeneinheit entsprechende Ladung der Platte ist

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e} + \frac{V_1 - V'_2}{e'}\right).$$

Vernachlässigt man die Aenderung der Dichte am Rande, so ist demnach die Gesammtladung der Platte von der Fläche S

$$M = \frac{S}{4\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e} + \frac{V_1 - V'_2}{e'}\right).$$

Sind die Potentiale V_2 und V'_2 gleich, so erhält man einfach

$$M = \frac{(V_1 - V_2)S}{4\pi}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e'}\right),$$

so dass die Capacität dieses Leiters wird

$$C = \frac{S}{4\pi}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e'}\right),$$

ein Wert, welcher dem bereits für geschlossene Leiter (**79**) erhaltenen conform ist.

83. Capacität eines Systems von Leitern. — Wir fassen verschiedene Leiter ins Auge, deren elektrische Capacitäten, wenn jeder für sich allein im Raume existirt, C, C', C'' . . . sind, und ordnen sie so an, dass ihre gegenseitige Influenz Null ist. Sind alle diese Leiter bis zu demselben Potential elektrisirt, so wird, wenn man sie durch widerstandslose Leiter verbindet, deren Capacität vernachlässigt werden kann, z. B. durch dünne Drähte, eine Auswechselung von Elektricität zwischen ihnen nicht stattfinden, da sie bereits auf demselben Potential sind, und auch das Potential wird sich nicht ändern.

Sie bilden dann einen einzigen Leiter, dessen Ladung gleich der Summe der ursprünglichen Einzelladungen ist. Die elektrische Capacität C_1 des Systems ist demnach gleich der Summe der Capacitäten der getrennten Leiter.

Nehmen wir aber nunmehr an, dass die ursprünglichen Potentiale der Leiter verschieden sind, nämlich V, V', V'' . . ., so sind die entsprechenden Ladungen

$$M = VC,\quad M' = V'C',\quad M'' = V''C'' \ldots$$

Sind alle Ladungen auf dem durch die Verbindung entstandenen einzigen Leiter regelmässig verteilt, so rufen sie auf demselben ein Potential V_1 hervor, welches durch die Gleichung gegeben ist

$$V_1 C_1 = VC + V'C' + V''C'' + \cdots$$

oder

$$V_1 = \frac{VC + V'C' + V''C'' + \cdots}{C + C' + C'' + \cdots}.$$

Von diesem Ausdruck wird in den Experimentaluntersuchungen häufig Gebrauch gemacht. Man erkennt leicht die Analogie, die derselbe mit der Beziehung bietet, welcher die Temperaturen und die Wärmecapacitäten verbindet, wenn man mehrere Körper von verschiedener Temperatur mit einander mischt.

84. Elektrische Batterie. — So nennt man ein aus mehreren mit einander verbundenen Leydener Flaschen oder sonstigen Condensatoren bestehendes System.

Sind diese Condensatoren im Wesentlichen geschlossen wie die gewöhnlichen Leydener Flaschen, so ist die äussere Wirkung jeder einzelnen unmerklich, und man kann sie einander nähern, ohne dass eine gegenseitige Influenz zu befürchten wäre.

Die Verbindung kann auf zwei Arten hergestellt sein:

1. Man verbindet einerseits alle inneren Belegungen mit einander, andererseits alle äusseren; man sagt dann, die Batterie ist auf *Quantität* gekuppelt. Das Ganze stellt einen Condensator dar, dessen Capacität gleich der Summe der Capacitäten der einzelnen Flaschen ist. Enthält die Batterie p gleiche Flaschen von der Capacität C, so ist die Capacität C_1 der Batterie

$$C_1 = pC.$$

2. Man isolirt alle Flaschen und verbindet die äussere Belegung der einen mit der inneren der folgenden; man ladet dann die innere Belegung der ersten Flasche auf das Potential V_1, während die äussere Belegung der letzten das Potential V_2 besitzt und die zwischenliegenden Flaschen isolirt bleiben; es ist dies die Verbindung in *Reihe* oder die *Cascadenbatterie*.

85. Ladung in Cascaden. — Die erste Flasche erhält auf ihrer inneren Belegung eine Ladung m und nimmt ein Potential V_1 an; es entsteht auf der der äusseren Belegung gegenüberliegenden Fläche des Dielektricums eine entgegengesetzt gleiche Ladung $-m$. Der aus der isolirten äusseren Belegung der ersten Flasche und der inneren Belegung der zweiten bestehende Leiter nimmt die Ladung $+m$ auf, die sich auf diesem Leiter so verteilt, wie wenn die inneren Ladungen nicht vorhanden wären, und ruft dort ein Potential V' hervor. Der grösste Teil dieser Ladung fliesst auf die innere Belegung der zweiten Flasche, deren Capacität gegen diejenige des Restes des betrachteten Leiters beträchtlich ist. Setzt man diese Schlussfolge fort, so sieht man, dass die inneren Belegungen aller Flaschen beständig abnehmende Ladungen erhalten, dass aber die Abnahme sehr langsam erfolgt, und man kann alle Flaschen als gleichmässig mit der inneren Ladung $+m$ geladen betrachten, für welche die einander folgenden Potentiale V_1, V', V'' ... V_2 sind.

Enthält die Batterie p Flaschen, so kann man demnach setzen

$$m = C(V_1 - V') = C'(V' - V'') = \cdots C^{(p-1)}(V^{(p-1)} - V_2),$$

oder

$$\frac{m}{C} = V_1 - V',$$

$$\frac{m}{C'} = V' - V'',$$

$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{m}{C^{(p-1)}} = V^{(p-1)} - V_2.$$

Addirt man diese Gleichungen Glied für Glied, so ergiebt sich

$$m\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} \cdots\right) = V_1 - V_2.$$

So ist die Ladung der ersten Flasche des Systems, welche allein direkt eine elektrische Ladung empfängt,

$$m = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} \cdots}.$$

Man erhält demnach für die Capacität C_1 der Batterie

$$C_1 = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \cdots}$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} + \cdots$$

Sind die p Flaschen identisch, so ist die Capacität der Batterie p mal so klein geworden als die jeder einzelnen Flasche.

Diese Anordnung erscheint fehlerhaft, da sie ja die Wirkung hat, die Capacität der Batterie bedeutend zu verkleinern; in der That bietet sie aber für gewisse Versuche schätzenswerthe Vorteile. Die Leydener Flaschen können nur eine begrenzte Potentialdifferenz aushalten; wird diese überschritten, so erfolgt die Entladung zwischen den Belegungen der Glasoberfläche entlang oder häufig auch durch das Glas hindurch, welches dabei vom Funken durchschlagen wird. Mit Hülfe einer Cascadenbatterie kann man die gesammte Potentialdifferenz staffelförmig auf die auf einander folgenden Flaschen verteilen.

Derartig ist beispielsweise die für die gewöhnlichen Holtz'schen Maschinen gewählte Anordnung, wo man die Capacität der Leiter dadurch vergrössert, dass man jeden derselben mit der inneren Belegung einer Leydener Flasche verbindet; aber man sorgt dafür, diese Flaschen in Cascade zu verbinden, um das Maximum der Potentialdifferenz und dadurch das Maximum der Funkenlänge zu erhalten, welche das Spiel der Maschine gestattet.

Hat man eine grosse Anzahl von Flaschen zur Verfügung, so kann man aus denselben auch mehrere auf Quantität gekoppelte Batterien bilden, die man dann zu einer Cascade vereinigt. Man nutzt so die Potentialdifferenz, die eine Maschine liefern kann, vollständig aus und erhält das Maximum der Wirkung mit der kleinsten Aufwendung von Elektricität.

86. Allgemeine Aufgabe über die gegenseitige Influenz zweier isolirter Leiter. — Methode von Murphy. — Um die Elektricitätsverteilung auf zwei isolirten Leitern A und B, die mit den Gesammtmassen M_a und M_b geladen sind und ausschliesslich der gegenseitigen Influenz ausgesetzt sind, zu bestimmen, genügt es für jeden Körper zu kennen:

1. die Capacität und die Verteilung auf der Oberfläche, wenn derselbe isolirt und jedem äusseren Einflusse entzogen ist;

2. die Verteilung der inducirten Elektricität auf der Oberfläche, wenn derselbe mit der Erde leitend verbunden und der Influenz seitens einer in irgend einem äusseren Punkte befindlichen elektrischen Masse ausgesetzt ist.

Es sei m die Capacität des Leiters A allein, d. h. die Ladung, die ihm das Potential Eins giebt, wenn er sich allein im Raume befindet. Wir denken uns nun diese Masse, deren Verteilung bekannt sei, fest und bringen den mit der Erde verbundenen Leiter B in die gewünschte Stellung. Dieser wird das Potential Null besitzen und sich mit einer bekannten Masse $-m'$ negativer Elektricität laden.

Wir denken uns ebenso die Masse $-m'$ auf B fest. Isoliren wir jetzt diesen Leiter und setzen wir den ersten mit der Erde in Verbindung, so nimmt dieser eine Masse m_1 auf mit dem Potential Null.

Fixirt man von Neuem die Masse $+m_1$ auf A, so erhält man auf B eine inducirte Schicht $-m''$ etc.

Fährt man so fort, so erhält man nach einander auf den beiden Leitern die Massen $m, m_1, m_2 \ldots$ für den ersten, und $-m', -m'', -m''' \ldots$ für den zweiten, wobei in jeder Reihe die aufeinanderfolgenden Grössen sich der Null ziemlich schnell nähern.

Die Uebereinanderlagerung aller Massen $m, m_1, m_2 \ldots$ auf A und aller Massen $-m', -m'', -m''' \ldots$ auf B, giebt einen Gleichgewichtszustand mit einem Potential Null auf B und einem Potential Eins auf A. Denn die aufeinanderfolgenden Lagen m und $-m'$, m_1 und $-m'' \ldots$, je zwei für sich betrachtet, geben auf B das Potential Null; die Lagen $-m'$ und m_1, $-m''$ und m_2 geben ebenso auf A das Potential Null. Man hat also nur noch auf dem ersten Leiter die Masse m zu berücksichtigen, welche ein Potential Eins hervorruft.

Setzt man

$$C_a = m + m_1 + m_2 + \cdots$$

$$C'_a = m' + m'' + m''' + \cdots$$

so sieht man, dass C_a die Capacität des isolirten Leiters A in Gegenwart des mit der Erde verbundenen Leiters B und $-C'_a$ den Coefficienten der auf B inducirten Elektricität darstellt (**69**).

Multipliciren wir diese beiden Grössen mit V_a, so entsprechen die bez. Ladungen $C_a V_a$ und $-C'_a V_a$ einem Gleichgewichtszustande mit einem Potential Null auf B und einem solchen V_a auf A.

Vertauscht man die Rollen der Leiter, so erhält man ebenso die Massen $C_b V_b$ auf B und $-C'_b V_b$ auf A, die einem neuen Gleichgewichtszustande mit dem Potentiale Null auf A und einem solchen gleich V_b auf B entsprechen. Die Uebereinanderlagerung dieser beiden Gleichgewichtszustände liefert einen neuen Gleichgewichtszustand mit der Summe der Potentiale auf jedem Leiter, d. h. das Potential V_a auf A und V_b auf B. Die Gesammtladungen M_a und M_b der beiden Leiter sind dann

$$M_a = C_a V_a - C'_b V_b.$$

$$M_b = C_b V_b - C'_a V_a.$$

Diese Gleichungen ermöglichen es, die Gesammtladungen der beiden Leiter zu berechnen, wenn man die Potentiale kennt.

Man kann aus denselben auch die Potentiale als Funktion der Massen ableiten; man erhält dann

$$V_a = \frac{C_b M_a + C'_b M_b}{C_a C_b - C'_a C'_b},$$

$$V_b = \frac{C_a M_b + C'_a M_a}{C_a C_b - C'_a C'_b}.$$

87. Gegenseitige Einwirkung zweier elektrischer Leiter. — Mit Hilfe der oben besprochenen Methode kann man die Verteilung der Elektricität auf den beiden Leitern bestimmen, da die schliessliche Dichte in jedem Punkte die Summe der zu den verschiedenen über einander gelagerten Schichten gehörigen Dichten ist, und da man nach Voraussetzung das Verteilungsgesetz für jede derselben kennt. Man hat demnach alle nötigen Elemente zur Berechnung der Wirkung, die zwischen den beiden Körpern ausgeübt wird; die Aufgabe bietet nur rechnerische Schwierigkeiten.

Die Kraft setzt sich aus der Wirkung einer jeden der beiden Schichten $C_a V_a$ und $-C'_b V_b$ des Körpers A auf die beiden Schichten $C_b V_b$ und $-C'_a V_a$ des Körpers B zusammen. Da die Potentiale positiv angenommen sind, besteht die Wirkung von $C_a V_a$ aus zwei Teilen, einem repulsiven, welcher dem Produkte der beiden Potentiale $V_a V_b$ proportional ist, und einem anziehenden, der V_a^2 proportional ist.

Die Wirkung von $- C'_b V_b$ besteht ebenfalls aus zwei Teilen, einem anziehenden, welcher V_b^2 proportional ist, und einem abstossenden, proportional dem Produkte $V_a V_b$.

Bezeichnet man mit a, b und c von der Form und der gegenseitigen Entfernung der Körper abhängige Coefficienten, so wird die gegenseitige Wirkung R, als Abstossungswirkung betrachtet, durch einen Ausdruck von der folgenden Form dargestellt

$$R = 2c V_a V_b - a V_a^2 - b V_b^2.$$

Sind die Leiter A und B gleichgeformt und symmetrisch angeordnet, so sind die Coefficienten a und b gleich und die Formel geht über in

$$R = 2c V_a V_b - a \left(V_a^2 + V_b^2 \right).$$

Wir haben vorausgesetzt, dass sich die Wirkungen der beiden Körper zu einer einzigen Resultante zusammensetzen. Verhielte es sich nicht so, so könnte dieselbe Schlussweise auf die beiden Resultanten angewendet werden, durch welche man die Gesammtheit der Kräfte ersetzen kann.

In Wirklichkeit sind die Rechnungen, welche diese Methode zur Bestimmung der Coefficienten C_a, C_b, C'_a, C'_b sowie der resultirenden Kraft R erfordert, äusserst schwierig, selbst in den einfachsten Fällen. Wir werden später die Anwendung besprechen, die Sir W. Thomson von derselben gemacht hat zur Berechnung der gegenseitigen Influenz zweier Kugeln.

5. Capitel.

Arbeit der elektrischen Kräfte.

88. Elektrische Energie. — Setzt man verschiedene elektrisirte Leiter mit der Erde in Verbindung, so geht das System von selbst in den neutralen Zustand über, indem es dabei eine unbedingt positive Arbeit leistet. Jedes System von elektrisirten Leitern besitzt demnach eine dieser Arbeit entsprechende disponible Energie; es ist dies eine *potentielle* Energie, die man einfach *elektrische Energie* nennen kann.

Die Elektrisirung eines Systems erfordert die Aufwendung einer Arbeitsmenge, welche der potentiellen Energie gleich ist, die dasselbe in diesem neuen Zustande erlangen soll.

Stellt man eine Verbindung zwischen zwei Leitern her, so erfolgt im Allgemeinen eine Aenderung in der Verteilung ihrer elektrischen Massen, und diese Aenderung entspricht einer positiven Arbeit. Die elektrische Energie eines Leitersystems ist demnach gleich oder grösser als die des Systems, die man erhalten würde, wenn man irgend welche Verbindungen zwischen den Leitern herstellt.

Enthält das System einen elektrisirten Isolator, so kann man die verschiedenen elektrischen Massen, mit denen der Isolator geladen ist, als zu unendlich kleinen Leitern gehörig auffassen. Verbindet man alle diese Massen unter einander, so wird die Energie kleiner. Die Energie eines Systems von Körpern, deren jeder eine bestimmte Ladung besitzt, ist demnach ein Minimum, wenn sämmtliche Körper des Systems Leiter sind.

Man kann die potentielle Energie eines Systems auswerten, indem man entweder die bei der Elektrisirung aufgewendete oder die bei der Entladung gelieferte Arbeit misst.

89. Energie eines einzelnen Leiters. — Wir betrachten zunächst einen einzelnen Leiter von der Capacität C und nehmen an, dass man ihm bereits eine Ladung M, die ihn auf das Potential V bringt, mitgeteilt hat. Um die Ladung um dM zu vergrössern, muss man aus dem Unendlichen oder

von der Erdoberfläche auf diesen Leiter eine Elektricitätsmenge dM überführen, und die hierbei aufzuwendende Arbeit ist VdM.

Der Zuwachs dW der Energie des Leiters ist demnach

$$dW = VdM = \frac{MdM}{C}.$$

Aendert sich die elektrische Masse von M_0 auf M_1, so ergiebt sich der Energiezuwachs durch Integration zu

$$W_1 - W_0 = \frac{1}{2C}(M_1^2 - M_0^2).$$

Da die Energie mit der Ladung verschwindet, so sieht man, dass die Energie, welche der Ladung M entspricht, ist

$$W = \frac{M^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}MV.$$

Die Energie eines einzelnen Leiters ist dem Quadrat der Ladung oder dem Quadrat des Potentials oder dem Produkte aus Potential und Ladung proportional.

90. Energie eines Systems von Leitern. — Irgend eine Anzahl von Leitern $A_1, A_2, A_3 \ldots$ möge die Ladungen $M_1, M_2, M_3 \ldots$ zu den Potentialen $V_1, V_2, V_3 \ldots$ besitzen.

Multiplicirt man die Dichte in jedem Punkte mit irgend einer Zahl x, so erhält man einen neuen Gleichgewichtszustand, in welchem die Gesammtladungen und Potentiale mit demselben Faktor x multiplicirt sind. Man hat demnach die Ladung xM_1 auf A_1 mit dem Potential xV_1, xM_2 mit dem Potential xV_2 auf A_2 etc.

Lässt man x um dx wachsen, so werden die Massen und die Potentiale mit $x + dx$ multiplicirt, und der dadurch entstehende Zuwachs der Ladung auf dem Leiter A_1 ist $M_1 dx$. Die entsprechende Arbeit liegt zwischen $M_1 dx\, xV_1$ und $M_1 dx(x + dx)V_1$; dieselbe ist demnach bis auf Grössen zweiter Ordnung gleich $M_1 V_1 x dx$. Ebenso verhält es sich mit den andern Leitern, so dass die Energieänderung des Systems wird

$$dW = (M_1 V_1 + M_2 V_2 + \cdots) x dx = x dx \Sigma MV.$$

Zwischen zwei Werten x_0 und x_1 ist der Energiezuwachs

$$W_1 - W_0 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} \sum MV.$$

Setzt man $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$, d. h. nimmt man an, dass man vom neutralen Zustande ausgegangen ist, um zu dem von Anfang an betrachteten Zustande zu gelangen, so erhält man einfach

$$W = \frac{1}{2}(M_1 V_1 + M_2 V_2 + \cdots) = \frac{1}{2} \sum MV.$$

Hieraus folgt: *Die Energie eines Leitersystems ist gleich der halben Summe der Produkte einer jeden Ladung in das entsprechende Potential.*

91. — Bleibt ein Leiter isolirt, ladet derselbe sich also nur durch Influenz, so ist seine Gesammtladung beständig Null; demnach ist in jener Summe von Produkten kein Glied vorhanden, welches einem isolirten Leiter entspricht.

Ebenso behält ein Leiter, der mit der Erde in Verbindung gehalten wird, das Potential Null und liefert demnach ebenfalls kein Glied in den Ausdruck für die Energie.

Jedoch ist zu bemerken, dass diese beiden Arten von Leitern insofern den Wert der Energie beeinflussen, als sie durch Influenz auf die Capacitäten und infolge dessen auf die Potentiale der elektrisirten Körper einwirken.

Endlich gilt dieselbe Formel auch für Isolatoren, die irgendwie elektrisch gemacht sind. Jedes Volumenelement der Isolatoren kann in seiner Wirkung als ein unendlich kleiner Leiter aufgefasst werden, auf welchem die entsprechende elektrische Masse ausgebreitet ist.

In diesem Falle wird die oben aufgestellte Summe ein Integral; nennt man ρ die elektrische Dichte und V das Potential auf ein Volumenelement dv, so wird die Energie des Systems ausgedrückt durch

$$W = \frac{1}{2}\int V dM = \frac{1}{2}\int V \rho dv.$$

Die durch Elektrisirung auf einem System von Leitern angehäufte Energie kann in dem Augenblicke der Entladung verwendet und in mechanische Arbeit oder in eine äquivalente Wirkung, in freie Wärme, chemische Wirkungen etc. umgewandelt werden.

92. — Wäre die Elektricität eine materielle Substanz, so würden die Massen, aus denen die elektrischen Ladungen bestehen, bei ihrer Ausgleichung eine gewisse lebendige Kraft erhalten, infolge deren sie wie ein Pendel über ihre Gleichgewichtslage hinausgehen müssten; es würde sich auf dem System ein Bruchteil der ursprünglichen Energie wieder herstellen und eine Folge von in der Richtung alternirenden Entladungen entstehen, bis die auf den Leitern entwickelte Wärme die ganze disponible Energie erschöpft hat, und der endgiltige Gleichgewichtszustand würde erst nach einer gewissen Anzahl von Oscillationen erreicht werden. Die Erfahrung zeigt, dass unter gewissen Umständen in der That die Entladungen einen offenbar oscillatorischen Charakter zeigen; allein wir werden sehen, dass diese Oscillationen ganz anders erklärt werden können. Man kann aus denselben nichts zu Gunsten der Hypothese schliessen, welche den elektrischen Massen eine gewisse Trägheit zuschreibt, und bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft vermag man keine für oder gegen eine solche Hypothese entscheidende Thatsache beizubringen.

93. Batterieentladung. — Auf Quantität gekoppelte Batterie. — *Vollständige Entladung.* — Wir haben gesehen (**84**), dass die Capacität C_1 einer auf Quantität gekoppelten Batterie gleich der Summe der Capacitäten der einzelnen Flaschen ist.

Wird die ganze Energie der Batterie bei der Entladung in Wärme umgewandelt, so erhält man demnach, wenn man J das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit und Q die entwickelte Wärme nennt

$$W = \frac{1}{2} MV = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_1} = \frac{1}{2} C_1 V^2 = JQ.$$

Besteht die Batterie aus p gleichen Flaschen von der Capacität C, so verwandelt sich die Formel in

$$W = JQ = \frac{1}{2p} \cdot \frac{M^2}{C} = \frac{1}{2} pCV^2.$$

Man sieht, dass bei gegebener Ladung die Energie oder die entwickelte Wärme im umgekehrten Verhältnisse zur Flaschenzahl steht, und dass für ein gegebenes Potential die Energie proportional der Flaschenzahl ist.

94. Unvollständige Entladung. — Wir fassen zwei Batterieen mit den Capacitäten C_1 und C_2 ins Auge, deren eine mit einer Masse M geladen ist, während die andere sich im neutralen Zustande befindet, bei beiden sollen die äussern Belegungen mit der Erde in Verbindung stehen. Statt nun die erste Batterie zu entladen, wollen wir die inneren Belegungen der beiden Batterieen so verbinden, dass sie eine einzige Batterie mit der Capacität $C_1 + C_2$ bilden. Die Entladung der ersten Batterie ist nun eine *unvollständige;* sie entspricht einem Energieverlust und verursacht eine Wärmeentwicklung. Vor der Verbindung war die potentielle Energie der ersten Batterie

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_1}.$$

Nach der Verbindung der Batterieen ist die Energie des Systems geworden

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_1 + C_2}.$$

Die bei der Entladung entwickelte Wärme ist

$$W_1 - W_2 = \frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1 + C_2} \right) = \frac{M^2}{2C_1} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Der verbrauchte Bruchteil der ursprünglichen Energie ist demnach

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{1 + \frac{C_1}{C_2}}.$$

Nehmen wir an, dass die erste Batterie aus p_1 Flaschen mit der Fläche S_1 und der Wanddicke e_1, die zweite aus p_2 Flaschen mit der Fläche S_2 und der Dicke e_2 besteht, so erhält man (**82**)

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{e_2}{e_1},$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1} = \frac{1}{1 + \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{e_2}{e_1}}.$$

95. Entladung einer Cascadenbatterie. — Die Capacität einer in Cascaden angeordneten Batterie ist mit den Capacitäten C, C', C'' ... der einzelnen Flaschen durch die Gleichung verbunden (**85**)

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} + \cdots = \sum \frac{1}{C}.$$

Man erhält also

$$W = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_1} = \frac{1}{2} C_1 V^2.$$

Besteht die Cascade aus p gleichen Flaschen, so ist

$$C_1 = \frac{C}{p},$$

was für die Energie ergiebt

$$W = \frac{1}{2} p \frac{M^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{CV^2}{p}.$$

Für eine gegebene Ladung ist demnach die Energie auf der Cascade im Verhältnis von p zu 1 grösser als auf einer einzelnen Flasche; für ein gegebenes Potential hingegen ist dieselbe pmal so klein. Das Verhältnis ist genau entgegengesetzt dem für eine auf Quantität gekoppelte Batterie.

Alle diese auf die Batterieentladung bezüglichen Gesetze sind von Riess noch vor Entwicklung der Theorie experimentell gefunden worden.

Steht demnach ein constantes Potential, d. h. ein solches von einer constanten Elektricitätsquelle zur Verfügung, so ist die beste Combination einer bestimmten Anzahl von Flaschen, wenn man bei der Entladung das Maximum der Energie erhalten will, die, dieselben auf Quantität zu koppeln, immer vorausgesetzt, dass die Flaschen das Maximum der Potentialdifferenz der Elektricitätsquelle aushalten können. Hat man dagegen über eine bestimmte Elektricitätsmenge zu verfügen, so hat es für diesen Zweck allen Vorteil, die Batterie in Cascaden zu verbinden.

Der erste Fall ist der häufigere; derselbe tritt immer ein, wenn man mit einer Elektrisirmaschine arbeitet; da aber eine solche gewöhnlich sehr hohe Potentiale erzeugen kann, ist es oft von Wert, eine aus beiden Systemen bestehende Flaschencombination zu wählen, welche die hohen Potentiale nutzbar zu machen und an Ladung zu sparen erlaubt.

96. Elektrische Arbeit während der Ortsveränderung isolirter Leiter. — *Leiter mit constanter Ladung.* — Die potentielle Energie eines Leitersystems hat den Wert

$$W = \frac{1}{2} \sum MV.$$

Verändert man die gegenseitige Lage dieser Leiter, ohne zwischen ihnen eine Verbindung herzustellen, so ruft man im Allgemeinen eine positive oder negative Arbeit der elektrischen Kräfte hervor, und folglich ändert man die Energie des Systems; erfährt das System durch eine äussere Arbeit eine Lagenänderung in einem den elektrischen Wirkungen entgegengesetzten Sinne, so vergrössert sich die Energie um eine entsprechende Grösse.

Sind die Leiter sich selbst überlassen, so folgen sie den elektrischen Kräften, die auf sie einwirken; die Arbeit dieser Kräfte ist positiv und entspricht einer Verkleinerung der Energie des Systems. Man hat, wenn man dT die Arbeit der elektrischen Kräfte und dW die entsprechende Aenderung der Energie nennt, zu jeder Zeit

$$(1) \qquad dW + dT = 0.$$

Die Energie der ihren gegenseitigen Einwirkungen überlassenen Leiter strebt demnach einem Minimum zu.

Man hat andererseits allgemein

$$dW = \frac{1}{2} \sum MdV + \frac{1}{2} \sum VdM;$$

im vorliegenden Falle ist das letzte Glied Null, da die Ladung M sich auf keinem Leiter ändern soll; es bleibt demnach nur

$$dW = \frac{1}{2} \sum MdV.$$

Die von selbst erfolgende Ortsveränderung geht also so vor sich, dass die Potentiale kleiner werden.

Ein anfangs im neutralen Zustande befindlicher Körper würde in einem elektrischen Felde angezogen werden. Seine Gegenwart hat demnach, wie wir schon wissen, die Wirkung die Potentiale zu erniedrigen.

97. *Leiter mit constantem Potential.* — Wir betrachten jetzt den Fall, dass die Leiter durch ausserhalb des Wirkungsfeldes aufgestellte Elektricitätsquellen auf constanten Potentialen gehalten werden.

Wir wollen voraussetzen, dass die verschiedenen Leiter A_1, A_2, A_3 ..., die mit den Mengen M_1, M_2, M_3 ... geladen sind und die Potentiale V_1, V_2, V_3 ... besitzen, einzeln mit Körpern von den Capacitäten C_1, C_2, C_3 ... verbunden sind, die jedem fremden Einflusse entzogen sind, beispielsweise mit geschlossenen Condensatoren, deren äussere Belegungen mit der Erde in Verbindung stehen. Dieser Fall gehört dann zu der eben behandelten Aufgabe; bezeichnet man mit W_a die Energie der Leiter und mit W_c die der Condensatoren, so ist die Energie des Systems

$$W = W_a + W_c.$$

Erfährt das System irgend eine Deformation ohne Hinzutreten fremder Energie, so kann die Formel (1) angewandt werden und giebt

$$dT + dW_a + dW_c = 0. \tag{2}$$

Die Energie der Leiter ist

$$W_a = \frac{1}{2}\sum MV,$$

und folglich ist

$$dW_a = \frac{1}{2}\sum MdV + \frac{1}{2}\sum VdM. \tag{2'}$$

Für die Energie der Condensatoren, deren Capacität unveränderlich ist, erhalten wir den Ausdruck

$$W_c = \frac{1}{2}\sum CV^2,$$

woraus folgt

$$dW_c = \Sigma C \cdot VdV.$$

Endlich ist für jedes aus einem Leiter und einem Condensator bestehende System die Gesammtladung $M + CV$ constant; man erhält also

$$dM + CdV = 0,$$

und folglich auch

$$VdM + CVdV = 0,$$

woraus sich für die ganze Verbindung von Condensatoren und Leitern ergiebt

$$\Sigma VdM + \Sigma CVdV = 0.$$

Mit Rücksicht auf diese letzte Beziehung kann die Gleichung (2′) geschrieben werden

$$dW_a = \frac{1}{2}\sum MdV - \frac{1}{2}\sum CVdV = \frac{1}{2}\sum MdV - \frac{1}{2}dW_c.$$

Man erhält also

(3) $$2dW_a + dW_c = \sum MdV = -\sum \frac{MdM}{C}.$$

Diese Gleichung bleibt richtig, welches auch die Capacitäten der Condensatoren seien. Nichts hindert diese Capacitäten so gross gegen die Ladungen M der angenommenen Leiter zu machen, so dass die Potentialänderungen dV_1, $dV_2 \ldots$ und die Energieänderungen $M_1 dV_1$, $M_2 dV_2 \ldots$ vollständig vernachlässigt werden können. Man gelangt so zu dem Fall von Condensatoren, die durch äussere Quellen auf constanten Potentialen gehalten werden, und die Gleichung (3) geht über in

$$2dW_a + dW_c = 0$$

oder

$$-(dW_a + dW_c) = dW_a;$$

woraus schliesslich nach Gleichung (1) folgt

$$dT = dW_a.$$

So wächst die Energie des Systems, wenn die Leiter auf bezw. constanten Potentialen gehalten werden, für jede Deformation um eine der Arbeit der elektrischen Kräfte gleiche Grösse. Diese Arbeit ist positiv, wenn das System sich selbst überlassen ist; dieselbe ist ebenso wie der Zuwachs der Energie aus den Quellen entnommen, welche die Potentiale constant erhalten. Die Quellen liefern also in jedem Augenblicke eine Energiemenge, die sich in zwei gleiche Teile zerlegt: die eine dient dazu, die Arbeit dT der elektrischen Kräfte zu leisten, die andere wird zur Vergrösserung der elektrischen Energie des Systems um dW_a verbraucht.

In diesem Falle strebt die Energie des Systems einem Maximum zu.

98. — Wir wollen von diesen Sätzen für folgende Aufgabe Gebrauch machen, die als Grundlage für die Theorie der symmetrischen Elektrometer dienen kann.

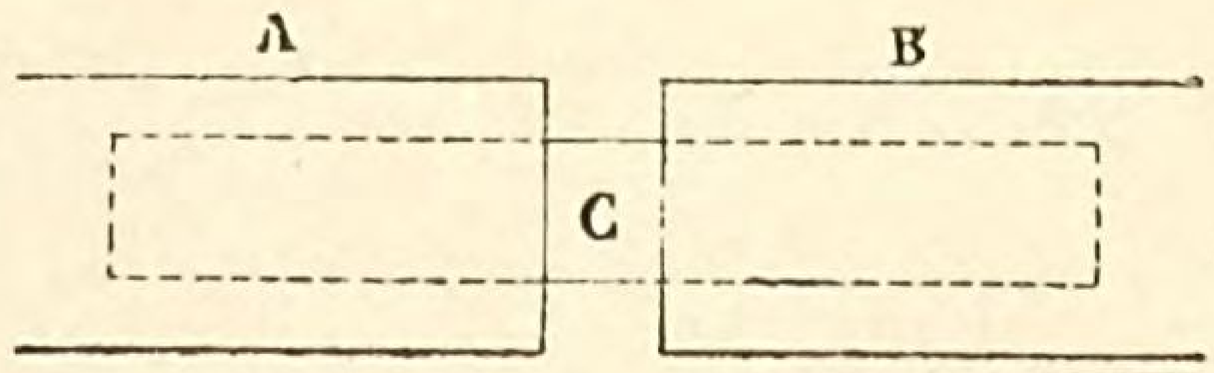


Fig. 21.

Wir nehmen an, ein Leitersystem bestehe aus zwei festen unendlich langen Cylindern A und B (Fig. 21) mit gemeinsamer Achse und einem mit

ersteren concentrischen Cylinder C, der in Richtung der Achse beweglich ist; die Länge des inneren Cylinders C sei so gross, dass die elektrische Dichte an seinen Enden nur von dem nächsten festen Leiter abhängig ist. Es seien V_1, V_2 und V die Potentiale dieser drei Körper, A_0, B_0 und C_0 die Ladungen, die sie besitzen, wenn der bewegliche Körper sich in einer gegen die beiden andern symmetrischen Lage befindet.

Wird der Cylinder C um eine unendlich kleine Grösse x, beispielsweise nach rechts, verschoben, so wird dadurch die elektrische Verteilung auf den verschiedenen Flächen in der Nähe der Oeffnung und an den Enden nicht geändert; man hat einfach die Fläche, auf der die elektrische Dichte gleichförmig und der Potentialdifferenz der benachbarten Leiter proportional ist, um eine der Grösse x proportionale Grösse vermehrt. Die rechte Hälfte des beweglichen Cylinders hat demnach eine der Grösse x proportionale Elektricitätsmenge gewonnen, und der feste Cylinder B hat eine gleiche Elektricitätsmenge entgegengesetzter Art erhalten; die umgekehrte Wirkung ist auf der andern Seite hervorgerufen.

Bezeichnet man mit A, B und C die neuen Ladungen der drei Leiter nach der Verschiebung des inneren Cylinders und mit α die Capacität des inneren Cylinders pro Längeneinheit in grosser Entfernung von der Mitte und von den Enden, so erhält man demnach

$$C = C_0 + \alpha x(V - V_2) - \alpha x(V - V_1) = C_0 + \alpha x(V_1 - V_2),$$
$$B = B_0 - \alpha x(V - V_2),$$
$$A = A_0 + \alpha x(V - V_1).$$

Die Energieänderung ist hiernach

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\alpha x\left[(V_1 - V_2)V - (V - V_2)V_2 + (V - V_1)V_1\right]$$
$$= \alpha x\left[V(V_1 - V_2) - \frac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2)\right]$$
$$= \alpha x(V_1 - V_2)\left[V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right].$$

Die Resultante der Wirkungen von A und B auf C ist wegen der Symmetrie der gemeinsamen Achse parallel; die bei der Verschiebung x geleistete Arbeit Fx ist der Energieänderung gleich. Hieraus erhält man

$$F = \alpha(V_1 - V_2)\left[V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right].$$

Man kann ferner den Coefficienten α als Funktion der Daten dieser Aufgabe bestimmen. Denn wir wissen bereits (**80**), dass für den Fall zweier concentrischer unendlicher Cylinder, deren Radien R und R_1 und deren

Potentiale V und V_1 sind, die Ladung des inneren Cylinders für eine Länge x ist

$$M = \frac{(V - V_1)x}{2} \frac{1}{l_n \frac{R_1}{R}}.$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \frac{1}{2 l_n \frac{R_1}{R}}$$

und folglich

$$F = \frac{V_1 - V_2}{2 l_n \frac{R_1}{R}} \left[V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2) \right].$$

6. Capitel.

Dielektrica.

99. Rolle des dielektrischen Mediums. — Bisher haben wir unsere Untersuchungen innerhalb der Hypothese angestellt, dass die Wirkungen zwischen den elektrischen Massen durch Fernwirkungen durch die die Massen trennenden Zwischenräume hindurch erfolgen, und das Dielektricum als träges Mittel aufgefasst, durch welches hindurch zwar die Kräfte wirken, das aber selbst jeder activen Eigenschaft baar ist.

Andererseits erscheint es heute als wohlerwiesen, dass die Wärme eine Bewegung ist, deren Fortpflanzung durch Vermittlung eines elastischen Mittels erfolgt; und wir haben ferner gesehen, dass die Aufgabe des elektrischen Gleichgewichts und die der stationären Ausbreitung der Wärme durch dieselben mathematischen Beziehungen bestimmt sind.

Man wird so zu der Annahme geführt, dass in beiden Erscheinungen die Analogie weiter geht, dass dieselbe sich bis in den Mechanismus der elementaren Wirkungen verfolgen lässt, dass zwischen den beiden Gruppen von Erscheinungen keine andere Unterschiede existiren, als solche, die wir bei der physikalischen Erklärung der Gesetze erst hineingetragen haben. Verhält es sich aber wirklich so, dann muss die Entstehung der elektrischen Kräfte durch die alleinige Wirkung des Zwischenmediums erklärt werden können.

Dies ist die Auffassung, die Faraday klar zu stellen gesucht hat, und die ihn bei allen seinen Arbeiten geleitet hat. Wir wollen hier nicht die Richtigkeit der einen oder der andern Auffassungsweise zu erweisen oder zurückzuweisen, sondern nur ihre Gleichwertigkeit für die Erklärung der Erscheinungen darzulegen suchen.

Wir stellen zunächst einige Lehrsätze über die Beziehungen der Kräfte und der elektrostatischen Drucke fest.

100. Ausdruck der Kraft durch Drucke. — Wir haben bei den Ableitungen des § 41 als selbstverständlich angenommen, dass *die Kraft, die auf einen Leiter wirkt, die Resultante der elektrischen Druckwirkungen auf*

die ganze Oberfläche ist, aber es kann nützlich sein, diesen Satz von einem andern Gesichtspunkte aus zu untersuchen.

Der Druck p auf die Flächeneinheit in einem Punkte des Leiters, in welchem die Dichte σ und die Kraft F ist, hat den Wert

$$p = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi} F^2 = \frac{1}{2} F\sigma,$$

und dieser Druck ist stets nach aussen gerichtet, welches auch das Zeichen der betreffenden Elektricität ist.

Für jedes Flächenelement ist der Druck pdS die Resultante der auf die Masse σdS dieses Elementes von allen ausserhalb des Leiters und von den auf demselben befindlichen Massen ausgeübten Wirkungen. Für die Gesammtoberfläche giebt die Resultante aller Drucke diejenige der auf den Leiter sowohl seitens der äusseren Massen, als seitens der eigenen Elektricität ausgeübten Wirkungen. Aber die Wirkungen der verschiedenen elektrischen Massen des Leiters auf einander haben die Resultante Null, da in dem angenommenen Falle des Gleichgewichts diese Massen als auf dem Leiter unbeweglich festgelegt betrachtet werden können, so dass die Einzelkräfte sich gegenseitig vernichten. Die Druckresultante ist demnach allein gleich der Resultante der Wirkungen der äusseren Massen.

101. — *Ist ein elektrisches System von einer Niveaufläche S_1 eingeschlossen, so ist die auf dieses System ausgeübte Kraft die Resultante der Drucke, welche auf eine der Gesammtladung des Systems gleiche, auf der Fläche S_1 im Gleichgewicht befindliche Schicht ausgeübt werden würden.*

Wir nehmen an, dass eine Niveaufläche S_1 alle wirksamen Massen in zwei Systeme M_1 und M_2 trennt, das eine, M_1, liegt innerhalb, das andere, M_2, ausserhalb der Fläche. Wie wir (**61**) gesehen haben, kann man für alle Punkte ausserhalb S_1 die inneren Massen durch eine auf der Fläche S_1 im Gleichgewicht befindliche Schicht von derselben Gesammtmasse M_1 ersetzen. Umgekehrt wirkt das äussere System M_2 auf diese auf der Fläche S_1 fest gemachte Schicht M_1, wie es auf die inneren Massen wirken würde, falls letztere so mit einander verbunden wären, dass sie ein starres System bilden.

Aber nach der eben gemachten Bemerkung ist die Wirkung der äusseren Massen auf die Schicht S_1 und folglich auf das System M_1 der inneren Massen nichts anderes, als die Resultante der elektrostatischen Drucke dieser Schicht.

Da die Gesammtwirkung des Systems M_1 auf alle äusseren Körper der auf dieses System wirkenden Kraft entgegengesetzt gleich ist, so ist auch die Wirkung des Systems M_1 auf die äusseren Körper gleich der Resultante der Einzeldrucke auf S_1, wenn dieselben sämmtlich nach innen gerechnet werden.

102. — *Die Wirkung der beiden Systeme M_1 und M_2 auf einander ist gleich der Wirkung zweier Schichten $+M_1$ und $-M_1$, die auf den beiden Niveauflächen S_1 und S_2, welche M_1 ein- und M_2 ausschliessen, verteilt sind.*

Denn fassen wir eine zweite Niveaufläche S_2 (Fig. 22) ins Auge, die M_1 umfasst und das System M_2 vollkommen ausschliesst, und ordnen wir

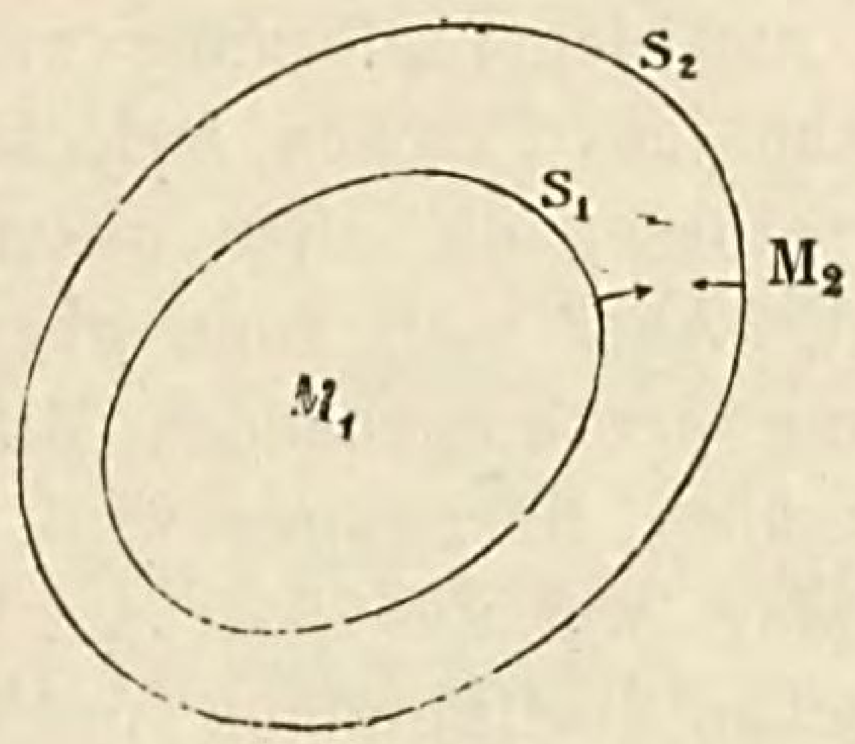


Fig. 22.

auf der Fläche S_1 eine Schicht $+M_1$ und auf S_2 eine Schicht $-M_1$ so an, dass Gleichgewicht auf den Flächen besteht, so kann die Schicht auf S_1 für alle ausserhalb S_1 liegenden Punkte das innere System M_1 ersetzen, und die Schicht auf S_2 ist dem äusseren System M_2 für alle auf der Fläche S_2 liegenden Punkte gleichwertig.

Die Verbindung dieser beiden Schichten liefert ausserdem innerhalb S_1 ein constantes Potential V_1 und ausserhalb S_2 ein constantes Potential V_2, endlich in dem dazwischen liegenden Raume ein veränderliches Potential zwischen V_1 und V_2. Die elektrische Kraft ist demnach überall Null, ausser in diesem Zwischenraume, wo sie für die beiden ursprünglichen Systeme M_1 und M_2 in jedem Punkte denselben Wert besitzt, wie für die diesen gleichwertigen auf den Flächen S_1 und S_2 verteilten Schichten.

Die Wirkung der elektrisirten Fläche S_1 auf die Schicht S_2 ist demnach dieselbe wie die auf das System M_2, die von S_2 dieselbe auf S_1 wie auf M_1; die gegenseitigen Wirkungen der elektrischen Flächen S_1 und S_2 auf einander sind demnach dieselben wie die der beiden ursprünglichen Systeme M_1 und M_2 auf einander.

Nach den vorhergehenden Sätzen wissen wir aber, dass die Wirkungen auf die Flächen S_1 und S_2 nichts anderes sind, als die Resultanten der elektrischen Drucke $p_1 dS_1$ und $p_2 dS_2$, welche auf die Elemente dieser Flächen ausgeübt werden. Bezeichnet man mit F_1 und F_2 die elektrische Kraft in dem Mittel in der Nähe der betrachteten Elemente, so haben diese Drucke die Werte

$$p_1 dS_1 = \frac{1}{8\pi} F_1^2 dS_1,$$

$$p_2 dS_2 = \frac{1}{8\pi} F_2^2 dS_2;$$

dieselben sind, die ersteren aus der Fläche S_1 heraus, die zweiten in die Fläche S_2 hinein gerichtet, und die Resultanten dieser beiden Systeme von Normalkräften $p_1 dS_1$ und $p_2 dS_2$ sind entgegengesetzt gleich, so als wenn sie Wirkung und Gegenwirkung bildeten.

103. — Die thatsächlich zwischen den beiden elektrischen Flächen S_1 und S_2 wirkende Kraft kann als von Elementarkräften herrührend aufgefasst werden, die direkt und aus der Entfernung zwischen den verschiedenen elektrischen Massen, welche jene Flächen bedecken, paarweis auf einander wirken. Dies ist die Hypothese, die allen unsern bisherigen Rechnungen als Grundlage gedient hat. Aber man kann ebenso annehmen, dass diese Wirkung durch Mitwirkung des umgebenden Mittels infolge einer eigentümlichen Elasticität desselben übertragen wird, und dies ist die Ansicht Faraday's gewesen. Indem wir uns jetzt auf diesen Standpunkt stellen, wollen wir die mechanischen Bedingungen prüfen, denen das Zwischenmedium dann genügen muss.

Zu diesem Zwecke nehmen wir einen rechtwinkligen Kanal zwischen den beiden Flächen S_1 und S_2 an. Die von dS_1 (Fig. 23) ausgehende Kraftströmung hört in dS_2 auf, und die beiden Elemente dS_1 und dS_2 sind genau

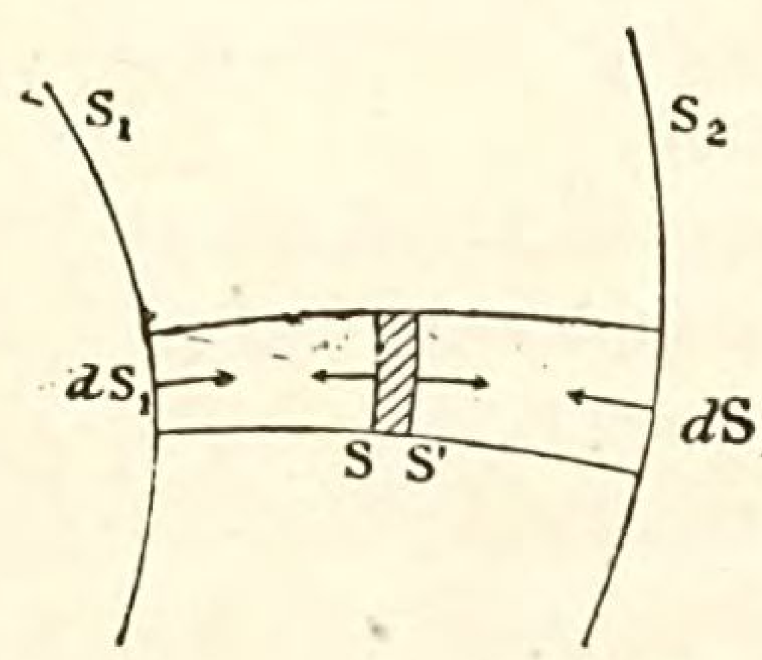


Fig. 23.

in demselben Zustande, als wenn sie durch elastische Fäden verbunden wären, die den Kraftlinien parallel wären und die beiden Elemente mit einer Kraft p_1 für die Flächeneinheit auf S_1 und mit einer Kraft p_2 für die Flächeneinheit auf S_2 gegen einander zögen.

Nehmen wir in dem Kanal ein Volumenelement an, welches durch zwei unendlich nahe, um dn von einander abstehende Niveauflächen S und S' begrenzt ist, und denken wir uns dasselbe festgemacht, so muss dieses Element als ein solches betrachtet werden, welches zwei äusseren Zugspannungen auf seinen Grundflächen ausgesetzt ist, deren Resultante ist

$$dR = p'dS' - pdS = \frac{1}{8\pi}(F'^2 dS' - F^2 dS).$$

Da wegen der Eigenschaften der Kraftröhren (**35**)

$$FdS = F'dS'$$

ist, so folgt

$$dR = \frac{1}{8\pi} F dS (F' - F).$$

Da die beiden Flächen einander unendlich nahe sind, kann man setzen

$$F' - F = \frac{dF}{dn} dn,$$

woraus sich ergiebt

$$dR = \frac{1}{8\pi} dS dn F \frac{dF}{dn} = \frac{1}{2} dS dn \frac{d}{dn}\left(\frac{F^2}{8\pi}\right) = dS dn \frac{1}{2} \frac{dp}{dn}.$$

Nennt man R die in einem Punkte des Dielektricums auf die Volumeneinheit bezügliche Wirkung, so erhält man

$$R = \frac{1}{2} \frac{dp}{dn}.$$

Das Resultat ist also dasselbe, wie wenn die Kräfte auf das Dielektricum selbst ausgeübt würden und die Kraft für die Volumeneinheit in jedem Punkte durch ein Potential gleich $-\frac{p}{2}$ bestimmt wäre; das Volumenelement erleidet einen Zug in der Richtung, in welcher die Funktion p wächst.

104. — Aber unter solchen Umständen kann das Volumenelement nicht im Gleichgewicht sein; soll es dennoch in Ruhe verharren, so müssen noch andere Kräfte wirksam sein. Um diese zu bestimmen, ist es vorteilhaft, die entsprechende Aufgabe der Hydrostatik zu behandeln.

Wird in einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit der Druck in jedem Punkte durch eine Funktion p_1 der Coordinaten wiedergegeben, so ist die Resultante aller auf eine geschlossene Fläche ausgeübten Drucke gleich der Resultante eines Systems von Kräften, die ein Potential p_1 haben und die auf den ganzen von dieser Fläche begrenzten Raum wirken.

Dies zu beweisen, genügt die Bemerkung, dass die Resultante der Drucke auf ein Element, welches durch zwei Flächen gleichen Druckes und eine zu diesen senkrechte Mantelfläche so eingeschlossen ist, dass es einen unendlich kleinen Cylinder mit der Grundfläche dS und der Höhe dn bildet, gleich

$$-dS \frac{dp_1}{dn} dn = -dv \frac{dp_1}{dn}$$

ist, wo $\frac{dp_1}{dn}$ die Ableitung des Druckes nach der Normale der Niveaufläche ist. Diese Kraft oder dieser Stoss wirkt normal zu der betreffenden Niveaufläche und in der Richtung, in der die Drucke kleiner werden. Im übrigen ist sie, da Gleichgewicht bestehen soll, gleich und genau entgegengerichtet

der Resultante aller äusseren, auf das Volumen wirkenden Kräfte, beispielsweise dem Gewichte der eingeschlossenen Flüssigkeit, wenn es sich um eine der Schwerkraft allein unterworfene Flüssigkeit handelt.

In der Aufgabe über die Elektricität ist die Resultante der Kräfte, welche auf ein Volumenelement $dSdn$ wirken, wegen der Spannungen, welche wir den Kraftlinien entlang wirkend betrachtet haben, gleich $dSdn\frac{1}{2}\frac{dp}{dn}$, und dieselbe ist dorthin gerichtet, wo die Funktion p grösser wird.

Um das Gleichgewicht herzustellen, wollen wir annehmen, dass ausserdem in jedem Punkte im Dielektricum noch ein Druck p_1 vorhanden ist.

Diesem Drucke soll die ganze Oberfläche des Elementes unterworfen sein. Für die Seitenflächen heben sich die an den einzelnen Teilen derselben wirkenden Drucke p, p_1 gegen einander auf, für die Grundflächen aber nicht; dort setzen sie sich mit den Spannungen p zusammen, und wenn Gleichgewicht bestehen soll, muss die Summe dieser Drucke und Spannungen für die beiden Grundflächen zusammen verschwinden. Hiernach ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\frac{dp}{dn} - \frac{dp_1}{dn} = 0$$

oder

$$p = 2p_1.$$

Die thatsächliche Einwirkung auf das Volumenelement $dSdn$ setzt sich demnach aus einem *Seitendrucke* $p_1 = \frac{1}{2}p$ und einer *Spannung* auf die Grundflächen dS gleich $p - p_1$, d. h. ebenfalls $\frac{p}{2}$, zusammen.

105. Spannung und Abstossung der Kraftlinien. — Fasst man eine Schale ins Auge, die von zwei elektrischen Niveauflächen begrenzt ist, auf denen man die elektrischen Massen so verteilt denkt, dass sie die Wirkung der ausserhalb jener Schale befindlichen Massen ersetzen, so ziehen sich die beiden Flächen mit einer Kraft an, die der allgemeinen Resultante der Spannungen gleich ist. Teilt man diese Schale durch eine senkrechte Fläche in zwei Teile, so erfolgt zwischen den beiden Teilen eine *Abstossung*, die der Resultante der Seitendrucke gleich ist.

Diese Betrachtungen lassen sich leicht auch auf den Fall ausdehnen, wo die zweite Niveaufläche die erste nicht einschliesst.

Man kann sich also vorstellen, dass *die Leiter mit einander wie durch elastische Fäden verbunden sind, die den Kraftlinien entlang ausgespannt sind und die sich gegenseitig abstossen.* Diese materielle Anschauungsweise ist in vielen Anwendungen ein nützlicher Führer.

106. — Die eben aufgestellten Beziehungen sind der mathematische Ausdruck für die Anschauungen, die sich Faraday über den Zustand der Dielektrica gebildet, und die er selbst in den folgenden zwei Paragraphen seiner *Experimental Researches,* Ser. XI § 1297—1298 zusammengefasst hat:

„Die Inductionswirkung, die man als in der Richtung der zwei elektrische leitende Grenzflächen verbindenden Kraftlinien wirkend auffassen kann, muss von einer seitlichen oder zu eben diesen Linien transversalen Wirkung begleitet sein, welche die Dehnung oder die Abstossung, welchen dieselben zu unterliegen scheinen, verursacht (1224). In andern Worten: Die Anziehungskraft, welche zwischen den Partikeln des Dielektricums in Richtung der Induction wirkt, ist von einer Abstossungskraft in der transversalen Richtung begleitet (1304).

„Die Induction scheint in einem gewissen Polarisationszustande der Partikel zu bestehen, der durch die Wirkung des elektrischen Körpers bestimmt ist, einem Zustande, in dem die Partikel positive und negative Punkte oder Teile erhalten, welche gegen einander und gegen die Oberfläche oder gegen die Partikel des inducirenden Körpers symmetrisch angeordnet sind. Dieser Zustand muss ein Zwangszustand sein, da er nur durch eine Kraft erzeugt und aufrecht erhalten wird und dem normalen oder Ruhezustand Platz macht, sobald diese Kraft zu wirken aufhört. Durch eine feste Elektricitätsmenge kann dieser Zustand nur auf Isolatoren dauernd unterhalten werden, da nur solche diesen Zustand der Partikel festhalten können.“

107. Energie des dielektrischen Mediums. — Nach dieser Anschauungsweise muss die gesammte Energie des elektrischen Systems in dem dielektrischen Medium ihren Sitz haben, und es ist leicht den Wert derselben in jedem Punkte zu berechnen.

Die Gesammtenergie eines Systems ist (**91**)

$$W = \frac{1}{2}\sum mV \text{ oder } W = \frac{1}{2}\int V\rho\, dv.$$

Ersetzt man die Dichte durch den aus der Poisson'schen Gleichung

$$\Delta V + 4\pi\rho = 0$$

abgeleiteten Wert, so ergiebt sich

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int V\Delta V dv.$$

Hier ist die Energie als Funktion der elektrischen Massen selbst ausgewertet worden. Um den Ausdruck zu ändern, braucht man nur den Green'schen Satz (**33**)

$$\int V\Delta V dv = \int V\frac{\partial V}{\partial n}dS - \int F^2 dv$$

auf das Volumen einer Kugel von dem sehr grossen Radius r anzuwenden, welche das betrachtete elektrische System einschliesst. Das erste Glied der rechten Seite muss über die Oberfläche dieser Kugel ausgedehnt werden.

Das Potential V nähert sich, je weiter man sich entfernt, dem Verhältnisse $\frac{1}{r}$; der Faktor $\frac{\partial V}{\partial n}$ giebt die normale Kraftcomponente an und wird umgekehrt proportional zu r^2. Da die Oberfläche selbst r^2 proportional ist, ist dieses erste Integral umgekehrt proportional zu r und nähert sich also mit wachsendem r der Null.

Die rechte Seite reducirt sich hiernach auf das zweite Glied, und man erhält für die Energie den Ausdruck

$$W = \frac{1}{8\pi} \int F^2 dv.$$

Hiernach ist die Energie des Systems dieselbe, wie wenn jedes Volumenelement dv des Mediums eine Energiemenge $\frac{1}{8\pi} F^2 dv$ besässe. Die Energie w für die Raumeinheit ist dann

$$w = \frac{1}{8\pi} F^2 = p.$$

Die Energie für die Raumeinheit ist an jeder Stelle gleich dem elektrostatischen Druck.

108. Specifische inductive Capacität. — Spielt so das Dielektricum in den Erscheinungen eine mitwirkende Rolle, so lässt sich erwarten, dass sich nicht alle Medien genau in der gleichen Weise verhalten.

In der That weiss man seit den Versuchen Franklin's, dass bei der Construktion elektrischer Batterieen die Natur des verwendeten Glases eine grosse Wichtigkeit hat. Cavendish hatte viele Versuche angestellt, um direkt die Rollen der verschiedenen Körper, die man zur Isolirung der Condensatoren verwendete, mit einander zu vergleichen; aber diese Versuche waren noch nicht veröffentlicht und waren noch unbekannt, als Faraday seine grundlegenden Arbeiten veröffentlichte.

Faraday stellte fest, dass, wenn man die Belegungen zweier kugelförmiger Leydener Flaschen, in deren einer die isolirende Luftschicht durch ein festes Dielektricum, wie geschmolzenen Schwefel oder Harz, ersetzt war, mit einander in Verbindung brachte, eine bestimmte, auf das System der Leiter gebrachte Elektricitätsmenge sich nicht zu gleichen Teilen auf die beiden Flaschen verteilte. Die Flasche, deren Dielektricum fest war, nahm eine grössere Ladung an.

Die Erscheinung ist allgemein und folgt einem sehr einfachen Gesetze. Die Ladung, die ein geschlossener Leiter mit festem oder flüssigem Dielektricum aufnimmt, steht in einem constanten Verhältnisse zu der Ladung, die er bei derselben Potentialdifferenz aufnehmen würde, wenn das Dielektricum durch eine Luftschicht ersetzt wäre.

Der Versuch zeigt, dass die Luft und die Gase, selbst feuchte Gase, sich merklich gleich verhalten, welches auch der Druck und die Temperatur

sein möge. Wenn wirklich die Natur des Gases einen merklichen Einfluss ausübt — hierauf werden wir noch zurückkommen — so ist derselbe so gering, dass er in den Anwendungen vernachlässigt werden kann.

Das so bestimmte Verhältnis ist das, was Faraday *die specifische inductive Capacität* des Dielektricums nennt. Es ist dies, wie man sieht, die Zahl, mit welcher man die Capacität eines Luftcondensators multipliciren muss, um diejenige desselben Condensators zu erhalten, wenn in ihm die Luftschicht durch das fragliche Dielektricum ersetzt ist.

109. Elektrische Absorption. — Die Bestimmung dieser Constanten ist bei den meisten Körpern mit grossen Schwierigkeiten verbunden wegen des Dazwischentretens einer Erscheinung, welche Faraday als *elektrische Absorption* bezeichnet hat, und welche in derselben Erscheinung ihren Grund hat wie der elektrische Rückstand der Condensatoren. Die Capacität eines Leiters, in welchem das Dielektricum ein fester Körper ist, stellt sich infolge dieser Absorption als Funktion der Zeit dar; sie wächst und scheint sich einer bestimmten Grenze in dem Verhältnisse der Ladungsdauer asymptotisch zu nähern. Entladet man umgekehrt den Condensator, so erreicht häufig die bei der Entladung disponible Elektricität lange nicht die gesammte Ladung, die derselbe besitzt; es ist ja auch bekannt, dass man in auf einander folgenden Zwischenräumen eine grössere oder geringere Anzahl von Entladungen von abnehmender Intensität erhalten kann.

Bei dem augenblicklichen Stande der Wissenschaft erscheint es schwierig, von dieser Eigentümlichkeit genaue Rechenschaft zu geben. Alles scheint darauf hinzuweisen, dass dieselbe von einer fortschreitenden Aenderung in der Natur des Dielektricums herrührt, von einer eigentümlichen Deformation unter dem Einfluss der die Polarisation hervorrufenden Ursachen, einer Deformation, die dauernd wird wie in einem unvollkommen elastischen Körper, der ja, deformirt, nicht unmittelbar, sobald die Ursache zu wirken aufhört, zu seinem ursprünglichen Zustande zurückkehrt.

Was diese Anschauungsweise noch bestätigt, ist, dass alle Umstände die in dem Falle einer mechanischen Deformation die Rückkehr eines Körpers zu seinem Normalzustande erleichtern, wie Stösse, starke plötzliche Temperaturänderungen etc., in gleicher Weise das Verschwinden des elektrischen Rückstandes und die Rückkehr zum neutralen Zustande zu beschleunigen scheinen.

110. Polarisation des Dielektricums. — Wenn auch der Versuch Faraday's nicht zur Entscheidung der Frage über die Fern- oder Contaktwirkungen ausreicht, so stellt er doch in unzweideutiger Weise die active Rolle klar, die das Medium in den elektrischen Erscheinungen spielt. Man wird so zu der Annahme geführt, dass unter dem Einflusse der Elektricität das Mittel in einen Polarisationszustand versetzt wird, der demjenigen analog ist, den man im weichen Eisen unter dem Einflusse eines Magneten erkennt.

Poisson hat zur Erklärung des Magnetismus eine Hypothese ersonnen, die von Mossotti auf das Studium der elektrischen Erscheinungen übertragen und dann von Faraday adoptirt worden ist. Diese Hypothese besteht in der Annahme, dass das magnetische oder dielektrische Mittel aus Partikeln, beispielsweise kugelförmigen, besteht, die absolut leitend sind und in ein nicht leitendes Mittel eingestreut sind.

„Man stelle sich den ganzen eine Kugel ausfüllenden Raum als aus einem Dielektricum wie Luft oder Terpentinöl bestehend vor, von sphärischen Leitern, wie Flintenkugeln, durchsetzt, die sämmtlich von einander isolirt sind, und man erhält sowohl vom Gesichtspunkte der Constitution als von dem der Eigenschaften das genaue Bild dessen, was ich als Constitution und Eigenschaften des Dielektricums selbst betrachte. Ladet man die Kugel, so erhalten alle diese kleinen Leiter zwei Pole; entladet man dieselbe, so kehren sie in den natürlichen Zustand zurück, um sich von Neuem zu polarisiren, so oft man die Kugel wieder ladet.“ (Faraday, *Experimental Researches* Ser. XIV. § 1679.)

Sir W. Thomson hat gezeigt, dass es, ohne irgend eine Annahme über die Constitution des Mittels zu machen, ausreicht anzunehmen, was man als eine experimentell festgestellte Thatsache ansehen kann, dass jedes Volumenelement durch Induction in einen kleinen Magneten verwandelt wird; man erhält so alle mathematischen Consequenzen der Poisson'schen Hypothese.

111. Definition des Dielektricums. — Ein in ein elektrisches Feld gebrachtes Dielektricum polarisirt sich, und die algebraische Summe der Massen, aus denen die Ladung sich zusammensetzt, ist Null. Wir wissen ferner (**59**), dass, welches auch der Zustand eines elektrischen Körpers sei, die Wirkung, die derselbe auf einen äusseren Körper ausübt, gleich ist der einer Schicht von derselben Gesammtmasse, die auf einer Fläche nach einem bestimmten Gesetze verteilt ist; in dem vorliegenden Falle besteht also die äquivalente Schicht aus zwei Schalen, welche gleich stark aber entgegengesetzt geladen zu denken sind.

Nach der Theorie der magnetischen Induction, die wir später auseinandersetzen werden, ersetzt die Wirkung dieser Schicht nicht nur für die äusseren, sondern auch für die inneren Punkte die Wirkung der Polarisation; die Verteilung ist bestimmt durch die Bedingung, dass in zwei benachbarten Punkten, von denen der eine sich im Dielektricum, der andere ausserhalb desselben befindet, die zur Trennungsfläche normalen Kraftcomponenten in einem constanten Verhältnisse μ stehen; bezeichnet man mit F'_n und F_n die normalen Kraftcomponenten innerhalb und ausserhalb des Dielektricums, wobei beide in derselben Richtung zu messen sind, so ist

$$(1) \qquad \frac{F_n}{F'_n} = \mu \text{ oder } F_n = \mu . F'_n .$$

Ohne für den Augenblick tiefer in die Natur der Erscheinungen einzudringen, kann man diese Gleichung (1) als die Definition der Rolle einer

bestimmten Klasse von Körpern auffassen, zu der, wie die Erfahrung zeigt, die Dielektrica, wie wir sie kennen, gehören müssen.

Wir haben (**39**) gesehen, dass zu beiden Seiten einer elektrischen Fläche die der Fläche parallelen Kraftcomponenten gleich sind, und dass die Differenz der normalen Componenten der Dichte der Schicht proportional ist, also

$$F'_n - F_n = 4\pi\sigma$$

ist. Man folgert hieraus

$$-\sigma = \frac{1}{4\pi}(F_n - F'_n) = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{F_n}{4\pi}.$$

Die Poisson'sche Hypothese kommt demnach schliesslich darauf zurück, auf der Oberfläche des Dielektricums eine *ideale* Schicht anzunehmen, deren Dichte σ dieser Bedingung genügt.

112. — Dieses Resultat kann in anderer Form dargestellt werden. Wir construiren zu beiden Seiten des Elementes PP' oder dS des Dielektricums (Fig. 24) zwei Kraftröhren und begrenzen dieselben durch rechtwinklig zu

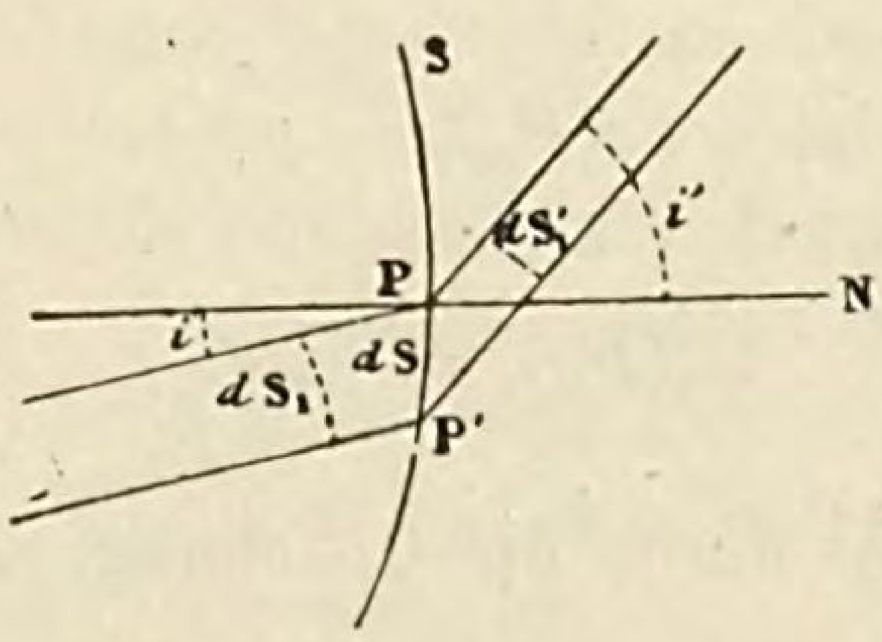


Fig. 24.

ihnen stehende Grundflächen dS_1 und dS'_1, von denen die eine in der Luft, die andere im Dielektricum liegt, und die nur so weit von einander entfernt sind, dass sie die Schicht σdS zwischen sich fassen. Die Kraftströmung, die durch die Grundfläche dS_1 eintritt, ist $FdS_1 = F_n dS$; diejenige, welche durch dS'_1, austritt, ist $F'dS'_1 = F'_n dS$; die Aenderung der Strömung ist demnach gleich $(F_n - F'_n)dS$ oder wegen der Gleichung (1), welche das Dielektricum definirt, gleich $\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)F_n dS$; dieselbe entspricht einer elektrischen Masse σdS, so dass man erhält

$$\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)F_n = -4\pi\sigma.$$

Die Erscheinungen verlaufen also so, als wenn ein constanter Bruchteil der Kraftströmung durch die ideale Oberflächenschicht absorbirt würde; dieser Bruch hat den Wert $\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$.

113. Brechung der Strömung. — Da die tangentialen Componenten in beiden Mitteln dieselben bleiben, so ergeben, wenn mit i und i' die Winkel der Kräfte F und F' gegen die Normale N der Fläche S bezeichnet werden, die Beziehungen

$$F \cos i = \mu F' \cos i'$$
$$F \sin i = F' \sin i'$$

die Gleichung

$$\operatorname{tang} i = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg} i',$$

welche das aussprechen, was man das Brechungsgesetz für die Kraft oder die Strömung nennen kann für den Eintritt der Kraft aus der Luft in ein festes oder flüssiges Dielektricum.

114. — Nehmen wir allgemeiner an, dass die Fläche S zwei feste oder flüssige Dielektrica trennt, deren specifische inductive Capacitäten bez. sind μ_1 und μ_2, so ist das Verhältnis der normalen Componenten $(F_n)_1$ und $(F_n)_2$ zu beiden Seiten der Fläche gleich dem umgekehrten Verhältnisse der specifischen inductiven Capacitäten, woraus sich ergiebt

$$\frac{(F_n)_1}{(F_n)_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

oder

(2) $$\mu_1 (F_n)_1 = \mu_2 (F_n)_2.$$

Die ideale Schicht ist durch die Gleichung bestimmt

$$(F_n)_2 - (F_n)_1 = 4\pi\sigma,$$

und das Brechungsgesetz giebt für die Winkel i_1 und i_2 der Kräfte gegen die Normale zu beiden Seiten der Fläche die Beziehung

$$\frac{\operatorname{tg} i_1}{\mu_1} = \frac{\operatorname{tg} i_2}{\mu_2}.$$

115. Röhren und Strömung der Induction. — Wir wollen *Induction in einem Punkte das Produkt der Kraft F in die specifische inductive Capacität* μ der Substanz in dem betrachteten Punkte nennen und *Menge* der *Induction* durch ein Flächenelement das Produkt dieses Elementes in die normale Induction; die zuletzt erhaltenen Resultate können dann in sehr einfacher Weise ausgesprochen werden.

Wir bemerken zunächst, dass in den gasförmigen Medien oder wenigstens im luftleeren Raume $\mu = 1$ ist; die Induction und die Kraft haben hier denselben numerischen Wert, und es besteht eine Identität zwischen Kraftröhren und den Inductionsröhren ebenso wie zwischen diesen beiden Arten der Strömung.

In dem Falle zweier an einander grenzender Medien von den specifischen inductiven Capacitäten μ_1 und μ_2 ergiebt die Beziehung zwischen den normalen Componenten

$$\mu_1 F_1 \cos i_1 = \mu_2 F_2 \cos i_2$$

die Gleichung

$$\mu_1 F_1 dS \cos i_1 = \mu_2 F_2 dS \cos i_2,$$

eine Gleichung, welche besagt, dass die Induction, die durch das Element dS geht, denselben Wert in beiden Mitteln besitzt. Wir kommen so zu folgendem Gesetze:

In einer Inductionsröhre behält die Induction ihren constanten Wert, welches auch die dielektrischen Medien sein mögen, durch welche dieselbe geht, sobald sie nur auf keine wirklich elektrischen Körper stösst. Dieses Gesetz fällt mit demjenigen von der *Constanz der elektrischen Strömung* zusammen, wenn man nur ein Medium in Betracht zieht.

Trifft die Röhre auf eine in dem dielektrischen Medium gelegene Elektricitätsmenge m, so kann man diese Masse stets als durch eine Luftschicht vom Dielektricum getrennt auffassen; in dieser Schicht fällt die Inductionsströmung mit der Kraftströmung zusammen; da diese sich um $4\pi m$ ändert, ist dies wegen des eben bewiesenen Satzes auch mit der Induction der Fall.

116. Charakteristische Gleichungen der Induction. — Wendet man diesen Satz auf ein in einem Dielektricum, dessen specifische Capacität μ ist, gelegenes Volumenelement $dx dy dz$ in einem Punkte an, in welchem die thatsächliche Dichte der Elektrisirung ρ ist, so erhält man folgende Gleichung, welche derjenigen von Poisson analog ist,

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial z}\right) + 4\pi\rho = 0.$$

Da wir vorläufig nur die isotropen Medien in Betracht ziehen, ist der Factor μ constant, und diese Gleichung reducirt sich auf

$$\mu \Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

Auf der Trennungsfläche zweier Medien sind zwei Dichten zu unterscheiden: die Dichte σ der idealen Schicht, die man auf der Trennungsfläche der Dielektrica annehmen muss, um für jeden ausserhalb dieser Fläche gelegenen Punkt die der inneren Polarisation derselben äquivalente Wirkung zu erhalten, und die Dichte σ' der wirklich vorhandenen Schicht, die man beispielsweise durch Reibung auf derselben Fläche etwa entwickelt hat.

Man erhält dann für die Trennungsfläche der beiden Mittel die Gleichungen

$$(F_n)_2 - (F_n)_1 = 4\pi(\sigma + \sigma').$$

$$\mu_2 (F_n)_2 - \mu_1 (F_n)_1 = 4\pi\sigma'.$$

Misst man die Normalen in jedem Mittel von der Fläche aus, und bezeichnet man die bez. Werte des Potentials in den beiden Medien mit V_1 und V_2, so können diese Gleichungen geschrieben werden

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \frac{\partial V_2}{\partial n_2} + 4\pi(\sigma + \sigma') = 0,$$

$$\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} + 4\pi\sigma' = 0.$$

Die inductive Capacität μ ist stets positiv und grösser als Eins; sie kann in den Leitern für unendlich gross angesehen werden.

117. — Für den Fall, dass die Dielektrica weder im Innern noch auf der Oberfläche irgend welche Elektricität erhalten haben, gehen diese Gleichungen über in

$$\Delta V = 0,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \frac{\partial V_2}{\partial n_2} + 4\pi\sigma = 0,$$

$$\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\sigma = \frac{\mu_1 - \mu_2}{4\pi\mu_2} \frac{\partial V_1}{\partial n_1}.$$

118. Bemerkungen über die ideale Schicht. — Obwohl die Schicht von der Dichte σ nur eine gedachte ist, muss dennoch hervorgehoben werden, dass, wenn man, während das Dielektricum der Induction ausgesetzt ist, dessen Oberfläche durch irgend einen Prozess, beispielsweise durch Hindurchführen desselben durch eine mit der Erde verbundene Flamme, auf den neutralen Zustand bringt, man, sobald man dann die inducirenden Massen entfernt, auf dieser Fläche eine reelle Schicht von der Dichte $-\sigma$ findet.

Diese Bemerkung liefert eine Erklärung für die Erscheinungen, die gewisse Körper, wie die einachsigen pyroelektrischen Krystalle, wie das Turmalin, zeigen. Man braucht nur anzunehmen, dass der Normalzustand dieser Körper analog dem ist, den die Dielektrica unter dem Einfluss elektrischer Kräfte annehmen, d. h. dass sie *natürlich polarisirt* sind, und dass *ihr Polarisationszustand eine Funktion der Temperatur ist.*

Ein neutral erscheinender Turmalinkrystall ist ein solcher, der vermöge seiner Polarisation ausserhalb dieselben Kräfte hervorruft, wie eine auf seiner Oberfläche verteilte Schicht von der Gesammtmasse Null und der Dichte $+\sigma$, der aber infolge irgend welcher Ursachen, beispielsweise durch Verlust infolge des Contacts mit dem umgebenden Mittel, sich mit einer reellen Schicht von der Dichte $-\sigma$ bedeckt hat, welche für jeden äusseren Punkt die Wirkung der inneren Polarisation aufhebt. Aendert man die Temperatur

des Turmalinkrystalles, so ändert man den inneren Zustand desselben, ohne die auf der Oberfläche entwickelte Schicht zu modificiren; das Gleichgewicht ist gestört und kann mehr oder weniger langsam unter der Wirkung derjenigen Ursachen wiederhergestellt werden, welche die frühere Neutralisirung herbeigeführt hatten; die unter diesen Umständen beobachtete Wirkung ist die Differenz der Wirkungen der idealen und der wirklichen Schicht.

119. Ladungen zweier correspondirender Elemente. — Der Satz über die correspondirenden Elemente (**36**) ist noch richtig, wenn die beiden Leiter sich in verschiedenen Medien befinden. Um dies einzusehen, genügt die Bemerkung, dass man sich stets den Leiter vom Dielektricum durch eine unendlich dünne Luftschicht getrennt denken kann, die zwischen der Oberfläche des Leiters selbst und einer unendlich nahen Niveaufläche liegt.

Sind A und B die beiden Leiter, μ_1 und μ_2 die inductiven Kräfte der Dielektrica, mit welchen dieselben bez. in Contact sind, hat ferner die Trennungsfläche S der beiden Dielektrica keine reelle elektrische Schicht, so ist die Induction in der ganzen Ausdehnung des orthogonalen Kanals, der auf den Leitern und auf dieser Fläche bezw. die Elemente dS_a, dS_b und dS ausschneidet, die nämliche.

Die Kraft, die in der Luft am ersten Leiter F_a wäre, ist im Dielektricum $F_1 = \frac{F_a}{\mu_1}$.

Die auf dem Leiter zu Tage tretende Dichtigkeit σ'_a, d. h. diejenige, welche die Kraft F_1 vermöge der bekannten Gleichung $4\pi\sigma'_a = F_1$ liefert, ist gleich dem Ueberschuss der wirklichen Dichte σ_a des Leiters über die gedachte σ_1 an der ihn umgebenden Oberfläche des Dielektricums, man erhält hieraus

$$\sigma'_a = \sigma_a - \sigma_1 = \frac{\sigma_a}{\mu_1},$$

oder

$$\sigma_1 = \sigma_a\left(1 - \frac{1}{\mu_1}\right).$$

Ebenso erhält man an der Berührungsstelle des Leiters B

$$\sigma'_b = \sigma_b - \sigma_2 = \frac{\sigma_b}{\mu_2},$$

$$\sigma_2 = \sigma_b\left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right).$$

Besitzt die Fläche S eine reelle Schicht von der Dichte σ', während die ideale Schicht die Dichte σ besitzt, so genügen die Normalkräfte zu beiden Seiten der Gleichung

$$(F_n)_2 - (F_n)_1 = 4\pi(\sigma + \sigma').$$

In den beiden Mitteln ist ferner beziehungsweise

$$F_1 dS_a = (F_n)_1 dS,$$
$$F_2 dS_b = (F_n)_2 dS.$$

Indem man die Kräfte F_1 und F_2 durch ihre Werte $4\pi\sigma'_a$ und $4\pi\sigma'_b$ ersetzt, erhält man

$$\sigma'_b dS_b - \sigma'_a dS_a = (\sigma + \sigma') dS.$$

Diese Gleichung besagt, dass *die Differenz der zu Tage tretenden Ladungen der correspondirenden Elemente zweier Leiter gleich der Gesammtladung des entsprechenden Elementes der Trennungsfläche der beiden Dielektrica ist.*

120. Energie eines Systems in dem Falle beliebiger Dielektrica. — Der allgemeine Ausdruck für die Energie ist, wie wir gesehen haben (**107**),

$$W = \frac{1}{2} \sum m V = \frac{1}{2} \int V \rho dv.$$

Die Gleichung

$$\mu \Delta V + 4\pi\rho = 0$$

ergiebt

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int \mu V \Delta V dv.$$

Nach dem Green'schen Satze und der bereits (**107**) gemachten Bemerkung reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mu F^2 dv.$$

Man erhält also für die Energie der Volumeneinheit

$$w = \frac{1}{8\pi} \mu F^2.$$

121. Vergleich mit den Wärmeerscheinungen. — Wir nehmen den Vergleich der Aufgabe über das elektrische Gleichgewicht mit der über die Fortpflanzung der Wärme wieder auf. Wir haben gesehen (**70**), dass zwischen denselben beiden Niveauflächen, wenn der Coefficient der Leitungsfähigkeit der Einheit gleich ist, die Wärmeströmung in der letzteren Aufgabe numerisch gleich der Kraftströmung in der ersten ist; wenn der Coefficient der Leitungsfähigkeit k ist, ist die Wärmeströmung k mal so gross, als die elektrische Kraftströmung.

Wir ziehen jetzt zwei entsprechende Systeme, ein elektrisches und ein thermisches in Betracht, deren jedes aus zwei durch dieselbe Fläche S von einander getrennten Medien besteht; die äquipotentiellen Flächen des einen Systems sollen mit den isothermen Flächen des andern zusammen-

fallen. Sind k_1 und k_2 die Coefficienten der Leitungsfähigkeit in den beiden Mitteln, so ist die Wärmeströmung durch ein Element dS der Trennungsfläche hindurch im ersten Medium

$$k_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} dS,$$

und im zweiten

$$-k_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} dS.$$

Wenn das thermische Gleichgewicht als erreicht angenommen werden kann, sind die beiden Strömungen gleich, und man erhält

$$k_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0.$$

Das elektrische System ergiebt ebenso

$$\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0.$$

Man schliesst hieraus

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Die Induction ist demnach der Wärmeströmung proportional, wobei die specifische inductive Capacität in der elektrischen Aufgabe dieselbe Rolle spielt, wie der Coefficient der Leitungsfähigkeit in der Aufgabe über die Wärme.

122. Aenderung des Potentials durch Zwischenschiebung eines Dielektricums. — Bringt man (**96**) einen leitenden Körper in ein von isolirten und elektrisirten Leitern hervorgerufenes elektrisches Feld, so bewirkt die Anwesenheit dieses neuen Körpers eine Verkleinerung des ursprünglichen Potentials auf jedem der Leiter. Die Einbringung eines festen oder flüssigen Dielektricums ruft dieselbe Wirkung nur in geringerem Grade hervor.

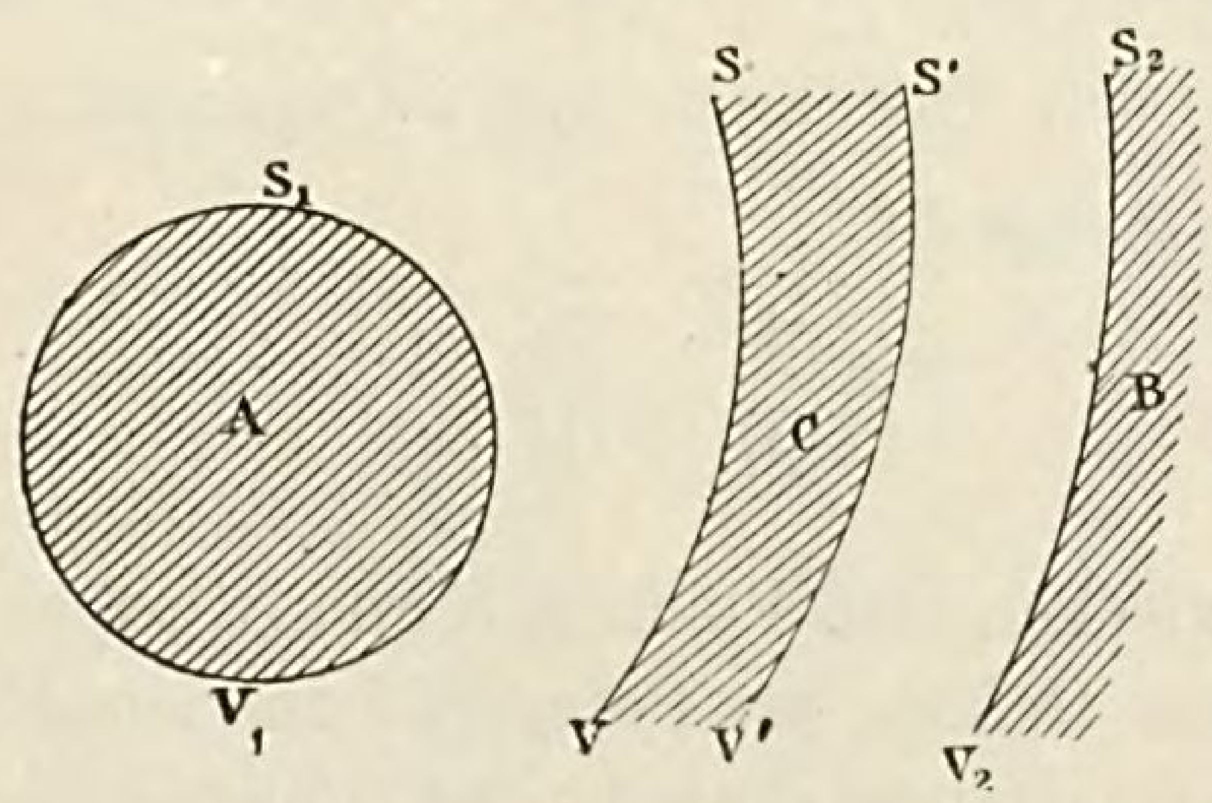


Fig. 25.

Wir fassen als Beispiel den Fall eines Leiters A (Fig. 25) ins Auge, der mit einer Elektricitätsmenge M_1 geladen ist und innerhalb eines ge-

schlossenen Leiters B liegt, der auf constantem Potential V_2 gehalten wird. Sobald das Gleichgewicht hergestellt ist, befestigen wir die elektrischen Massen auf A und B und bringen in den Zwischenraum eine dielektrische Schicht C von der inductiven Capacität μ, deren innere Oberfläche S und deren äussere S' Niveauflächen des ursprünglichen Systems sind, auf denen die Potentiale bez. V und V' sind. Man sieht leicht, dass das Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn man auf den Flächen S und S' elektrische Ladungen $-M$ und $+M$ verteilt, die genau ebenso gross sind, wie diejenigen, die hervorgerufen worden wären, wenn das eingeführte Mittel ein Leiter wäre, und wenn die ursprüngliche Ladung von A durch M ersetzt worden wäre.

Denn die Ladungen $+M$ auf A, $-M$ und $+M$ auf C und $-M$ auf B rufen auf den Körpern A, B und C constante Potentiale hervor; andererseits geben die entgegengesetzt gleichen Schichten $+M_1$ und $-M_1$ constante Potentiale auf den Leitern A und B, so dass diese sich im Gleichgewicht befinden. Die Form der zwischen den Leitern A und B liegenden Niveauflächen wird nicht geändert, und die Kraft hat überall ihre Richtung beibehalten.

Von der Fläche S_2 bis zur Fläche S' ist der Zuwachs des Potentials derselbe, als wenn die Schicht C nicht vorhanden wäre; ebenso ist die Aenderung von S bis S_1 dieselbe geblieben.

Um den vom Dielektricum ausgeübten Einfluss zu bestimmen, denken wir uns einen senkrechten Kanal, der auf den Flächen S_1 und S die Elemente dS_1 und dS ausschneidet, auf welchen die Dichten dem absoluten Werte nach σ_1 und σ sind. Die von dem Elemente dS_1 ausgehende Kraftströmung wird zum Teil auf dem Elemente dS absorbirt, und der verlorene Bruchteil ist

$$\frac{4\pi\sigma dS}{4\pi\sigma_1 dS_1}.$$

Da dieser Bruch gleich $1-\frac{1}{\mu}$ (112) sein muss, so folgt, dass das Verhältnis der Ladungen σdS und $\sigma_1 dS_1$ zweier correspondirender Elemente ebenfalls $1-\frac{1}{\mu}$ ist. Die Gleichgewichtsbedingung für das Dielektricum ist also erfüllt, wenn man macht

$$\frac{M}{M_1} = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

Da die Kraft zwischen den Flächen S und S' μmal so schwach geworden ist, hat sich auch das Gefälle des Potentials in demselben Verhältnisse verkleinert, so dass der Gesammtzuwachs des Potentials, wenn man jetzt von B bis A geht, wird

$$V' - V_2 + \frac{1}{\mu}(V - V') + V_1 - V = V_1 - V_2 - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)(V - V').$$

Bezeichnet man mit U_1 das neue Potential des Leiters A, so erhält man

$$U_1 - V_2 = V_1 - V_2 - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)(V - V').$$

Wäre der zwischengeschobene Körper ein Leiter, so wäre der Potentialverlust des Leiters A $V - V'$. Die Einführung des Dielektricums verursacht also ebenfalls ein Sinken des Potentials auf dem Leiter A, und die Abnahme ist gleich dem Bruchteile $1 - \frac{1}{\mu}$ der Abnahme, die von einem Leiter hervorgerufen worden wäre, der dieselben Dimensionen wie das Dielektricum hat. Immerhin ist dieses einfache Resultat durch die gewählten Bedingungen bestimmt; es wäre ein anderes, wenn das Dielektricum nicht von Niveauflächen des ursprünglichen Systems begrenzt wäre.

123. — Nimmt das Dielektricum den ganzen Raum zwischen den beiden Leitern A und B ein, so dass also ein geschlossener Condensator entsteht, so ist $V = V_1$, $V' = V_2$, und es ergiebt sich

$$U_1 - V_2 = \frac{1}{\mu}(V_1 - V_2).$$

Für dieselbe Ladung wird die Potentialdifferenz μ mal so klein, wenn man die Luftschicht durch ein Dielektricum ersetzt, dessen specifische inductive Capacität μ ist. In andern Worten: die Capacität des Systems ist μ mal so gross geworden. Dies ist genau das, was Faraday durch seine Versuche nachgewiesen hat.

Die oben (**119**) gemachte Bemerkung giebt dies Resultat unmittelbar. Die Einführung eines Dielektricums von der specifischen inductiven Capacität μ in den ganzen Raum, der die Leiter A und B von einander trennt, ändert die Form der Niveauflächen nicht, aber die scheinbare Dichte in jedem Punkte wird μ mal so klein als die wirkliche Dichte; die Erscheinungen verlaufen demnach so, als wenn das System unter Beibehaltung seiner ursprünglichen Capacität eine μ mal so kleine Ladung erhalten hätte.

124. — Man kann sich die Vorgänge in dem eben behandelten Falle auch noch anders vorstellen.

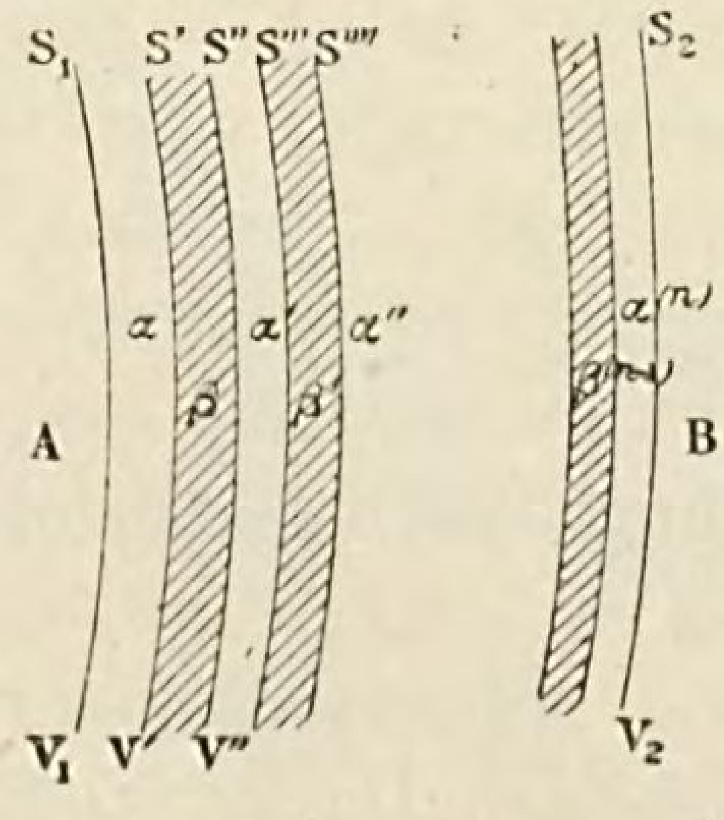


Fig. 26.

Wir denken uns das zwischen den Leitern A und B (Fig. 26) befindliche Dielektricum durch Niveauflächen des ursprünglichen Systems in eine

ungerade Anzahl unendlich dünner Blätter α, β, α', β' ... so geteilt, dass die Aenderung des Potentials beziehungsweise in allen Schichten α ebenso wie in allen Schichten β dieselbe ist, und dass man folglich erhält

$$(6)\qquad \begin{aligned} V_1 - V' &= V'' - V''' = \cdots H_\alpha, \\ V' - V'' &= V''' - V^{IV} = \cdots H_\beta \end{aligned}$$

Nun bringen wir auf jedes dieser Blätter Ladungen, die ihrem absoluten Werte nach denen gleich sind, die sich auf den Flächen S_1 und S_2 der Leiter befinden, abwechselnd positive und negative, $+M$ auf die Blätter ungerader und $-M$ auf die Blätter gerader Ordnung, während alle diese Schichten unter dem Einflusse der ursprünglichen Leiter A und B als im Gleichgewicht befindlich vorausgesetzt sind.

Es ist klar, dass das so erhaltene System sich ebenfalls im Gleichgewichte befindet. Die Kraft ist auf den Blättern ungerader Ordnung α, α', α''... nicht geändert, da durch die Hinzufügung der Ladungen $+M$ die Potentialdifferenzen nicht geändert werden, sie ist aber Null in allen Blättern ungerader Ordnung β, β', β''..., und das Potential ist in diesen Blättern constant. Es ist so, als wenn alle Blätter gerader Ordnung durch leitende Schichten ersetzt wären.

Diese Operation hat die Potentialdifferenz zwischen A und B verkleinert. Denn von der Fläche S_1 bis S'' ist die Potentialdifferenz, die ursprünglich $V_1 - V''$ gewesen ist, $V_1 - V'$ geworden, und man erhält

$$\frac{V_1 - V'}{\alpha} = \frac{V_1 - V''}{\alpha + \beta}$$

oder

$$V_1 - V' = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(V_1 - V'').$$

Ebenso hat sich zwischen S'' und S^{IV} die ursprüngliche Potentialdifferenz $V'' - V^{IV}$ reducirt auf

$$V'' - V''' = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'}(V'' - V^{IV}).$$

Die Verhältnisse

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'}, \quad \ldots$$

sind für die ganze Ausdehnung des Dielektricums dieselben, und man kann setzen

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta'} = \ldots = \frac{1}{\mu}.$$

Führt man die Rechnung in derselben Weise weiter fort, so sieht man, dass das Potential von der Fläche S_1 bis zur Fläche S_2 μ mal weniger

schnell als im ursprünglichen Zustande sich ändert, so dass die Potentialdifferenz der beiden Flächen S_1 und S_2 infolge der Einschaltung des Dielektricums geworden ist

$$U_1 - U_2 = \frac{1}{\mu}(V_1 - V_2),$$

ein Resultat, welches mit dem vorher erhaltenen vollkommen übereinstimmt.

Bei dieser Darstellungsweise erhält der Coefficient μ eine physikalische Bedeutung; er ist das Verhältniss $\frac{\alpha + \beta}{\alpha}$ der Summe der Dicken zweier benachbarter Blätter gegen die Dicke desjenigen von beiden, welches ungerader Ordnung ist. Wie die Erfahrung zeigt, haben aber mehrere feste Dielektrica eine specifische inductive Capacität nahe gleich 2, woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle das Verhältniss $\frac{\alpha}{\beta}$ zweier benachbarter Blätter der Einheit gleich ist.

125. — Die Erfahrung zeigt aber auch — die Untersuchungen Gaugain's über diesen Gegenstand sind besonders interessant — dass die specifische inductive Capacität sich mit der Zeit ändert. Dieselbe hat in dem Augenblicke der Ladung ihren kleinsten Betrag, wächst dann schnell und endlich langsam an, um sich einer oberen Grenze asymptotisch zu nähern. In andern Worten: das Potential der inneren Belegung eines Condensators nimmt anfangs unmittelbar nach der Ladung schnell, dann langsamer ab.

Da die Kraft in jedem der Blätter β, β', β'' ... Null ist, sieht man, dass die positiven Schichten stets nach aussen, die andern nach innen gestossen werden, und dass infolge ihrer gegenseitigen Einwirkung die Schichten, welche die Blätter α begrenzen, sich einander zu nähern streben, was die inducirende Kraft immer mehr vergrössert.

Durch Verallgemeinerung dieser Auffassungsweise gelangt man dazu, den Leitern eine unendlich grosse specifische inductive Capacität beizulegen.

126. Maxwell's Theorie der Verschiebung. — Um die Eigenschaften der Dielectrica zu erklären und um den Erscheinungen durch die blosse Wirkung des Mediums Rechnung zu tragen, stellt sich Maxwell vor, dass, wenn ein Dielektricum der Induction ausgesetzt wird, eine Erscheinung hervorgerufen wird, welche einer *Verschiebung* oder einem *Gleiten* der Elektricität in Richtung der Induction äquivalent ist. Beispielsweise erfolgt in einer Leydener Flasche, deren innere Belegung positiv geladen wird, die Verschiebung in der Glasmasse von innen nach aussen.

Jede Verstärkung der Ladung vergrössert die Verschiebung und entspricht einem Strome der positiven Elektricität von innen nach aussen, jede Verkleinerung einem von aussen nach innen gehenden Strome; der Strom dauert so lange, als die Aenderung der Ladung anhält.

Die Verschiebung für eine Fläche ist die Elektricitätsmenge, welche durch dieselbe hindurch geht. Ist σdS diese Menge für ein Element dS der

Oberfläche eines Leiters, so ist die Verschiebung gleich $\frac{FdS}{4\pi}$, also gleich der entsprechenden Kraftströmung dividirt durch 4π. Steht der Leiter mit einem Dielektricum in Berührung, so hat die Elektricitätsmenge den Wert $\frac{\mu FdS}{4\pi}$, die Verschiebung ist dann dem Quotienten der Induction durch 4π gleich.

Allgemein *ist die Verschiebung in irgend einem Punkte des Dielektricums dem Quotienten der Induction durch 4π gleich und verläuft der Induction parallel.*

Ein leitender Körper setzt der Verschiebung kein Hinderniss entgegen. In einem Dielektricum ist die Verschiebung durch die Wirkung der entgegenstehenden Kräfte bestimmt, welche die Verschiebung hervorruft, in andern Worten, durch eine Art Elasticität, die man *die elektrische Elasticität* des Mittels nennen kann. Das Gleichgewicht ist hergestellt, sobald die elastische Wirkung in jedem Punkte der elektrischen Kraft gleich ist. Nennt man nach Analogie *Coefficient der elektrischen Elasticität* das Verhältnis der Kraft zu der von ihr hervorgerufenen Verschiebung und nimmt man an, dass das Mittel vollkommen elastisch ist, so ist, wie man sieht, der Elasticitätscoefficient gleich $\frac{4\pi}{\mu}$ und folglich die specifische inductive Capacität dem elektrischen Elasticitätscoefficienten des Mittels umgekehrt proportional.

Gerade die von der Induction durch die gesammte Masse des Dielektricums hindurch hervorgerufene Verschiebung bestimmt die Polarisation des Mittels und die zu Tage tretende Elektrisirung der Leiter.

Wir fassen eine Inductionsröhre zwischen zwei Leitern ins Auge. In der ganzen Ausdehnung der Röhre ist die Verschiebung constant; jeder Normalschnitt wird von derselben Elektricitätsmenge durchsetzt. An dem einen Ende geht die Verschiebung vom Leiter nach dem Dielektricum hin vor sich, man sagt dann, dass das entsprechende Element dS des Leiters mit positiver Elektricität von der Dichte σ geladen ist; am andern Ende erfolgt die Verschiebung vom Dielektricum nach dem Leiter hin, das entsprechende Element dS' ist mit einer Dichte $-\sigma'$ geladen. In der ganzen Ausdehnung der Röhre tritt, falls das Dielektricum dasselbe bleibt, keine Elektricität zu Tage; aber dieses Mittel ist polarisirt. Denn denkt man sich einen von zwei Normalschnitten begrenzten Teil der Röhre abgetrennt, so erfolgt die Verschiebung für beide Schnitte in entgegengesetzter Richtung und beide würden in entgegengesetztem Sinne elektrisch erscheinen, wenn ihre Elektrisirung nicht durch die entgegengesetzt gleiche Elektrisirung der benachbarten Teile der Röhre neutralisirt würde. Geht die Röhre durch die Trennungsfläche zweier Dielektrica, so ist zwar die Verschiebung in beiden Mitteln dieselbe, aber die Polarisation ist nicht dieselbe und die Fläche wird eine Elektrisirung zeigen, die der Differenz der elektrischen

Schichten auf den Oberflächen der beiden sich berührenden Medien gleich ist.

Da die Elektrisirung des Leiters stets zu Tage tritt, so ist klar, dass die ganze von der Elektrisirung herrührende Energie in dem Mittel ihren Sitz haben muss. Dieselbe ist der Arbeit gleich, die man aufwenden müsste, um die Verschiebung in dem den elastischen Kräften entgegengesetzten Sinne zu bewirken. Nach dem, was wir (**120**) gesehen haben, hat diese Arbeit für die Volumeneinheit den Wert $\frac{\mu F^2}{8\pi} = \frac{1}{2} \frac{\mu F}{4\pi} \cdot F$; dieselbe ist demnach dem halben Produkt der elektrischen Kraft in die Verschiebung gleich.

Die Maxwell'sche Verschiebungstheorie giebt in genügender Weise von den Eigenschaften des Mittels Rechenschaft.

Sie liefert eine physikalische Erklärung von der specifischen inductiven Capacität Faraday's; die specifische inductive Capacität ist bis auf einen Faktor $\frac{1}{4\pi}$ der reciproke Wert des elektrischen Elasticitätscoeffi cienten des Mittels.

Dieselbe giebt von diesem Gesichtspunkte Faraday's aus die Erklärung dafür, dass es nicht möglich ist, der Materie eine absolute Ladung von Elektricität mitzuteilen; denn nach dieser Theorie verhält sich die Elektricität wie eine incompressible Flüssigkeit; die Menge, die in einer geschlossenen Fläche enthalten sein kann, ist unveränderlich, und die Entstehung zweier entgegengesetzt gleicher Elektricitätsmengen erscheint als Consequenz einer und derselben Erscheinung.

Schliesslich liegt der Gedanke nahe, dass wenn die Erklärung der elektrischen Erscheinungen die Existenz eines incompressibeln Mediums erfordert, das im ganzen Raume verteilt ist, dieses Medium nicht vom Aether verschieden zu sein braucht, dem man die Licht- und Wärmeerscheinungen zuschreibt; diese Theorie gestattet demnach in zwei Klassen von Erscheinungen einen Zusammenhang zu bringen, dessen Bestätigung einer der wichtigsten Fortschritte der Physik wäre.

7. Capitel.

Specielle Fälle des Gleichgewichts.

127. Darstellung des elektrischen Feldes. — Der Zustand eines elektrischen Feldes ist in jedem Punkte durch die Richtung und die Grösse der daselbst wirksamen Kraft bestimmt. Man kann dasselbe entweder durch die *Niveauflächen* oder durch die *Kraftlinien* darstellen.

Im ersten Falle wird man die den numerischen Werten 1, 2, 3 . . . n des Potentials entsprechenden Niveauflächen construiren, also diese Flächen in solchen Entfernungen von einander ziehen, dass der Transport einer Elektricitätseinheit von irgend einer Fläche zur folgenden einer Arbeitseinheit entspricht.

In jedem Punkte ist die Kraft zur Niveaufläche normal; der mittlere Wert F_1 derselben zwischen zwei auf einander folgenden, um a von einander entfernten Niveauflächen ist gegeben durch die Gleichung

$$F_1 a = V_n - V_{n+1} = 1,$$

ist also a umgekehrt proportional.

Man kann diese Flächen durch ein graphisches Verfahren construiren.

Wir wählen zunächst den Fall eines einzigen Kraftcentrums, einen mit der Masse m geladenen Punkt. Das Potential in der Entfernung r ist

$$V = \frac{m}{r};$$

die Gleichung

$$r = \frac{m}{V}$$

bestimmt den Radius der Kugel, deren Potential V ist. Geben wir V die Werte 1, 2, 3 . . . n, und construiren wir die entsprechenden Kugeln, so erhalten wir die Niveauflächen, deren Potentiale der natürlichen Zahlenreihe entsprechen.

128. — Wir nehmen jetzt mehrere Massencentren m, m', m'' ... an, welche gleichzeitig wirken; da das resultirende Potential in einem Punkte die Summe der von den einzelnen Centren herrührenden Potentiale ist, so ist klar, dass die Punkte vom Potential V_p erhalten werden als die Schnittpunkte der Kugeln von den Potentialen

$$V_n, \ V_{n'}, \ V_{n''} \ldots,$$

wo

$$n + n' + n'' + \cdots = p,$$

und dass der geometrische Ort aller dieser Punkte die Niveaufläche vom Potentiale V_p ist.

Dieses Verfahren ist allgemein und gestattet, wenigstens in der Idee, die Niveauflächen eines beliebigen Systems zu bestimmen.

Eine Darstellung des Verlaufs der Niveauflächen durch Zeichnung in der Ebene kann in vollkommener Weise nur in dem Falle eines Rotationssystems durchgeführt werden, und zwar durch eine solche in einer beliebigen Meridianebene. Die Kraftlinien verlaufen in der Ebene der Figur, treffen in jedem Punkte senkrecht auf die Meridianschnitte der Niveauflächen, und die Kraft steht im umgekehrten Verhältnisse des Abstandes der Niveaulinien.

Ist das System in Bezug auf eine Ebene symmetrisch, so kann man auch noch eine vollständige Darstellung des Zustandes des Feldes in der Symmetrieebene erhalten. In jedem andern Falle würde irgend ein ebener Schnitt des Systems der Niveauflächen noch eine Reihe von Curven liefern, die natürlich Niveaulinien sind; die Kraftcomponente in der Schnittebene ist in jedem Punkte normal zu diesen Curven und steht im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernung, aber der wirkliche Wert der Kraft ist nicht mehr wiedergegeben.

129. — Die Kraftlinien können ebenfalls eine Darstellung für das Feld liefern. Eine derartige Linie, die in jedem Punkte zur betreffenden Niveaufläche normal ist, zeigt bereits die Richtung der Kraft an; um gleichzeitig die Intensität darzustellen, wollen wir das Feld in solche Kraftröhren teilen, dass die Strömung, die jeder von ihnen entspricht, einen constanten, beispielsweise der Einheit gleichen Wert besitzt.

Es genügt, wenn eine Niveaufläche gegeben ist, dieselbe so in Elemente dS zu teilen, dass $FdS = 1$ ist, und jedes dieser Elemente als Basis eines senkrechten Kanals zu wählen.

Die Teilung ist eine willkürliche, und man wird in jedem Falle die wählen, welche zu den einfachsten Constructionen führt.

130. Gleichförmiges Feld. — In dem Falle eines *gleichförmigen Feldes* sind die Niveauflächen äquidistante, zur Kraftrichtung senkrechte Ebenen. Die einfachste Teilung besteht dann darin, zwei Reihen von zu einander senkrechten und zur Kraftrichtung parallelen Ebenen zu legen. Die Niveauflächen werden dann in gleiche Rechtecke zerschnitten.

Jeder Schnitt durch eine der Richtung des Feldes parallele Ebene giebt dann zwei Systeme von äquidistanten Kraftlinien, welche durch die Schnitte der Ebene der Figur mit den beiden Reihen der zu den Niveauflächen normalen Ebenen wiedergegeben sind.

131. Gegen eine Ebene symmetrisches Feld. — Für alle Punkte der Symmetrieebene ist die Kraft dieser Ebene parallel; man kann die Kraftlinien

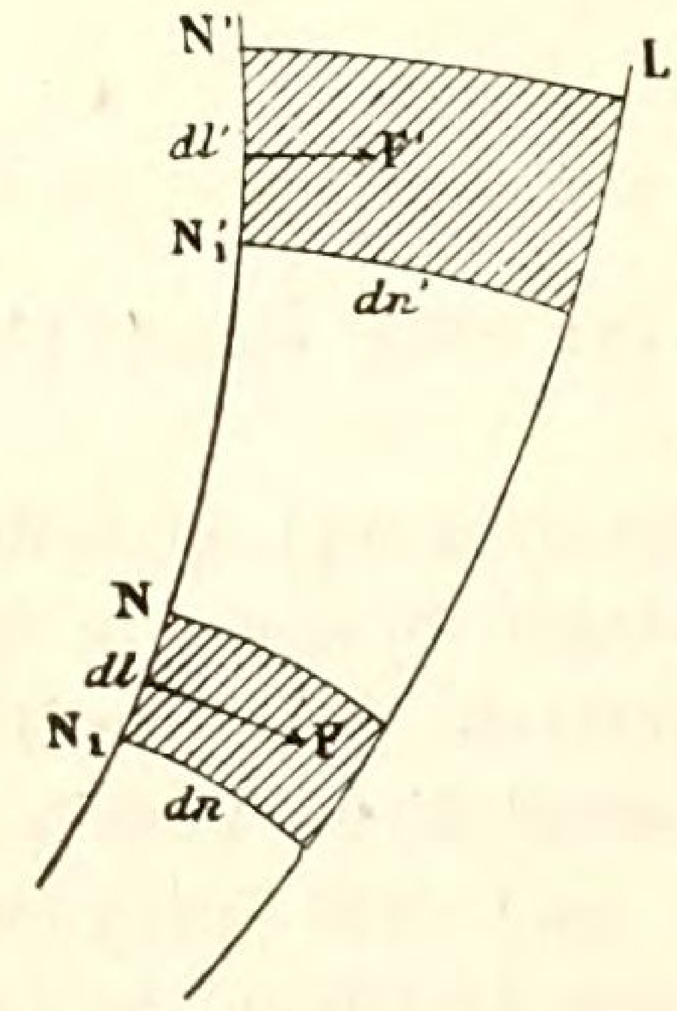


Fig. 27.

in dieser Ebene so ziehen, dass das Produkt der Kraft in die Entfernung *dl* (Fig. 27) zweier auf einander folgender Linien constant ist, dass also

$$Fdl = F'dl'$$

ist; da nun auch

$$Fdn = F'dn',$$

ist, so folgt

$$\frac{dl}{dn} = \frac{dl'}{dn'}.$$

Die krummlinigen Rechtecke $dndl$ und $dn'dl'$, die von den Spuren zweier unendlich naher Niveauflächen L und L' und von zwei Kraftlinien gebildet werden, sind *ähnlich.*

Die Kraftströmungen sind nur dann bestimmt, wenn man die zur Symmetrieebene senkrechten Dimensionen der Röhre in Rechnung zieht. Nimmt man an, dass diese Dimension überall dieselbe ist, so sind die Strömungen nur dann gleich, wenn alle zur Ebene der Figur parallelen Ebenen identisch sind. Dieser Fall ist der einer cylindrischen Verteilung, wo alle Körper des Systems parallele Cylinder sind; derselbe entspricht in der Wärmetheorie der Aufgabe über die *Ausbreitung der Wärme in einer Ebene.* Das Potential oder die Temperatur hängen nur von zwei Coordinaten x und y ab, und die Poisson'sche Gleichung reducirt sich auf

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 4\pi\sigma = 0,$$

wenn σ die elektrische Dichte auf der Ebene bezeichnet.

Wir wollen jetzt diesen speciellen Fall in einigen Einzelheiten untersuchen, weniger wegen seiner eigenen Wichtigkeit, als weil derselbe einen vorteilhaften Uebergang zu schwierigeren Aufgaben bietet.

132. Cylindrische Systeme. — Wir denken uns eine unendliche, gleichförmig zur Dichte λ elektrisirte Linie, d. h. also eine Linie, deren Ladung für die Längeneinheit λ ist. In jedem Punkte des Dielektricums geht dann die Kraft durch die Achse und ist zu derselben normal.

Die von der Längeneinheit ausgehende Kraftströmung ist $4\pi\lambda$; in der Entfernung r durchsetzt diese Strömung die Mantelfläche $2\pi r$ des Cylinders von entsprechendem Niveau, und die Kraft ist durch die Bedingung gegeben

$$2\pi r F = 4\pi\lambda$$

oder

(1) $$F = \frac{2\lambda}{r}.$$

Die Kraft steht also im umgekehrten Verhältnisse der Entfernung, wie wir es schon (**80**) für cylindrische Condensatoren gesehen haben. Die Gleichung

$$F = -\frac{dV}{dr} = \frac{2\lambda}{r}$$

liefert für die Niveauflächen

(2) $$V = -2\lambda l_n r + \text{Const},$$

also eine Reihe concentrischer Cylinderflächen. Legen wir zwei zur Achse senkrechte Ebenen in dem Abstande ε von einander, so ist die von ihnen begrenzte Masse $m = \lambda\varepsilon$. Die Kraftströmung, die zwischen diesen beiden Ebenen hindurchgeht, ist demnach $4\pi m$, und es ist klar, dass, wenn wir durch die Achse $4\pi m$ Ebenen legen, die gleiche Winkel mit einander bilden, jeder der $4\pi m$ so bestimmten Flächenwinkel eine senkrechte Röhre bildet, in welcher die Kraftströmung der Einheit gleich ist.

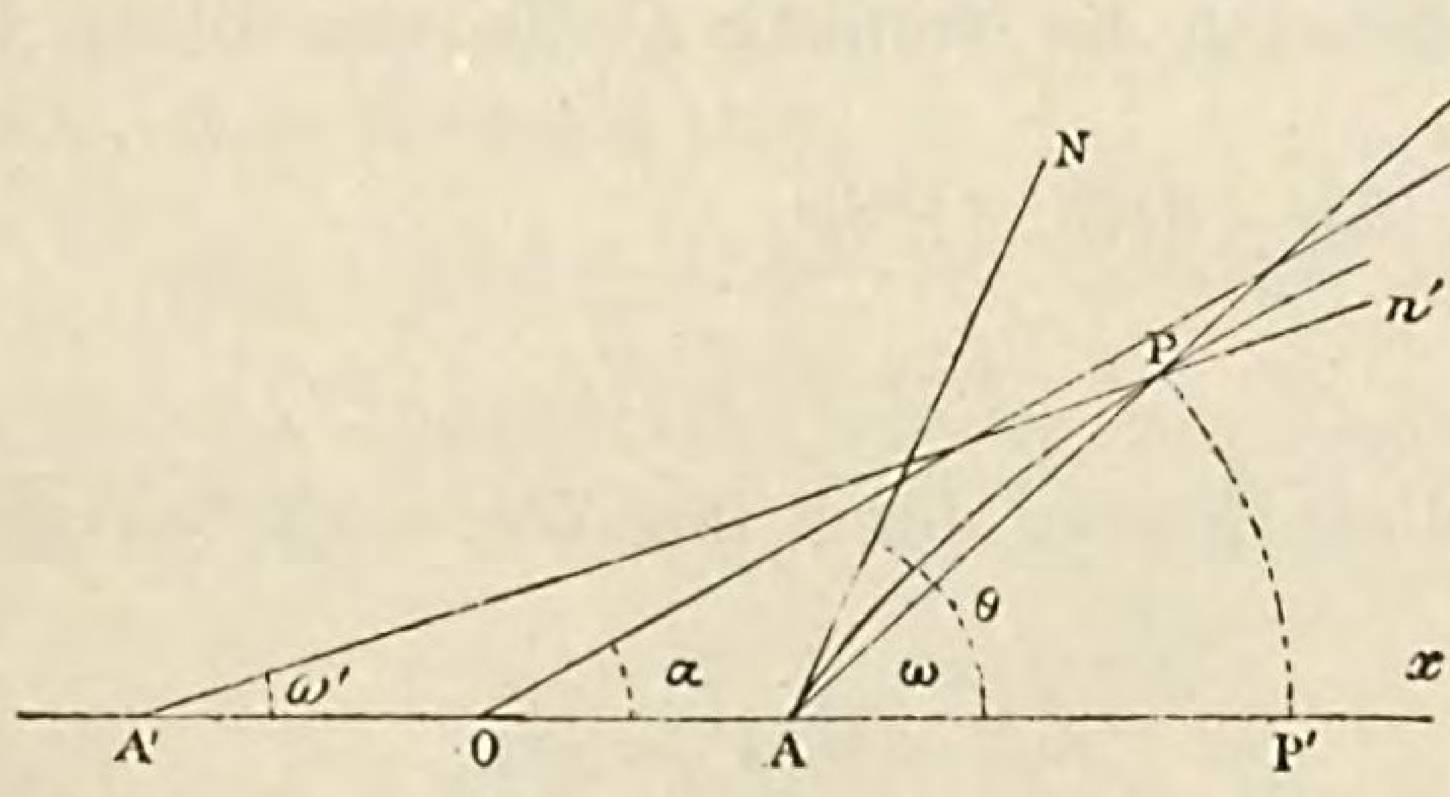


Fig. 28.

Wir wählen als Ebene der Zeichnung eine zur elektrischen Linie senkrechte Ebene. A (Fig. 28) sei die Spur dieser Linie und Ax irgend eine Achse, von der aus wir mit 1, 2, 3 ... die Spuren der $4\pi m$ durch die Linie

gelegten Ebenen numeriren wollen. Ist θ noch der Winkel, den die Gerade NN mit Ax bildet, so ist klar, dass die der Röhre, deren Spur xAN ist, entsprechende Kraftströmung ist

$$Q = 4\pi m \frac{\theta}{2\pi} = 2m\theta.$$

Andererseits beträgt diese Strömung N Einheiten; man erhält also

$$(3) \qquad Q = 2m\theta = N, \quad \text{oder} \quad \theta = \frac{N}{2m}.$$

133. Zwei parallele Linien. — Wir nehmen jetzt an, dass das elektrische System aus zwei parallelen zu den Dichten λ und λ' elektrisirten Geraden A und A' besteht, so dass also $m = \varepsilon\lambda$, $m' = \varepsilon\lambda'$ ist, und wählen als x Achse die Gerade, welche die Spuren A und A' (Fig. 28) dieser Linien in einer zu ihnen senkrechten Ebene verbindet.

Durch diese beiden Punkte legen wir zwei Geraden An und $A'n'$ von den bezüglichen Ordnungen n und n' in Bezug auf die Mittelpunkte A und A' und nennen die Winkel, welche sie mit der x Achse bilden, ω und ω'. Ziehen wir durch den Schnittpunkt P dieser Linien irgend eine Curve PP' nach der Achse, so ist klar, dass durch die Cylinderfläche, deren Spur PP' ist, eine Strömung n oder $2m\omega$, die von A ausgeht, und eine solche n' oder $2m'\omega'$, die von A' ausgeht, hindurchkommt, und dass folglich die Gesammtströmung gleich $n + n' = N$ ist. Ebenso verhält es sich mit allen von irgend einem Punkte der Curve AP nach der Achse geführten Curven, vorausgesetzt, dass AP der Ort der Schnittpunkte je zweier von A und A' ausgehender Geraden ist, für welche die Summe der Ordnungszahlen N ist; dieser Ort ist offenbar eine Kraftlinie von der Ordnung N für das resultirende System.

In der Nachbarschaft einer der wirksamen Massen herrscht der Einfluss dieser Masse so vor, dass die Kraft nur von dieser Masse abhängt. Die Strömungslinie von der Ordnung N für das resultirende System wird demnach von der Geraden von der Ordnung N, die von diesem Punkte ausgeht, berührt.

Die Gleichung der Curve AP ist

$$(4) \qquad n + n' = N,$$

oder, indem man diese Grössen durch ihre Werte als Funktionen der Winkel ersetzt,

$$(5) \qquad m\omega + m'\omega' = m\theta.$$

Dies ist die Gleichung für die von A ausgehenden Kraftlinien; eine analoge Gleichung liefert die von A' ausgehenden; sind m und m' von gleichem Zeichen, so sind alle diese Linien unbegrenzt; jede derselben, beispielsweise diejenige von der Ordnung N, hat zur Asymptote eine Gerade OB, die mit

der Achse Ax einen Winkel α bildet, der durch die Bedingung bestimmt ist, dass die Geraden von der Ordnung n und n', die durch die Gleichung (4) verbunden sind, zu einander parallel sind, also $\alpha = \omega = \omega'$ ist, d. h. dass man aus (3) und (5) erhält

$$(6) \qquad \alpha = \frac{n}{2m} = \frac{n'}{2m'} = \frac{n + n'}{2(m + m')} = \frac{N}{2(m + m')} = \frac{m}{m + m'}\theta.$$

Alle diese Asymptoten gehen durch den Schwerpunkt O der Massen m und m', was leicht zu erweisen ist.

Die Gleichung der Kraftlinien (5) und die ihrer Asymptoten (6) liefern durch Eliminirung des Verhältnisses $\frac{m'}{m}$

$$\frac{\omega'}{\theta - \omega} = \frac{\alpha}{\theta - \alpha}.$$

Dies ist die Gleichung der Kraftlinie als Funktion der Winkel, welche die Asymptote und die Tangente im Anfangspunkte der Kraftlinie mit der Achse Ax bilden.

Was die Gleichung der Niveauflächen betrifft, so ist dieselbe, wenn man mit r und r' die Entfernungen eines Punktes P von den Linien A und A' bezeichnet,

$$V = \text{Const} - 2\,[\lambda l_n r + \lambda' l_n r'] = \text{Const} - 2 l_n (r^{\lambda} \cdot r'^{\lambda'}),$$

oder

$$r^{\lambda} \cdot r'^{\lambda'} = \text{Const}.$$

134. Mehrere parallele Linien. — Es ist klar, dass diese Construktionsmethode allgemein giltig ist und auf eine beliebige Anzahl von elektrischen Linien A, A', A'' ... angewandt werden kann, die wie oben durch die Massen m, m', m'' ... definirt sind, falls diese Linien parallel sind und in derselben Ebene liegen.

Die allgemeine Gleichung der Kraftlinien, die vom Centrum A mit der Masse m ausgehen, ist in diesem Falle

$$m\omega + m'\omega' + m''\omega'' + \cdots = m\theta,$$

wobei die Massen m, m', ... positiv oder negativ sein können; die Gleichung der entsprechenden Asymptote ist

$$(m + m' + m'' \ldots)\alpha = m\theta.$$

Haben alle Massen dasselbe Zeichen, so sind alle Kraftlinien unbegrenzt. Im andern Falle wird ein Teil der Kraftströmung, die von den positiven Massen ausgesandt wird, von den negativen Massen absorbirt.

Sind die elektrischen Linien A, A', A'' ... zwar noch sämmtlich parallel, liegen dieselben aber nicht in einer Ebene, so wird die Construktion der

Kraftlinien complicirter. Auch in diesem Falle hat das Potential in einem Punkte P, der die Entfernungen $r, r', r'' \ldots$ von den Linien $A, A', A'' \ldots$ hat, den Wert

$$V = \text{Const} - \Sigma 2\lambda\, l_n r = \text{Const} - 2 l_n (r^{\lambda} \cdot r'^{\lambda'} \cdot r''^{\lambda''} \ldots)$$

oder

$$r^{\lambda} \cdot r'^{\lambda'} \cdot r''^{\lambda''} \ldots = \text{Const}.$$

135. Zwei Linien von entgegengesetztem Zeichen. — Wir behandeln im Speciellen den Fall zweier in entgegengesetztem Sinne elektrisirter Linien, die durch die Ladungen $+m$ und $-m'$ bestimmt sind, und die durch die beiden um $2a$ von einander entfernten Punkte A und A' (Fig. 29) gehen; m sei dem absoluten

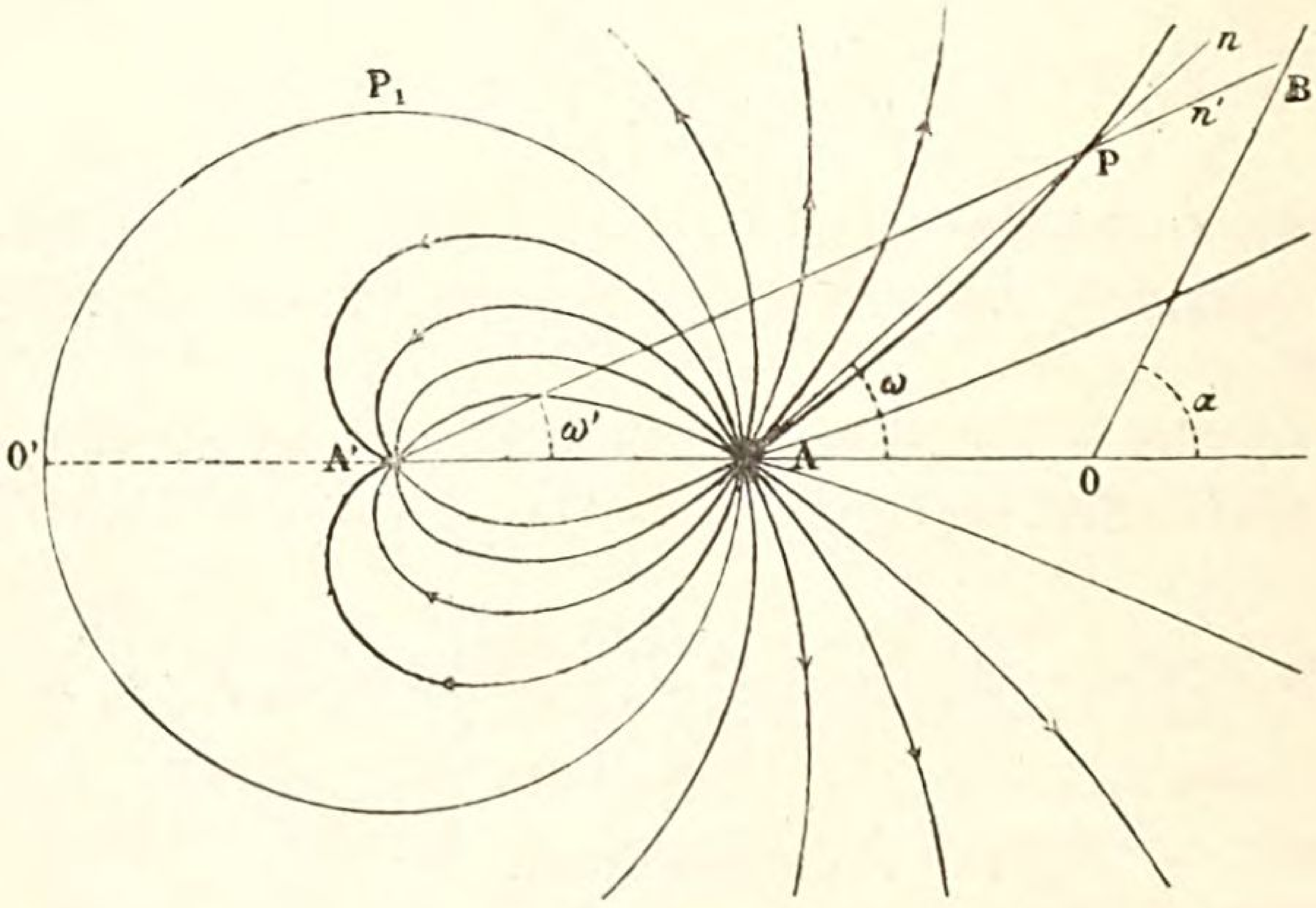


Fig. 29.

Werte nach die grössere dieser Massen. Die Gleichung einer Kraftlinie wird

$$n - n' = N$$

oder

$$m\omega - m'\omega' = m\theta;$$

die der entsprechenden Asymptote ist

$$\alpha = \frac{m}{m - m'}\theta.$$

Da der Winkel α nicht grösser als π werden kann, können unendliche Kraftlinien nur für solche Werte von θ vorhanden sein, welche kleiner sind als

$$\theta_0 = \pi \frac{m - m'}{m}.$$

Die diesem Werte θ_0 entsprechende Kraftlinie trennt die $m - m'$ von A ausgehenden in's Unendliche verlaufenden Kraftlinien von den m' endlichen in A' endigenden.

Ihre Gleichung ist

$$m\omega - m'\omega' = m\theta_0 = (m - m')\pi \text{ oder } \pi - \omega' = \frac{m}{m'}(\pi - \omega).$$

Diese Gleichung wird für $\omega = \pi$, $\omega' = \pi$ befriedigt, die Linie trifft also die Achse links von A' in O'. Der Punkt O' liegt zum Schwerpunkt O des Systems symmetrisch in Bezug auf AA'; denn man findet für einen beliebigen Punkt P_1 der Curve

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin\omega'}{\sin\omega} = \frac{\sin(\pi - \omega')}{\sin(\pi - \omega)} = \frac{\sin\frac{m}{m'}(\pi - \omega)}{\sin(\pi - \omega)}.$$

Nähert sich der Winkel $\pi - \omega$ der Null, so wird

$$\lim\left(\frac{r}{r'}\right) = \frac{m}{m'} \text{ oder } m \cdot O'A' = m' \cdot O'A.$$

Da der Schwerpunkt O der beiden Massen durch die Bedingung $m \cdot OA = m' \cdot OA'$ bestimmt ist, folgt $O'A' = OA$.

In dem Falle, dass dem absoluten Werte nach $m = 2m'$ ist, wie dies in Fig. 29 vorausgesetzt ist, erhält man für diese Grenzlinie

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ und } 2\omega - \omega' = \pi;$$

hieraus ergiebt sich

$$r' = \frac{r}{2\sin\frac{\omega'}{2}} = 2a;$$

die Kraftlinie, welche die Grenze bildet, ist demnach ein Kreis mit dem Mittelpunkt A', der durch A geht.

Die Gleichung der Niveauflächen ist

$$V = \text{Const} - 2l_n\left(\frac{r^\lambda}{r'^{\lambda'}}\right) = \text{Const} + 2 \cdot l_n\left(\frac{r'^{\lambda'}}{r^\lambda}\right)$$

oder

$$\frac{r'^{\lambda'}}{r^\lambda} = Ce^{\frac{V}{2}}.$$

136. Zwei entgegengesetzt gleich geladene Linien. — Nimmt man die beiden Massen als ihrem absoluten Betrage nach gleich an, so reducirt sich die Gleichung der Kraftlinien auf

$$\omega - \omega' = 0$$

und die der Niveauflächen auf

$$V = 2\lambda l_n \frac{r'}{r}.$$

Die erstere stellt Kreissegmente wie ATA' (Fig. 30) dar, die durch die beiden Punkte A und A' gehen und die Winkel θ als Peripheriewinkel fassen, die zweite stellt Kreise S, S' ... dar, deren Mittelpunkte so auf der Geraden AA' liegen, dass A und A' in Bezug auf jeden derselben conjugirte Punkte sind.

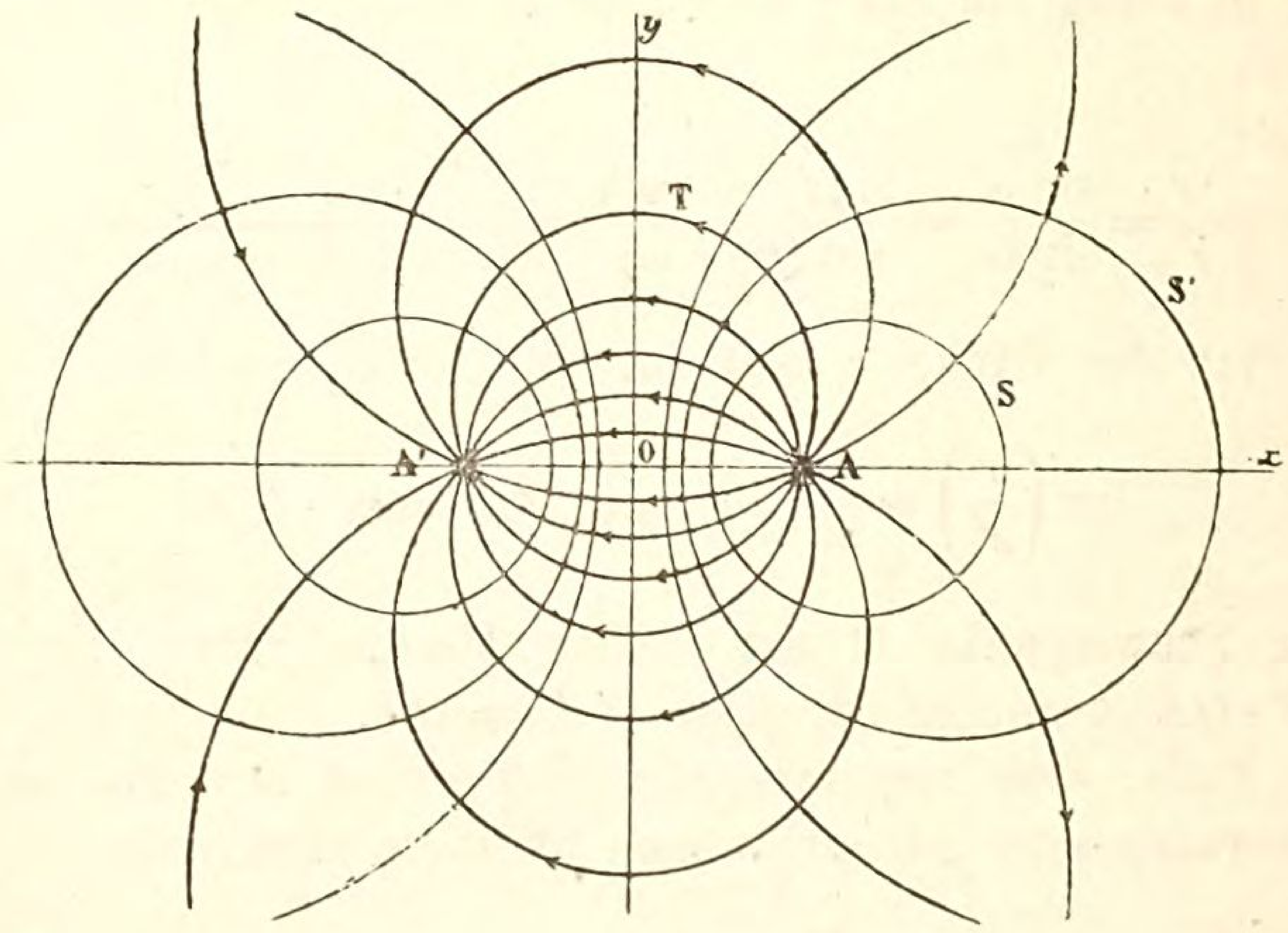


Fig. 30.

Fasst man zwei Niveauflächen S und S' ins Auge, so ersetzen eine Schicht $+m$ auf jeder Längeneinheit des Cylinders S und eine Schicht $-m$ auf der Längeneinheit des Cylinders S' für alle zwischen den Flächen liegenden Punkte die Wirkung der beiden unendlichen Linien A und A' (**61**); die Zeichnung entspricht in diesem Falle der Aufgabe über einen Condensator, der aus zwei parallelen, aber nicht coaxialen unendlichen Cylindern besteht.

137. Nehmen wir an, dass die Entfernung $2a$ sich der Null nähert, dass aber die Dichte λ sich so ändert, dass das Produkt $2a\lambda$ constant bleibt, so ist das Potential in der Entfernung r, in einer Richtung, welche mit der Gerade AA' den Winkel ω bildet,

$$V = 2a\lambda l_n\left(1 + \frac{2a\cos\omega}{r}\right) = 2\,\frac{2a\lambda\cos\omega}{r}.$$

Diese Gleichung stellt Kreise dar, deren Radien wie die reciproken Werte der auf einander folgenden ganzen Zahlen variiren.

Ebenso erhält man für die Kraftlinien

$$\omega - \omega' = \frac{2a\sin\omega}{r} = \theta.$$

Die Radien der Kreise, welche die Kraftlinien darstellen, variiren demnach ebenfalls wie die reciproken Werte der auf einander folgenden ganzen Zahlen.

138. Rotationssysteme. — Um hier auf einer Niveaufläche die Schnitte der elementaren Kraftröhren zu bestimmen, nehmen wir einerseits äquidistante Meridianebenen an, andererseits auf dem Meridianschnitte so gelegene Punkte, dass dieselben bei der Rotation um die Achse die Fläche in auf einander folgende Zonen teilt, die derselben Strömung entsprechen. Die Fläche wird hierdurch in krummlinige Rechtecke geteilt, durch die dieselbe Strömung hindurchgeht, die man dann der Einheit gleich wählen kann.

139. — Ein *gleichförmiges Feld* kann stets als ein Rotationssystem um irgend eine der Kraftrichtung parallele Linie aufgefasst werden; wir können auf dasselbe demnach auch die eben angeführte Darstellungsweise anwenden. Eine Niveaufläche, die ja eine zur Achse senkrechte Ebene ist, wird von einer Reihe von Kreisen geschnitten, welche Ringe von gleichem Flächeninhalt einschliessen. Die Radien, welche nach dem Gesetze der Newton'schen Ringe zunehmen, sind proportional den Quadratwurzeln der auf einander folgenden Zahlen. Die Kraftlinien werden in der Meridianebene durch zur Achse parallele Geraden dargestellt, deren Entfernungen von der Achse sich also auch wie die Quadratwurzeln der auf einander folgenden ganzen Zahlen verhalten.

Ist F die Intensität des Feldes und ω der Winkel zwischen zwei Meridianebenen, sind r_n und r_{n+1} die Abstände zweier auf einander folgender Kraftlinien von der Achse, so muss man wählen

$$F\frac{\omega}{2}\left(r_{n+1}^2 - r_n^2\right) = 1,$$

oder

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{F\omega}}\sqrt{n}.$$

Diese Darstellungsweise hat, wie man sieht, die Unbequemlichkeit, dass man ein gleichförmiges Feld nicht durch äquidistante Kraftlinien darstellt.

140. Fall einer einzelnen Masse. — Eine einzelne Masse liefert ein Rotationssystem um jede beliebige durch die wirksame Masse gehende Achse. Durch Normalebenen zu einer Achse Ax (Fig. 31) teilt man die Kugel in

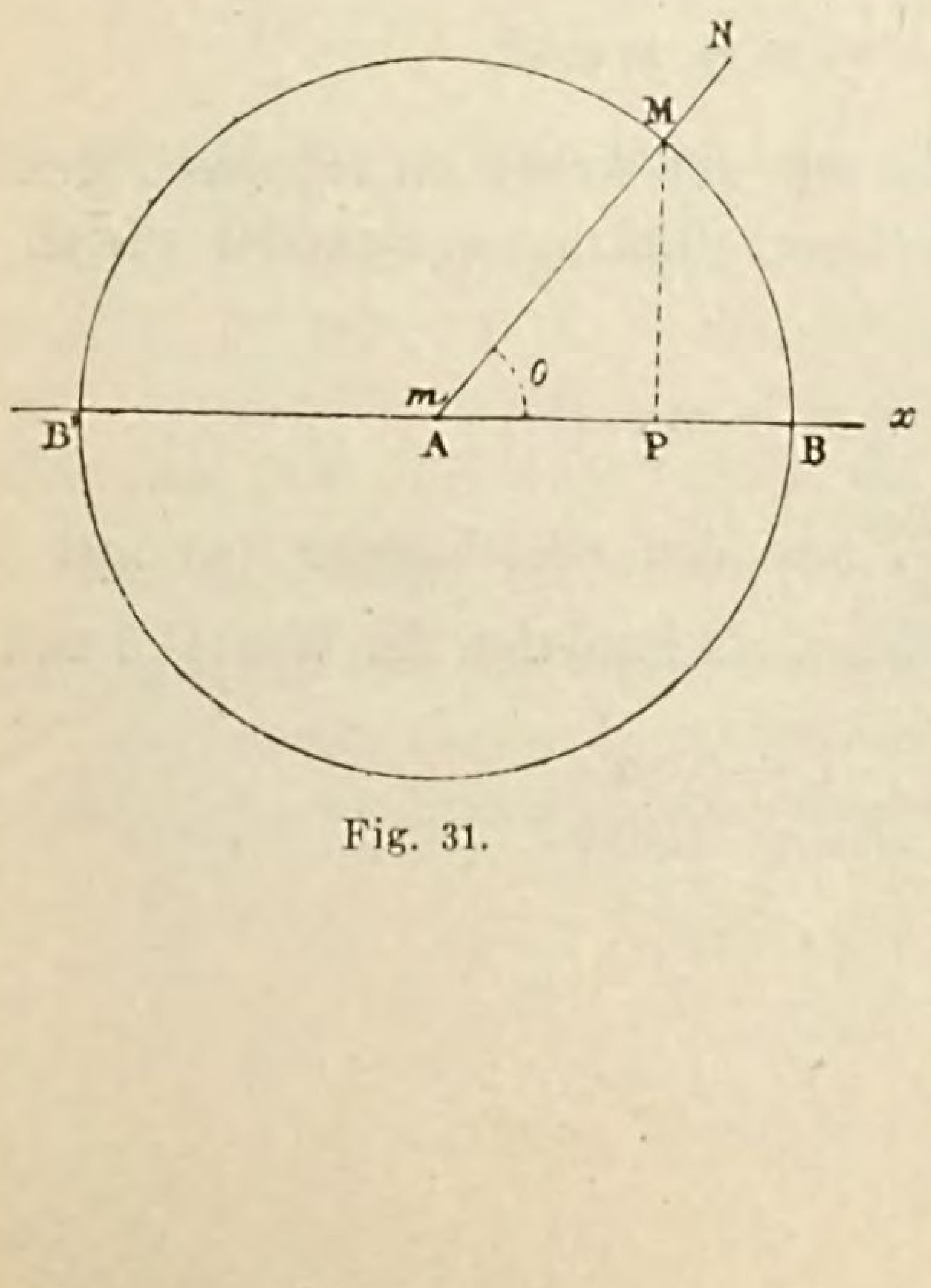


Fig. 31.

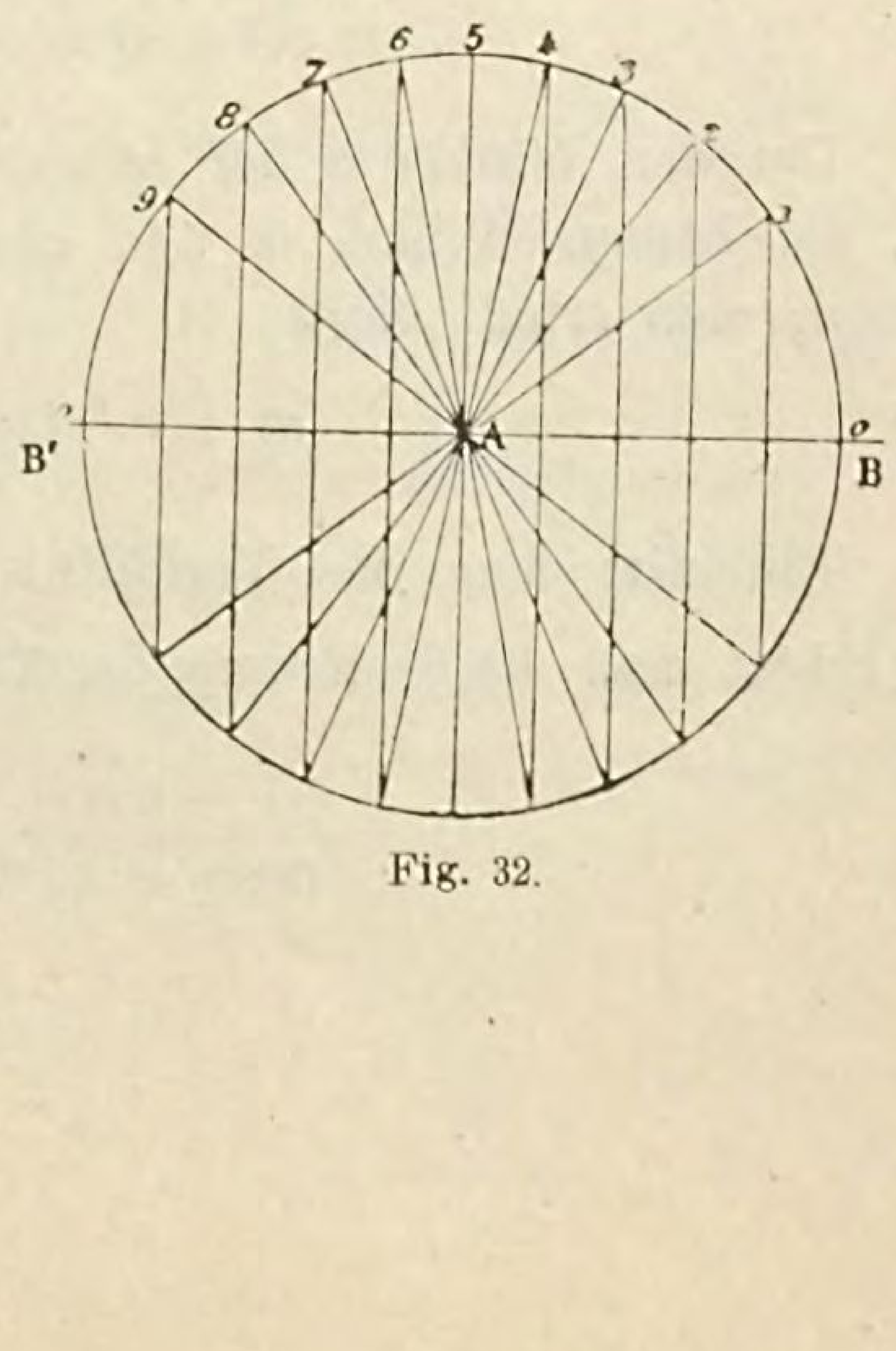


Fig. 32.

auf einander folgende concentrische Zonen von gleicher Fläche, die derselben Strömung entsprechen.

Die einem Kreiskegel, dessen Winkel an der Spitze 2θ ist, entsprechende Strömung ist der Oberfläche der Calotte, also der Höhe PB oder $1 - \cos\theta$ proportional.

Ist N die Ordnung der Kraftlinie AN, so erhält man

$$\frac{N}{4\pi m} = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

oder

$$\cos\theta = 1 - \frac{N}{2\pi m}. \tag{7}$$

Um die Kraftlinien zu construiren, genügt es demnach, den Durchmesser BB' (Fig. 32) in $4\pi m$ gleiche Teile zu zerlegen, in den Teilpunkten Lote zu errichten und die Schnittpunkte derselben mit der Peripherie mit A zu verbinden.

141. Zwei beliebige Massen. — Liegen zwei Massen m und m' in den Punkten A und A' (Fig. 28), so bilden sie ein Rotationssystem um die Gerade AA'. Die Gesammtströmung, die durch irgend eine Zone mit dem Halbbogen PP' geht, ist die Summe der Strömungen, welche den Winkeln ω und ω' für die beiden Massen einzeln, also $n + n' = N$, entsprechen.

Aus dem oben (**133**) angeführten Grunde wird die Schale, die der Strömung vom Werte N entspricht und die durch P geht, im Punkte A von dem Kegel mit der Oeffnung 2θ berührt, der die von der Masse m allein herrührende Strömung einschliesst.

Diese Schale hat auch zur Asymptote einen Kegel, dessen Scheitel im Schwerpunkt O der beiden Massen liegt.

Die Gleichung der Kraftlinie AP, also $n + n' = N$, liefert, wenn man die Schlussweise des letzten Artikels auf die beiden Massen anwendet,

$$2\pi m(1 - \cos\omega) + 2\pi m'(1 - \cos\omega') = N = 2\pi m(1 - \cos\theta)$$

oder

$$m\cos\omega + m'\cos\omega' = m' + m\cos\theta. \tag{8}$$

Um den Winkel α der Asymptote mit der Achse zu erhalten, genügt es, die beiden Winkel ω und ω' in dieser Gleichung einander gleich zu setzen; man erhält dann

$$(m + m')\cos\alpha = m' + m\cos\theta. \tag{9}$$

Eliminirt man das Verhältnis $\frac{m}{m'}$ aus den Gleichungen (8) und (9), so erhält man die Gleichung der Kraftlinie als Funktion der Winkel θ und α:

$$\frac{1 - \cos\omega}{\cos\omega - \cos\theta} = \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha - \cos\theta}.$$

Die Darstellungsweise ist allgemein und kann auf eine beliebige Anzahl von Centren, die auf derselben Geraden liegen, ausgedehnt werden.

Die Gleichung einer von der Masse m ausgehenden Kraftlinie ist

$$m\cos\omega + m'\cos\omega' + m''\cos\omega''\ldots = m' + m'' + \cdots + m\cos\theta,$$

und die der Asymptote

$$(m + m' + m'' + \cdots)\cos\alpha = m' + m'' + m''' + \cdots + m\cos\theta.$$

Haben alle Massen gleiches Zeichen, so sind alle Kraftlinien unendlich. Sind Massen von entgegengesetztem Zeichen vorhanden, so ist der Raumteil, welcher die endlichen Kraftlinien einschliesst, die von den positiven Massen ausgehen und von den negativen Massen absorbirt werden, von dem Raumteile, der die unendlichen Kraftlinien enthält, durch eine Grenzfläche getrennt, deren Meridianschnitt bestimmt ist durch den Winkel θ, den die letzte Gleichung ergiebt, wenn in derselben $\alpha = \pi$ gesetzt wird.

142. Zwei gleiche, gleichartige Massen. — Besteht das System aus zwei gleichen, gleichartigen, in A und A' (Fig. 33) in der Entfernung $2a$

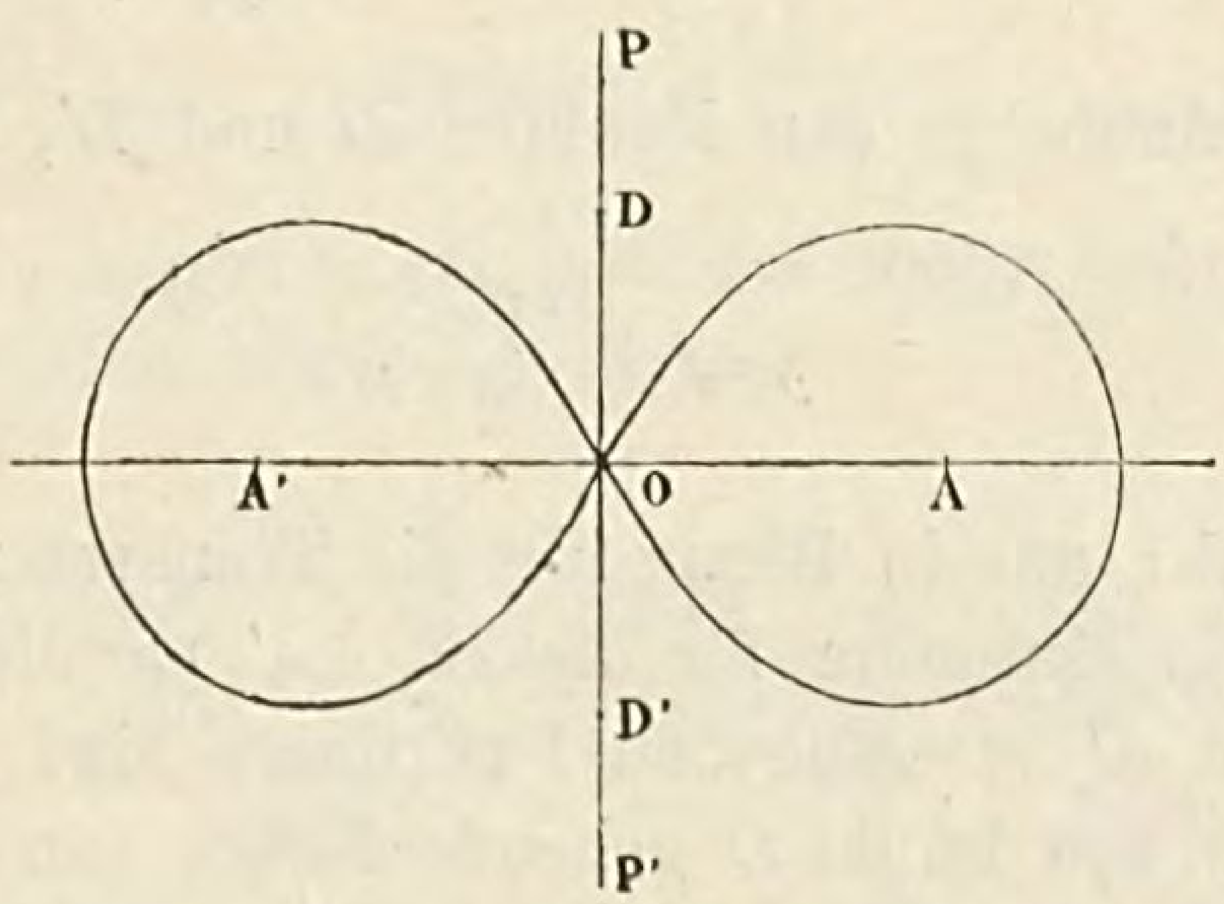


Fig. 33.

von einander gelegenen Massen, so sind die Niveauflächen gegeben durch die Gleichung

$$V = \frac{m}{r} + \frac{m}{r'} = m\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Die Meridiancurven sind Lemniscaten. Die Fläche, die $V = \frac{2m}{a}$ entspricht, hat als Meridiancurve zwei Zweige, die sich in O durchsetzen. Der Punkt O ist ein Punkt labilen Gleichgewichts; die Kraft ist dort gleich Null. In diesem Punkte hat das Potential ein Minimum in Bezug auf die Achse AA' und ein Maximum in Bezug auf die Symmetrieebene PP'.

Für alle Werte von V über $\frac{2m}{a}$ setzt sich die Niveaufläche aus zwei getrennten Schalen zusammen, deren Querschnitte eiförmig sind, und die je eines der beiden Centra einschliessen. Diese Ovale nähern sich immer mehr Kugeln, je mehr man sich den Centren nähert.

Für die Werte von V unter $\frac{2m}{a}$ besteht die Fläche aus einer einzigen Schale mit einer Einschnürung gegen die Symmetrieebene, die allmälig in dem Maasse, als V kleiner wird, abnimmt, und die Fläche nähert sich immer mehr der Kugelform, bis sie in der Unendlichkeit in eine Kugel mit dem Mittelpunkte in O übergeht.

Die Gleichung der Kraftlinien ist

$$\cos\omega + \cos\omega' = 1 + \cos\theta,$$

und die der Asymptote

$$2\cos\alpha = 1 + \cos\theta,$$

oder

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\theta}{2}\cdot$$

In einem Punkte der Transversalachse OP wird die Kraft ausgedrückt durch

$$F = \frac{2m}{r^2}\sin\omega = \frac{2m}{r^2}\frac{y}{r} = 2m\frac{y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

dieselbe ist ein Maximum in den Punkten D und D', für welche ist

$$y = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot$$

Die Kraft ist hier nur in Bezug auf die Transversalachse ein Maximum und im Gegenteil ein Minimum für die zu AA' parallele Richtung.

Die von m und m' ausgehenden Kraftlinien sind durch die zur Achse AA' normale, durch den Punkt O gehende Ebene von einander getrennt.

143. Zwei ungleiche Massen von demselben Zeichen. — Sind die Massen zwar dem Zeichen nach gleich, aber im Betrage verschieden, so ist die allgemeine Form der Niveauflächen bis auf die Symmetrie dieselbe wie im vorigen Falle. Der Gleichgewichtspunkt, der dem Kreuzungspunkte der beiden Schalen entspricht, ist durch die Beziehung gegeben

$$\frac{m}{r^2} = \frac{m'}{r'^2} \quad \text{oder} \quad \frac{r}{r'} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m'}}\cdot$$

Setzt man $r + r' = 2a$, so folgt

$$r = 2a\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{m'}} = 2a\frac{1}{1+\sqrt{\frac{m}{m'}}}\cdot$$

Die Kraftlinien haben die Gleichung

$$m\cos\omega + m'\cos\omega' = m' + m\cos\theta.$$

Dieselben bilden stets zwei gesonderte Systeme; die dieselben trennende Fläche entspricht $\theta = \pi$ und hat als Gleichung

$$m \cos\omega + m' \cos\omega' = m' - m.$$

Setzt man $\frac{m'}{m} = 1 + \varepsilon$, so geht die Gleichung über in

$$\cos\omega + (1 + \varepsilon) \cos\omega' = \varepsilon,$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten, wenn man den Anfangspunkt derselben in der Mitte des Abstandes $2a$ annimmt,

$$\frac{x - a}{\sqrt{y^2 + (x - a)^2}} + (1 + \varepsilon) \frac{x + a}{\sqrt{y^2 + (x + a)^2}} = \varepsilon.$$

Diese Gleichung stellt eine Rotationsfläche sechsten Grades dar, die durch den Gleichgewichtspunkt geht und eine gewisse Aehnlichkeit mit der Schale eines Hyperboloïds besitzt. Ihr Querschnitt mit einer Meridianebene hat wie alle andern Kraftlinien eine Asymptote, die durch den Schwerpunkt der beiden Massen geht und durch die Gleichung bestimmt ist

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}.$$

Die resultirende Kraft bildet mit den Radii vectores Winkel β und β', die durch die Beziehung bestimmt sind

$$\text{(10)} \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\beta'} = \frac{\frac{m'}{r'^2}}{\frac{m}{r^2}} = \frac{m' r^2}{m r'^2} = \frac{m' \sin^2\omega'}{m \sin^2\omega},$$

woraus man für die resultirende Kraft erhält

$$F = \frac{m \cos\beta}{r^2} + \frac{m' \cos\beta'}{r'^2}.$$

144. Zwei entgegengesetzt gleiche Massen. — Wir wollen specieller den Fall zweier entgegengesetzt gleicher Massen behandeln, da derselbe Gelegenheit für mehrere wichtige Anwendungen bietet.

Die Niveauflächen, deren Gleichung

$$V = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

ist, sind geschlossene eiförmige einschalige Flächen, die sich in dem Maasse Kugeln nähern, als sie den Wirkungscentren näher sind. Alle die Flächen welche positiven Werten von V entsprechen, umgeben den Punkt A, alle negativen Werten entsprechenden umgeben den Punkt A'. Dieselben sind von einander durch eine Symmetrieebene vom Potential Null getrennt.

Die Kraftlinien haben als Gleichung

(11) $$\cos\omega - \cos\omega' = 1 - \cos\theta = \frac{N}{2\pi m}.$$

Die Kraftlinien sind sämmtlich endlich und gehen vom Punkte A aus, um im Punkte A' zu endigen; sie sind augenscheinlich symmetrisch gegen eine Ebene vom Potential Null, die in O zur Achse AA' senkrecht steht (Fig. 34)

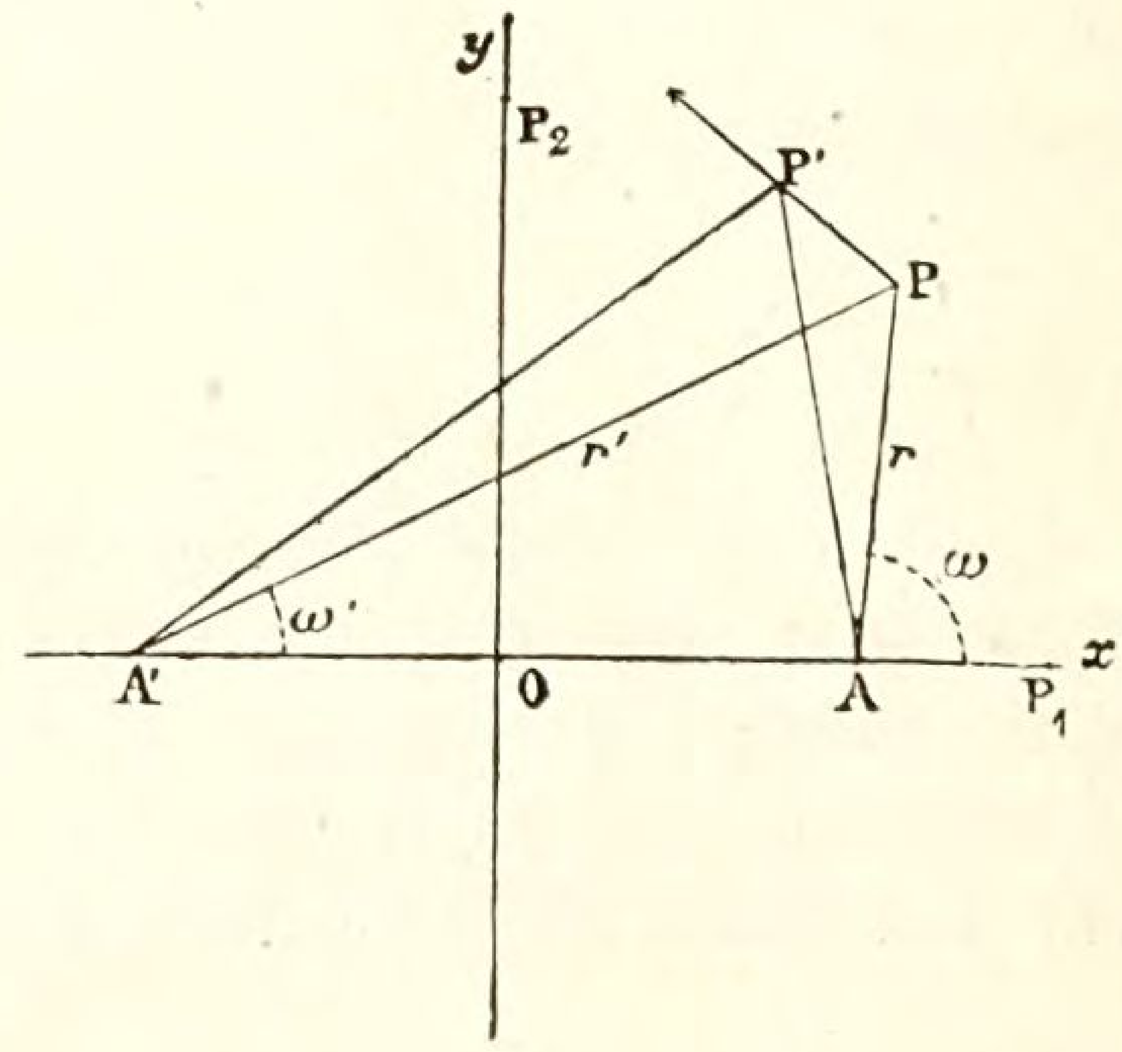


Fig. 34.

145. — Die Winkel β und β', welche die Kraft mit den Radii vectores bildet, sind durch Gleichung (10) bestimmt, welche in diesem Falle ergiebt

(12) $$\frac{\sin\beta}{r^2} = -\frac{\sin\beta'}{r'^2}.$$

146. — Die Kraft wird ausgedrückt durch

(13) $$F = m\left[\frac{\cos\beta}{r^2} + \frac{\cos\beta'}{r'^2}\right].$$

Der Wert derselben auf der Achse AA' in P_1 in der Entfernung d vom Mittelpunkte ist

(14) $$F_1 = m\left[\frac{1}{(d-a)^2} - \frac{1}{(d+a)^2}\right] = 2ma\frac{2d}{(d^2-a^2)^2}$$

und auf der Transversalachse in demselben Abstande d vom Mittelpunkte, wenn man mit ρ die Entfernung von den Massen bezeichnet,

(15) $$F_2 = 2ma\frac{1}{\rho^3} = 2ma\frac{1}{(d^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Produkt $2ma$ der einen Masse in die Entfernung der beiden Massen von einander, welches man *magnetisches Moment* in der entsprechenden Aufgabe über den Magnetismus nennen würde, kann man hier als *elektrisches Moment* des Systems bezeichnen.

147. — Ist die Kraft zur Achse normal, so erhält man

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad \sin\beta = \cos\omega,$$

$$\beta' = \frac{\pi}{2} + \omega', \quad \sin\beta' = -\cos\omega',$$

und die Gleichung (12) geht über in

$$\frac{\cos\omega}{r^2} = \frac{\cos\omega'}{r'^2}.$$

Dies ist die Gleichung der Curve APX (Fig. 35), die durch alle Punkte der Ebene geht, in denen die Kraft zur Achse vertikal ist. Dieselbe setzt

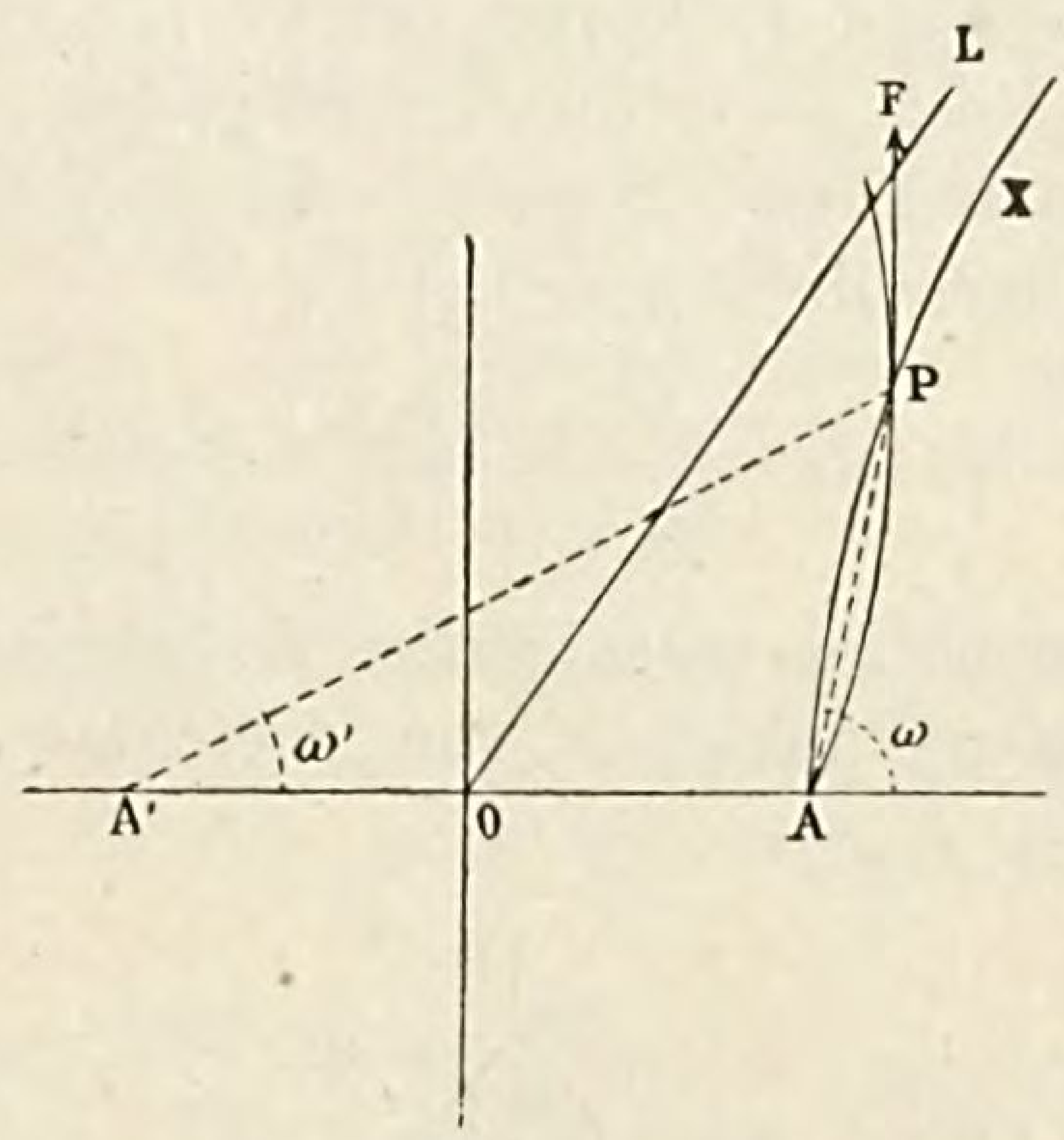


Fig. 35.

sich aus zwei symmetrischen Zweigen zusammen, die von A und A' so ausgehen, dass die Vertikale sie dort berührt, und dass eine Gerade OL ihre Asymptote ist.

Um die Richtung der Asymptote zu bestimmen, fassen wir einen sehr fernen Punkt ins Auge; nennt man δ die sehr kleine Differenz $\omega - \omega'$, und berücksichtigt man, dass die Radien r und r' einander gleich werden, so erhält man

$$\frac{\cos\omega}{r^2} = \frac{\cos\omega'}{r'^2} = \frac{\cos\omega' - \cos\omega}{r'^2 - r^2} = \frac{\sin\omega \cdot \delta}{2r(r'-r)}$$

$$= \frac{\sin\omega}{2r^2} \cdot \frac{r\delta}{r'-r} = \frac{\sin\omega \cdot 2a\sin\omega}{2r^2 \cdot 2a\cos\omega}$$

$$= \frac{1}{2r^2} \frac{\sin^2\omega}{\cos\omega},$$

oder

$$\operatorname{tg}\omega^2 = 2.$$

148. Princip der Bilder. — Wir haben (59) gesehen, dass man stets eine beliebige elektrische Masse durch eine gleiche auf einer dieselbe vollständig einschliessenden Niveaufläche ausgebreitete Masse ersetzen kann. Die so gebildete Schicht befindet sich von selbst im Gleichgewicht, und die Dichte an der Stelle, wo die Kraft F wirkt, ist durch die Bedingung bestimmt

$$\sigma = \frac{F}{4\pi}.$$

Für alle inneren Punkte wird das Potential constant und gleich dem der Oberfläche, für diese wird also die elektrische Masse nicht durch die Schicht ersetzt; aber für alle äusseren Punkte ist an dem Zustande des Feldes nichts geändert.

Fassen wir in der vorigen Aufgabe die Transversalebene Oy (Fig. 34) vom Potential Null ins Auge, so können wir für alle rechts gelegenen Punkte die in A' befindliche Masse $-m$ durch eine gleiche, im Gleichgewicht befindliche Masse auf der Ebene ersetzen. Die Dichte in jedem Punkte P_2 ist, da die Kraft F_2 nach links gerichtet ist,

$$-\sigma = \frac{F_2}{4\pi} = \frac{(2ma)}{4\pi} \cdot \frac{1}{\rho^3}.$$

Man sieht, dass dieselbe *im umgekehrten Verhältnis zum Cubus* der Entfernung des betrachteten Punktes P_2 von A steht.

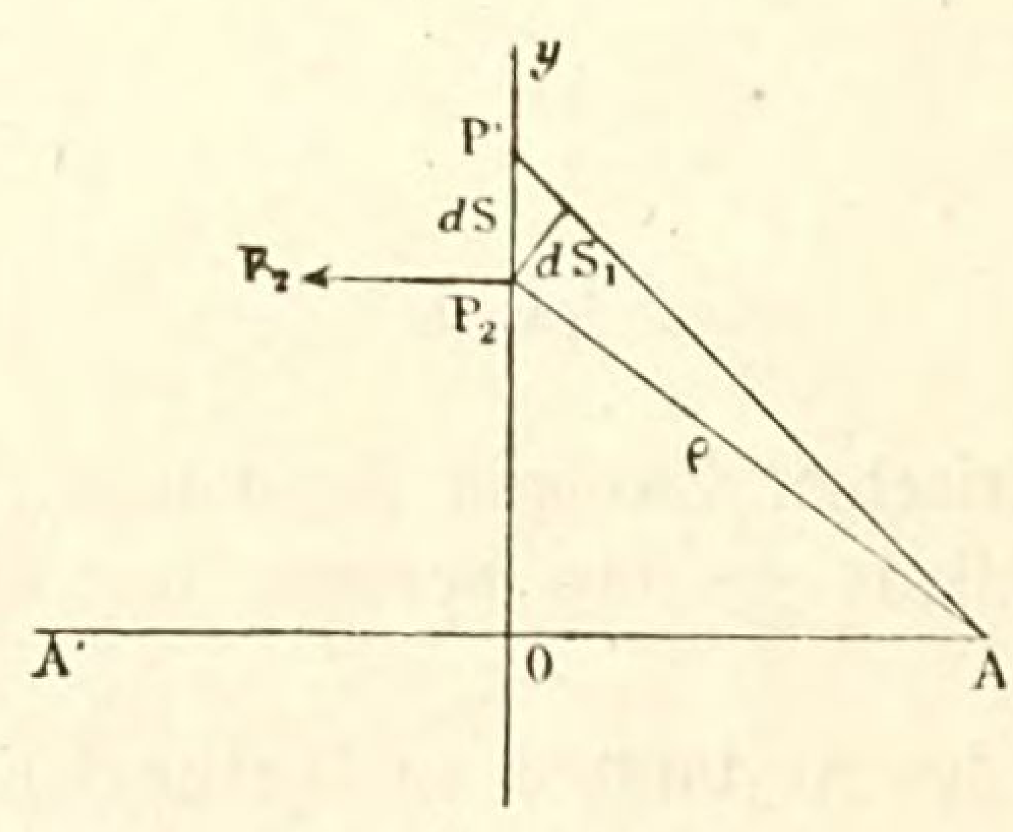


Fig. 36.

Man erkennt auch, dass nach diesem Verteilungsgesetze die Ladung eines Elementes der Ebene in jedem Punkte dem Winkel, unter welchem dasselbe von A aus erscheint, proportional ist. Denn die Ladung eines Flächenelementes dS (Fig. 36) ist

$$-\sigma dS = \frac{m}{2\pi} \frac{1}{\rho^2} \frac{a}{\rho} dS.$$

Nun ist $\frac{a}{\rho} dS$ die Projektion dS_1 des Elementes dS auf eine zu ρ senkrechte Ebene und $\frac{dS_1}{\rho^2}$ der körperliche Winkel $d\theta$, unter welchem das Element dS in A erscheint.

Man erhält demnach

$$-\sigma dS = \frac{m}{2\pi} d\theta.$$

Wäre die Ebene, auf der die Masse $-m$ liegt, nicht vorhanden, so wäre die von der Masse m innerhalb des Winkels $d\theta$ ausgehende Kraftströmung $md\theta$. Im vorliegenden Falle ist die von der Fläche dS aufgenommene Kraftströmung $4\pi\frac{m}{2\pi}d\theta = 2md\theta$. Die Verteilung der Strömung ist also dieselbe, wie wenn die Masse m allein vorhanden wäre, aber die Kraftströmung ist in jedem Punkte doppelt so stark, da alle von m ausgehenden Kraftlinien die Ebene treffen.

Da die mit der Masse $-m$ belegte Ebene sich nach dem Obigen unter dem Einfluss der Ladung $+m$ in A auf dem Potential Null befindet, ist der ganze links befindliche Raum auf dem Potential Null. Die Erscheinung ist also dieselbe wie die, welche bei einem unbegrenzten, mit der Erde leitend verbundenen und der Influenz einer im Punkte A befindlichen Masse $+m$ ausgesetzten Leiter eintritt. Eine derartige Ebene hebt die Wirkung der Masse m auf hinter derselben befindliche Punkte vollständig auf; dieselbe leistet die Dienste eines *elektrischen Schirmes.*

Umgekehrt kann man, wenn die Masse $+m$ in A sich vor einer mit der Erde verbundenen leitenden Ebene Oy befindet, für alle rechts gelegenen Punkte diese Ebene durch eine in A' symmetrisch zu A gelegene Masse $-m$ ersetzen.

W. Thomson fasst die Masse $-m$ in A' im Verhältnis zu der mit der Erde verbundenen Ebene Oy als das *Bild* der in A befindlichen Masse $+m$ auf. Man sieht in der That die Analogie, die zwischen dieser elektrischen und der entsprechenden optischen Erscheinung besteht. Ist der Punkt A eine Lichtquelle und die Ebene Oy ein reflektirender Spiegel, so ist das Bild von A ein virtuelles und liegt in A'; die Beleuchtung des rechts von der Ebene gelegenen Raumes ist dieselbe, wie wenn man diese Ebene durch eine in A' befindliche Lichtquelle ersetzte, und die Intensität dieser virtuellen Lichtquelle ist gleich der von A, wenn die reflektirende Kraft der Ebene der Einheit gleich ist.

149. Induction in einem aus zwei durch eine Ebene getrennten Dielektrica bestehenden Mittel. — Das Princip der Bilder gestattet den Zustand zweier Dielektrica zu bestimmen, die durch eine Ebene von einander getrennt sind, wenn sich in der einen von ihnen eine wirksame Masse bildet.

Es sei m diese im Punkte A (Fig. 37) befindliche Masse, μ_1 und μ_2 seien die induktiven Capacitäten der beiden Dielektrica, die durch die Ebene Q von einander getrennt sein mögen; die wirksame Masse befinde sich in dem ersteren Dielektricum.

Das Gleichgewicht kann hergestellt werden, wenn man auf der Ebene Q eine Schicht m' annimmt, die so verteilt ist, wie sie auf einer nicht isolirten leitenden Ebene unter dem Einflusse einer in A oder in dem zu diesem symmetrischen Punkte B befindlichen Masse m' verteilt wäre; in andern Worten: die Ebene wirkt auf alle links von derselben gelegenen Punkte wie eine in B befindliche Masse m' und auf alle rechts befindlichen Punkte wie dieselbe in A befindliche Masse m'.

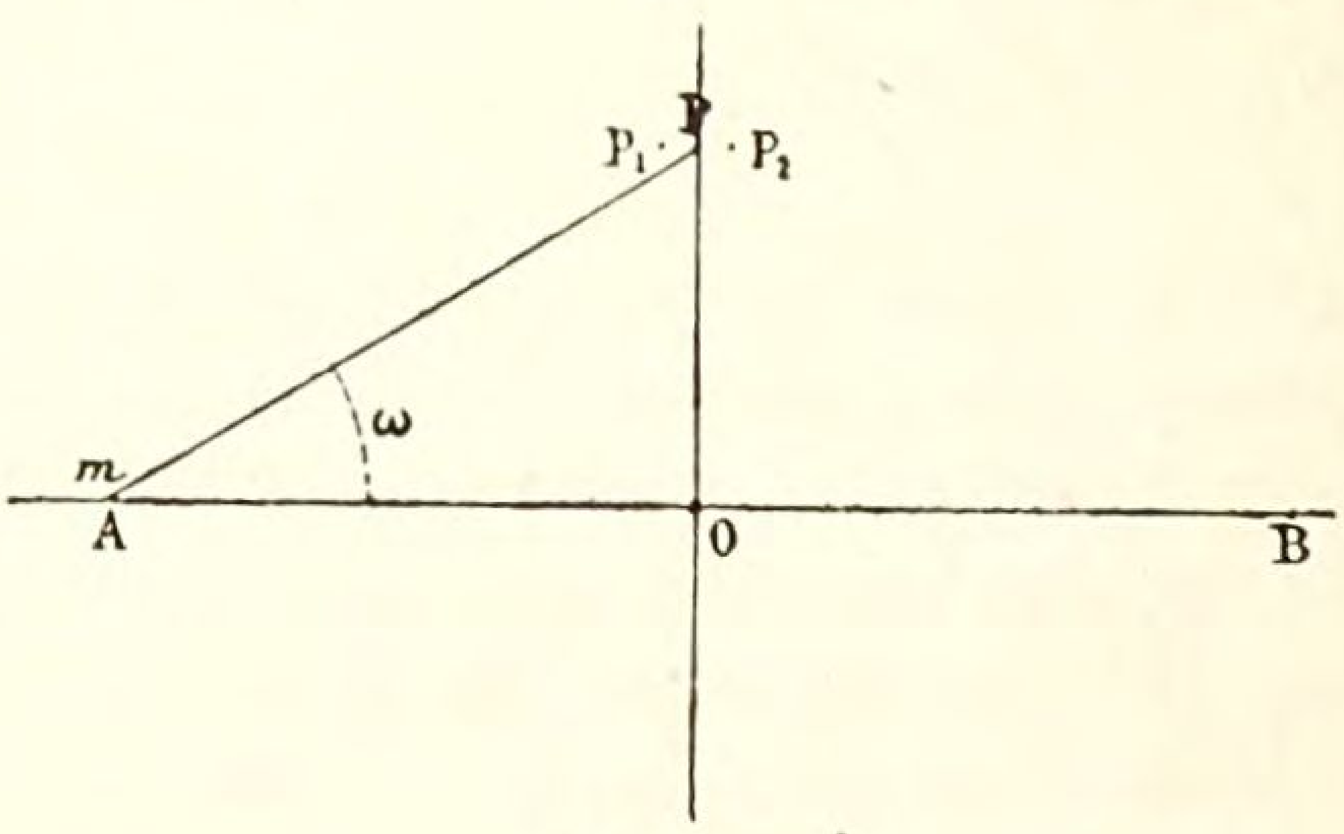


Fig. 37.

Das Potential in der Nähe des auf der Ebene Q angenommenen Punktes P ist im ersten Mittel, in P_1,

$$V_1 = \frac{m}{PA} + \frac{m'}{PB},$$

und im zweiten Mittel, in P_2,

$$V_2 = \frac{m}{PA} + \frac{m'}{PA}.$$

Die normalen Kraftcomponenten sind in denselben Punkten

$$N_1 = \frac{\cos\omega}{\rho^2}(m - m'),$$

$$N_2 = \frac{\cos\omega}{\rho^2}(m + m').$$

Um der für die Dielektrica geltenden Continuitätsgleichung zu genügen, muss das Produkt der normalen Componente in die specifische induktive Capacität zu beiden Seiten der Grenzfläche dasselbe sein, woraus man erhält

$$\mu_1(m - m') = \mu_2(m + m')$$

oder

$$m' = m\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = m\gamma.$$

Die Dichte in jedem Punkte der Ebene ist

$$\sigma' = \frac{2m'a}{4\pi}\frac{1}{\rho^3} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\cdot\frac{2ma}{4\pi}\cdot\frac{1}{\rho^3} = \gamma\,\frac{2ma}{4\pi}\cdot\frac{1}{\rho^3}.$$

150. Drei durch zwei parallele Ebenen von einander getrennte Dielektrica. — Wir nehmen drei verschiedene Mittel von den specifischen inductiven Capacitäten μ_1, μ_2 und μ_3 an, die durch parallele Ebenen Q und Q' von einander getrennt sind, ferner eine wirksame Masse m, die im ersten Mittel in A (Fig. 38) liegen möge.

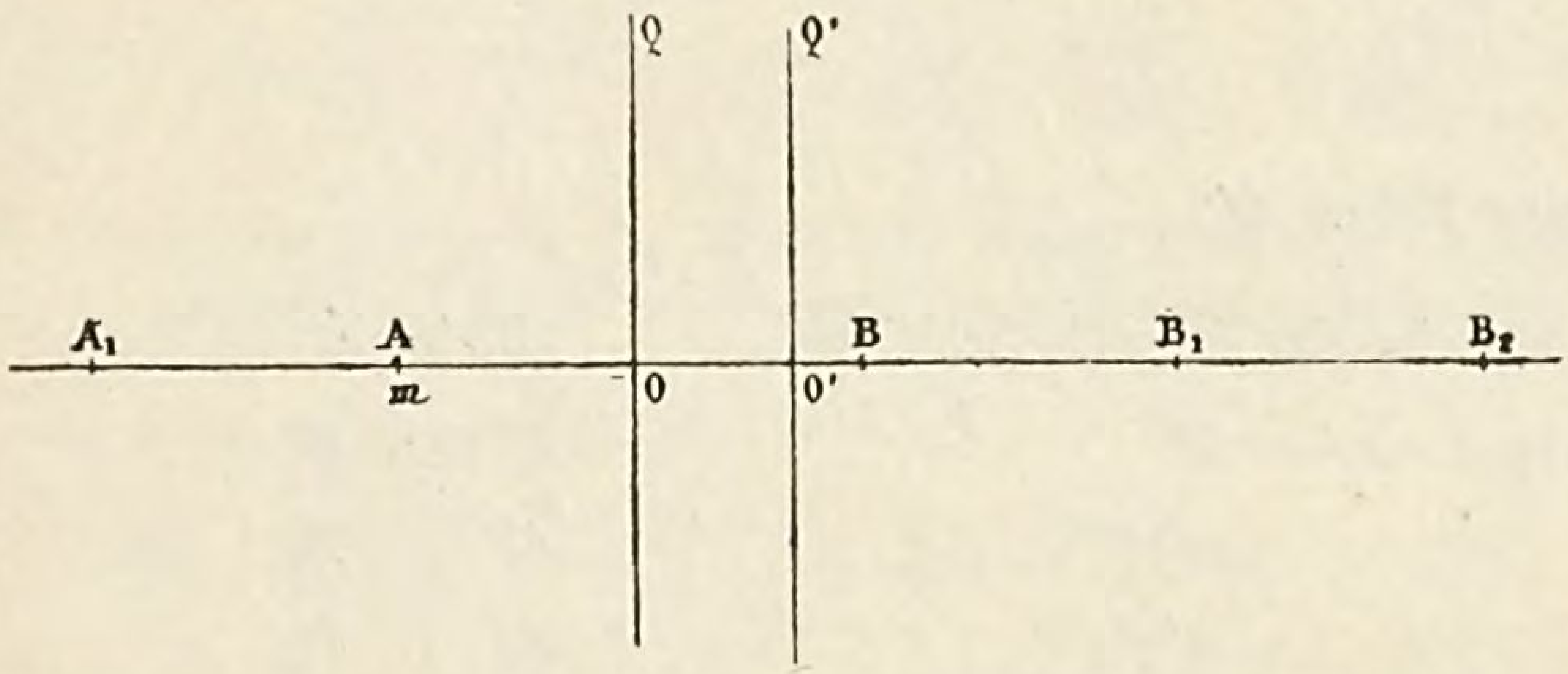


Fig. 38.

Wir setzen noch

$$\gamma = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2},$$

$$\gamma' = \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 + \mu_3}.$$

Der Bedingung des Gleichgewichtes auf der Ebene Q wird genügt durch eine Schicht $m\gamma$, die nach beiden Seiten so wirkt, als ob sie in A bezüglich in B läge.

Die Masse m in A und die Schicht $m\gamma$ auf der Ebene Q erzeugen auf der Ebene Q' eine Schicht $m(1+\gamma)\gamma' = m'$, die so wirkt, als ob sie in A bezüglich in B_1 concentrirt wäre.

Die Schicht m' wirkt auf die Ebene Q zurück und ruft dort eine Schicht $-m'\gamma$ hervor, deren Bild in B_1 bezüglich A_1 liegt.

Ebenso liefert die Schicht $-m'\gamma$ auf Q eine Schicht $-m'\gamma\gamma'$ auf Q', deren Bild in A_1 bezüglich B_2 liegt . . . etc.

Die Bestimmung dieser auf einander folgenden Schichten ist nichts anderes als die Anwendung der Murphy'schen Methode (**86**).

Man erhält so nach einander:

auf der Ebene Q

auf einander folgende Schichten	Bilder in
$m\gamma$	A bez. B
$-m'\gamma$	A_1 „ B_1
$+m'\gamma^2\gamma'$	A_2 „ B_2
$-m'\gamma^3\gamma'^2$	A_3 „ B_3
.	. .
.	. .
.	. .
.	. .

und auf der Ebene Q'

auf einander folgende Schichten	Bilder in
$m(1+\gamma)\gamma' = m'$	A bez. B_1
$-m'\gamma\gamma'$	A_1 „ B_2
$+m'\gamma^2\gamma'^2$	A_2 „ B_3
.	. .
.	. .
.	. .
.	. .

Die algebraische Summe aller dieser Schichten liefert die Ladungen M, M' der Ebenen Q, Q' im schlieslichen Gleichgewichte, und es ist

$$M = m\gamma - m'\gamma\,[1 - \gamma\gamma' + (\gamma\gamma')^2 - (\gamma\gamma')^3 + \cdots] = m\gamma - m'\gamma\frac{1}{1+\gamma\gamma'}$$

$$= m\gamma\left[1 - \frac{(1+\gamma)\gamma'}{1+\gamma\gamma'}\right] = m\frac{\gamma(1-\gamma')}{1+\gamma\gamma'}$$

$$M' = m'[1 - \gamma\gamma' + (\gamma\gamma')^2 - \cdots] = m'\frac{1}{1+\gamma\gamma'} = m\frac{\gamma'(1+\gamma)}{1+\gamma\gamma'}.$$

Die Dichte in jedem Punkte ist der algebraischen Summe der Dichten aller über einander gelagerten Schichten gleich.

Das Potential V in einem Punkte P im ersten Mittel kann als von der Masse m und von allen in B, B_1, B_2 ... etc. gelegenen Bildern hervorgerufen aufgefasst werden.

In den verschiedenen Punkten B_1, B_2 . . . sind je zwei verschiedene Bilder vorhanden, die von den Schichten der beiden Ebenen Q und Q' herrühren, und man erhält

in B_1

$$m' - m'\gamma = m'(1-\gamma) = m(1-\gamma^2)\gamma',$$

in B_2

$$-m'\gamma\gamma' + m'\gamma^2\gamma' = -m'\gamma\gamma'(1-\gamma) = -m(1-\gamma^2)\gamma'\gamma\gamma',$$

. .

in B_{n+1}

$$\pm m'(\gamma\gamma')^n \mp m'(\gamma\gamma')^n\gamma = \pm m'(\gamma\gamma')^n(1-\gamma) = \pm m(1-\gamma^2)\gamma'(\gamma\gamma')^n;$$

woraus sich ergiebt

$$V_1 = m\left\{\frac{1}{PA} + \frac{\gamma}{PB} + (1-\gamma^2)\gamma'\left[\frac{1}{PB_1} - \frac{\gamma\gamma'}{PB_2} + \frac{(\gamma\gamma')^2}{PB_3} \cdots \pm \frac{(\gamma\gamma')^n}{PB_{n+1}} \mp \cdots\right]\right\}.$$

Ebenso wird das Potential V_3 im dritten Mittel durch die in den Punkten $A, A_1, A_2 \ldots$ gelegenen Bilder hervorgerufen, auf denen die Massen sind

$$m + m\gamma + m' = m(1+\gamma)(1+\gamma')$$
$$-m'\gamma - m'\gamma\gamma' = -m(1+\gamma)(1+\gamma')\gamma\gamma'$$

.

$$\pm(m'\gamma^n\gamma'^{n-1} + m'\gamma^n\gamma'^n) = \pm m(1+\gamma)(1+\gamma')(\gamma\gamma')^n;$$

man erhält demnach

$$V_3 = m(1+\gamma)(1+\gamma')\left[\frac{1}{PA} - \frac{\gamma\gamma'}{PA_1} + \frac{(\gamma\gamma')^2}{PA_2} - \cdots \pm \frac{(\gamma\gamma')^n}{PA_n} \cdots\right].$$

Im zweiten, zwischen den Ebenen Q und Q' gelegenen Mittel endlich rührt das Potential von der Masse m, von den Bildern in $A_1, A_2 \ldots$ der Schichten der Ebene Q und von den Bildern in $B_1, B_2 \ldots$ der Schichten der Ebene Q' her, und man würde in derselben Weise finden

$$V_2 = m(1+\gamma)\left[\frac{1}{PA} - \frac{\gamma\gamma'}{PA_1} + \frac{(\gamma\gamma')^2}{PA_2} - \cdots\right]$$
$$+ m(1+\gamma)\gamma'\left[\frac{1}{PB_1} - \frac{\gamma\gamma'}{PB_2} + \frac{(\gamma\gamma')^2}{PB_3} - \cdots\right].$$

Ist das dritte Mittel mit dem ersten identisch, so braucht man nur zu setzen $\mu_1 = \mu_3$, und man erhält $\gamma' = -\gamma$.

Es ergiebt sich dann

$$M = \quad m\frac{\gamma(1+\gamma)}{1-\gamma^2} = \quad m\frac{\gamma}{1-\gamma},$$

$$M' = -m\frac{\gamma(1+\gamma)}{1-\gamma^2} = -m\frac{\gamma}{1+\gamma},$$

$$V_1 = m\left\{\frac{1}{PA} + \frac{\gamma}{PB} - (1-\gamma^2)\gamma\left[\frac{1}{PB_1} + \frac{\gamma^2}{PB_2} + \cdots \frac{\gamma^{2n}}{PB_{n+1}} + \cdots\right]\right\},$$

$$V_3 = m(1-\gamma^2)\left[\frac{1}{PA} + \frac{\gamma^2}{PA_1} + \frac{\gamma^4}{PA_2} + \cdots + \frac{\gamma^{2n}}{PA_n} + \cdots\right],$$

$$V_2 = m(1+\gamma)\left\{\left[\frac{1}{PA} + \frac{\gamma^2}{PA_1} + \cdots\right] - \gamma\left[\frac{1}{PB_1} + \frac{\gamma^2}{PB_2} + \cdots\right]\right\}.$$

Bezeichnet man bez. mit α und β die beiden Reihen, welche die Entfernungen PA, $PA_1 \ldots PB$, $PB_1 \ldots$ enthalten, die ihrerseits bestimmte Funktionen der Coordinaten des Punktes P sind, so erhält man einfach

$$V_1 = m\left[\frac{1}{PA} + \frac{\gamma}{PB} - (1-\gamma^2)\gamma\beta\right],$$

$$V_3 = m(1-\gamma^2)\alpha,$$

$$V_2 = m(1+\gamma)\,[\alpha - \gamma\beta].$$

151. Zwei entgegengesetzt gleiche, einander unendlich nahe Massen. — Wir nehmen jetzt an, dass die beiden entgegengesetzt gleichen Massen $+m$ und $-m$ der Aufgabe (**144**) einander unendlich nahe sind, oder, was dasselbe ist, dass wir den Zustand des Feldes in einer gegen den Abstand

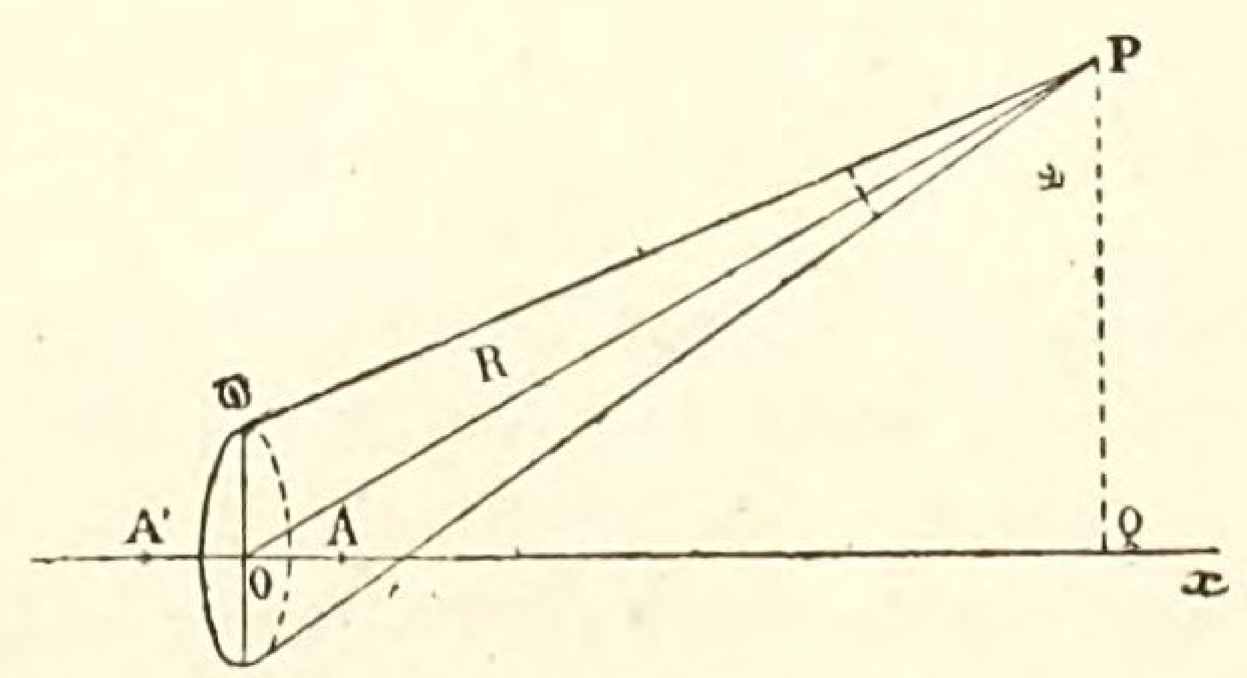


Fig. 39.

$2a$ der beiden Punkte A und A' sehr grossen Entfernung untersuchen. Der Wert des Potentials in einem Punkte P, (Fig. 39),

$$V = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = m\,\frac{r'-r}{rr'},$$

vereinfacht sich zu

$$V = m\,\frac{r'-r}{r^2} = 2am\,\frac{\cos\omega}{R^2} = 2am\,\frac{x}{R^3},$$

wenn man mit ω den Winkel der Richtung OP gegen die Achse AA' und OQ mit x bezeichnet.

Für dieses Potential kann leicht ein Ausdruck abgeleitet werden, der zu einer sehr anschaulichen Interpretation führt. Ist nämlich ϖ eine ebene Figur, beispielsweise ein Kreis, dessen Ebene im Punkte O auf AA' senkrecht steht, und nennen wir θ den Körperwinkel, unter welchem diese Figur im Punkte P erscheint, so erhält man

$$R^2\theta = \varpi \cos\omega,$$

und folglich

$$V = \frac{2ma}{\varpi}\theta.$$

Wählt man nun $\varpi = 2ma$, so ergiebt sich

(16) $$V = \theta.$$

Der Wert des Potentials zweier unendlich naher, entgegengesetzt gleicher Massen in einem Punkte wird durch den körperlichen Winkel gemessen, unter welchem in diesem Punkte eine dem elektrischen Momente 2ma der beiden Massen an Inhalt gleiche Fläche erscheint, wenn diese auf der die Massen verbindenden Geraden in ihrer Mitte senkrecht steht.

Die Gleichung der Niveauflächen

(17) $$V = \theta = \frac{\varpi \cos\omega}{R^2} = \frac{\varpi x}{R^3}$$

zeigt, dass alle Niveauflächen ähnlich sind, und dass für dieselbe Richtung ω die Werte von R den Quadratwurzeln aus den Potentialen umgekehrt proportional sind.

152. — In der Gleichung der Kraftlinien,

$$\cos\omega' - \cos\omega = \frac{N}{2\pi m},$$

unterscheiden sich, da a sehr klein ist, ω und ω' sehr wenig von einander, so dass, wenn die Differenz $\omega - \omega' = \delta$ ist,

$$\cos\omega' - \cos\omega = d\cos\omega = \delta \sin\omega = \sin\omega \cdot \frac{2a\sin\omega}{R} = \frac{2a}{R}\sin^2\omega$$

wird.

Man erhält demnach als Gleichung der Kraftlinien

(18) $$\frac{\sin^2\omega}{R} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{N}{2\pi m} = \frac{N}{2\pi\,(2ma)} = \frac{N}{2\pi\varpi}.$$

Alle diese Curven sind ähnlich, ihre nach einer bestimmten Richtung genommenen Entfernungen R von den Massen stehen zu einander im umgekehrten Verhältnis von N, sie werden von der Achse in ihrem Ursprunge berührt, und die Punkte, in denen sie bezüglich von vertikalen Tangenten berührt werden, liegen augenscheinlich auf der in der vorher behandelten Aufgabe (**144**) gefundenen Asymptote, deren Gleichung war

$$\mathrm{tg}^2\omega = 2.$$

153. — Die Gleichungen (14) und (15) in § **146** liefern als Werte der Kraftwirkung auf die Punkte der Achse und der zu dieser senkrechten Transversalachse (Fig. 40)

$$F_1 = 2\frac{\bar{\omega}}{R^3},$$

$$F_2 = \frac{\bar{\omega}}{R^3},$$

und folglich

$$F_1 = 2\,F_2.$$

Für einen Punkt P, der in derselben Entfernung, aber in einer durch

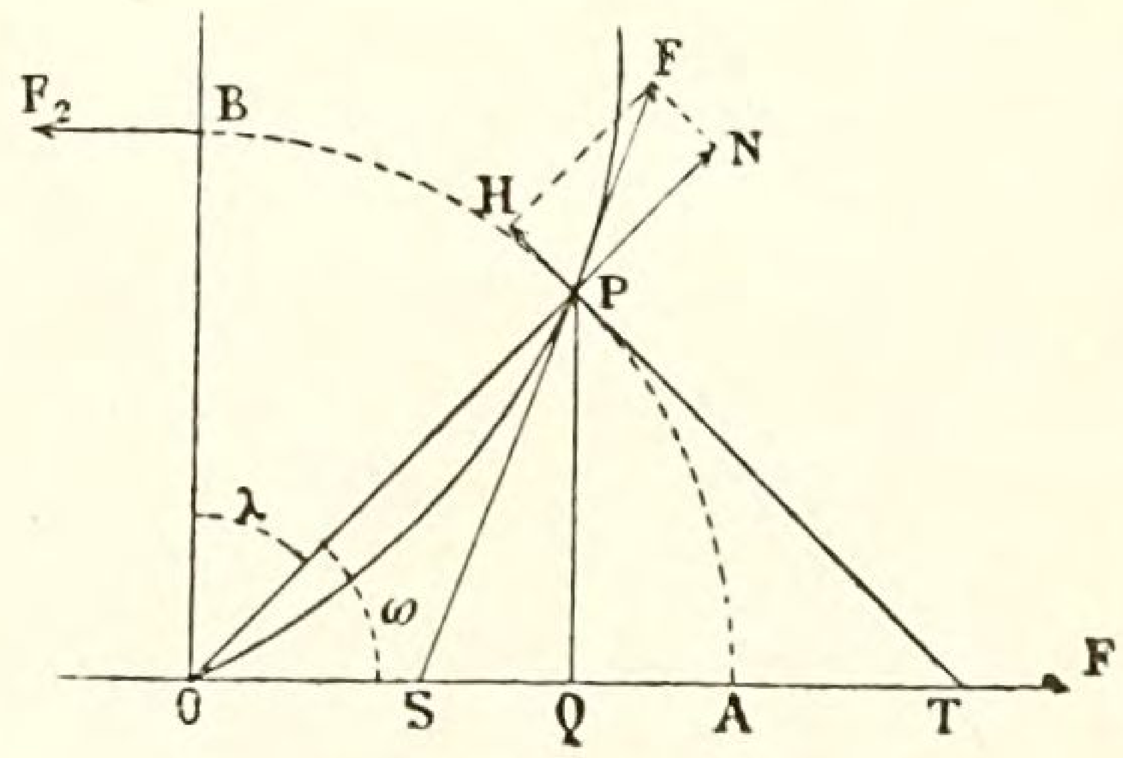


Fig. 40.

den Winkel ω charakterisirten Richtung liegt, erhält man aus (17) die Gleichung

(19)
$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\bar{\omega}\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}\right) = \frac{\bar{\omega}}{R^3}(3\cos^2\omega - 1),$$
$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\bar{\omega}\frac{-3xy}{r^5} = \frac{\bar{\omega}}{R^3}\,3\sin\omega\cos\omega.$$

Um den Punkt O als Mittelpunkt schlagen wir einen Kreis mit dem Radius R, der durch den Punkt P geht, und bestimmen in diesem Punkte die normale Componente F_n und die tangentiale Componente F_t der Kraft; man erhält

(20)
$$F_n = X\cos\omega + Y\sin\omega = \frac{\bar{\omega}}{R^3}\,2\cos\omega,$$
$$F_t = -X\sin\omega + Y\cos\omega = \frac{\bar{\omega}}{R^3}\sin\omega.$$

Bezeichnet man mit i die Neigung der Kraft F gegen die Tangente und mit λ das Complement des Winkels ω, so ergiebt sich

(21)
$$\operatorname{tg} i = \frac{F_n}{F_t} = 2\operatorname{ctg}\omega = 2\operatorname{tg}\lambda.$$

Die ganze auf P wirkende Kraft ist bestimmt durch

$$(22)\qquad F^2 = X^2 + Y^2 = \left(\frac{\varpi}{R^3}\right)^2 (3\cos^2\omega + 1) = \left(\frac{\varpi}{R^3}\right)^2 (3\sin^2\lambda + 1).$$

154. — Wir verlängern die Tangente bis zum Schnitte mit der Achse in T und die Kraftrichtung bis S; die Dreiecke OPS und SPT liefern.

$$\frac{PS}{\sin\omega} = \frac{OS}{\cos i},$$
$$\frac{PS}{\cos\omega} = \frac{ST}{\sin i};$$

hieraus findet man

$$OS\frac{\sin\omega}{\cos i} = ST\frac{\cos\omega}{\sin i},$$

und endlich

$$OS \operatorname{tg} i = ST \operatorname{ctg}\omega = ST \operatorname{tg}\lambda.$$

Da aber nach (21) $\operatorname{tg} i = 2\operatorname{tg}\lambda$, so folgt

$$ST = 2\,OS$$

oder

$$(23)\qquad OT = 3\,OS.$$

Der durch diese Formel ausgesprochene Satz rührt von Gauss her; derselbe führt zu einem bemerkenswerten Ausdruck für die Kraft. Es ist nämlich

$$R = OT\cos\omega = 3\,OS\cos\omega$$
$$OQ = R\cos\omega = 3\,OS\cos^2\omega$$

und folglich

$$3\cos^2\omega = \frac{OQ}{OS}.$$

Man erhält demnach durch Einsetzen

$$(24)\qquad F^2 = \left(\frac{\varpi}{R^3}\right)^2 \left(\frac{OQ}{OS} + 1\right).$$

155. — Bei der Auswertung der Kraft in den einzelnen Punkten treten die elektrischen Massen nur mit ihrem Momente $2ma = \varpi$ in Rechnung, welches Moment für passende Werte von m endlich bleiben kann, auch wenn die Entfernung $2a$ unbeschränkt klein ist. Die gesammte von zwei unendlich nahen Centren ausgehende Kraftströmung ist hiernach nicht bestimmt, aber es ist leicht die von einer Kugel mit gegebenem Radius R ausgehende Strömung zu berechnen.

Die normale Componente im Punkte P, der dem Winkel ω entspricht, hat nach den Gleichungen (20) den Wert

$$F_n = \frac{\varpi}{R^3} 2\cos\omega.$$

Da die Calotte von der Winkelöffnung 2ω gleich $2\pi R^2(1-\cos\omega)$ ist, ist die unendlich schmale Zone, die dem Winkel $d\omega$ entspricht.

$$dS = 2\pi R^2 \sin\omega\, d\omega.$$

Die Kraftströmung, die durch diese Zone geht, ist demnach

$$dQ = \frac{4\pi\varpi}{R} \sin\omega \cos\omega\, d\omega,$$

und die gesammte dem Winkel ω entsprechende Strömung ist

$$Q_\omega = \frac{4\pi\varpi}{R} \int_0^\omega \sin\omega \cos\omega\, d\omega = \frac{2\pi\varpi}{R} \sin^2\omega.$$

Dieser Ausdruck ist nichts anderes als die Ordnung N der Kraftlinien, die durch den Umfang der betrachteten Zone gehen, und man hätte denselben auch unmittelbar ableiten können.

Macht man $\omega = \frac{\pi}{2}$, so erhält man in $\frac{2\pi\varpi}{R}$ die gesammte Strömung auf einer Seite der Transversalebene OB; man sieht, dass dieselbe umgekehrt proportional R ist.

Um in einer Meridianebene die Kraftlinien zu construiren, welche den durch die Zahlen 1, 2, 3, 4 ⋯ dargestellten Strömungen entsprechen, braucht man demnach nur auf der Transversalachse von O aus Längen abzutragen, die den Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$ proportional sind, und nach Gleichung (18) die Kraftlinien zu ziehen, welche diese Achse in den Endpunkten der verschiedenen Strecken schneiden.

156. Induction auf einen unendlich kleinen Körper. — Das System zweier entgegengesetzt gleicher, unendlich naher Massen stellt den Zustand eines unendlich kleinen, leitenden oder nicht leitenden, ursprünglich neutralen, dann in irgend ein elektrisches Feld gebrachten Körpers dar. Denn der Körper bedeckt sich durch Induction mit zwei getrennten Schichten von entgegengesetzt gleichen Massen, deren jede so wirkt, als ob sie im Schwerpunkte vereinigt wäre.

Dasselbe gilt für jeden ursprünglich neutralen Körper, d. h. für einen solchen, dessen Gesammtladung Null ist, falls man seine Wirkung in so grosser Entfernung von ihm untersucht, dass seine Dimensionen nicht mehr n Betracht kommen.

157. Polarisirte Kugel. — Gleitschichten.*) — Wir betrachten zwei Kugeln S und S' (Fig. 41), deren Mittelpunkte A und A' in unendlich

*) Was hier über die Gleitschichten (*couches de glissement*) gesagt ist, ist das Resultat einer rein gedanklichen geometrischen Operation, mit der nicht eine reale Erscheinung oder eine besondere Constitution des elektrisirten Körpers dargestellt werden soll. Den Ausdruck „elektrische Verschiebung“ wollen wir allein zur Bezeichnung der mechanischen Modification des Mediums benutzen, welche Maxwell in seiner Theorie der Dielektrica im Auge hat.

kleinem Abstande δ von einander liegen, deren Radien gleich gross sind, und deren Ladungen von derselben Stärke, aber entgegengesetztem Zeichen gleichförmig auf ihnen mit den Dichten ρ und $-\rho$ ausgebreitet sind. Dieses System entspricht thatsächlich dem zweier entgegengesetzt gleicher, auf je einer Hälfte einer Kugelfläche ausgebreiteter Schichten.

Diese specielle Form der Elektrisirung hat aber grosses Interesse, da sie im Magnetismus einer sehr einfachen Art der Magnetisirung entspricht. Ladungen, die in dieser Weise zwei homogene Massen von gleichen Dichten, aber entgegengesetztem Zeichen darstellen, von denen die eine um eine unendlich kleine Grösse verschoben ist, kann man als *Gleitschichten* bezeichnen.

Das Mittel, welches die Kugeln abgrenzen, kann als ein polarisirtes angesehen werden, dessen elektrische Polarisationsachse der Richtung parallel ist, in der die Verschiebung erfolgt ist.

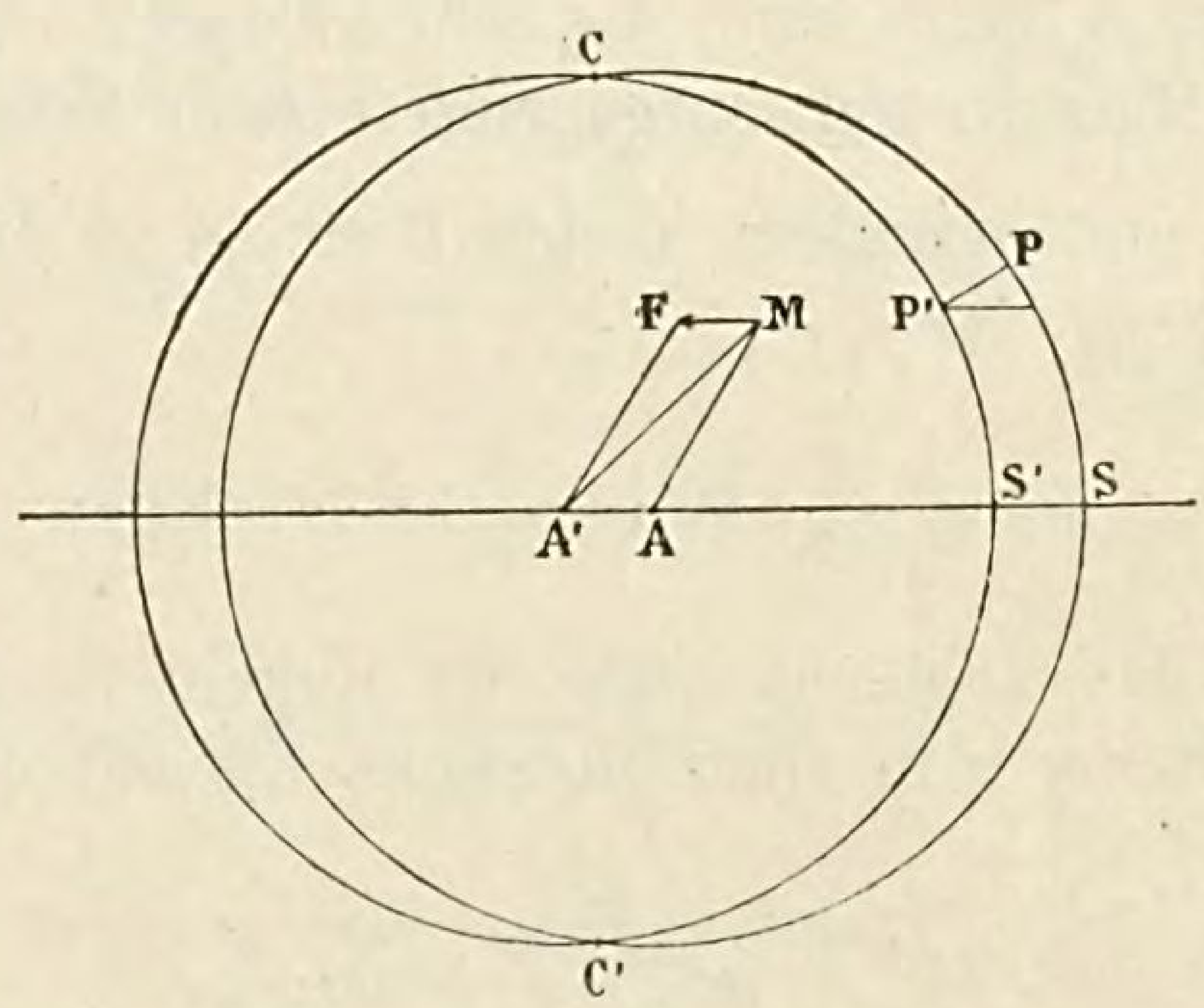


Fig. 41.

Im vorliegenden Falle ist die Dichte der Schicht in jedem Punkte proportional der entsprechenden Dicke PP' des den beiden Kugeln nicht gemeinschaftlichen Raumteiles. Bezeichnen wir mit σ_0 diese Dichte auf der Centrale, so erhält man

$$\sigma_0 = \rho\delta.$$

Da die Dicke der Schicht in Richtung der Centrale constant ist, so hat die Dichte in einem Punkte P im Endpunkte eines Radius, der mit der Achse den Winkel ω bildet, den Betrag

$$\sigma = \sigma_0 \cos\omega = \rho\delta \cos\omega.$$

Die Wirkung auf einen Punkt M im Innern ist so gross wie die zweier homogener Kugeln von den Radien AM und $A'M$ auf einen Punkt ihrer eigenen Oberfläche. Dieselbe ist demnach für die Kugel A gleich $\frac{4}{3}\pi\rho AM$ und längs AM gerichtet, für die Kugel A' gleich $\frac{4}{3}\pi\rho MA'$ und längs MA'

gerichtet. Folglich ist die Resultante AA' proportional und hat den Wert

$$\frac{4}{3}\pi\rho AA' = \frac{4}{3}\pi\rho\delta = \frac{4}{3}\pi\sigma_0;$$

dieselbe ist also constant. Bezeichnen wir diese Kraft mit F_i, und zählen wir dieselbe von links nach rechts als positiv, so erhalten wir

$$F_i = -\frac{4}{3}\pi\sigma_0.$$

Im Innern der Kugel sind hiernach die Niveauflächen äquidistante, zur Achse AA' senkrechte Ebenen; das Potential in einem Punkte variirt der Abscisse x des Punktes proportional, und da dieselbe im Mittelpunkte Null ist, erhält man

$$V_i = \frac{4}{3}\pi\sigma_0 x.$$

Für den äusseren Raum kann die Schicht durch zwei homogene Kugeln oder durch zwei Massen von entgegengesetztem Zeichen ersetzt werden, die $\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ gleich und bezüglich in den Punkten A und A' vereinigt sind, und deren Moment ist

$$\varpi = \delta \cdot \frac{4}{3}\pi R^3\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma_0 = u\sigma_0,$$

wenn man mit u das Volumen einer der Kugeln bezeichnet. Man erhält also für die Entfernung r in einer Richtung, die mit der Achse den Winkel ω bildet,

$$V_a = u\sigma_0\frac{\cos\omega}{r^2} = u\sigma_0\frac{x}{r^3}.$$

Da die Fläche einer Elementarzone $d\omega$

$$dS = 2\pi R^2 \sin\omega\, d\omega$$

ist, so ist die auf einer solchen enthaltene Elektricitätsmenge

$$\sigma dS = 2\pi R^2\sigma_0 \sin\omega \cos\omega d\omega = d(\pi R^2\sigma_0 \sin^2\omega).$$

Die Gesammtmasse einer jeden Schicht ist demnach

$$M = \int \sigma dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\pi R^2\sigma_0 \sin^2\omega) = \pi R^2\sigma_0.$$

Man hätte dieses Resultat von vornherein angeben können, wenn man berücksichtigt, dass, da in jedem Punkte die Dicke der Schicht in Richtung der Achse gleich δ ist, das Gesammtvolumen gleich dem Produkt dieser constanten Dicke in die Projektion der Halbkugel auf eine zu AA' senkrechte Ebene ist.

Die von der positiven Schicht ausgehende Kraftströmung ist

$$Q = 4\pi M = (4\pi R^2)\,\pi\sigma_0 = S\pi\sigma_0,$$

wenn S die Gesammtoberfläche der Kugel bedeutet.

158. — Es scheint vorteilhaft, hier alle eben erhaltenen Resultate noch einmal zusammenzustellen und jede der in Betracht kommenden Grössen als Funktion des Dichtigkeitsmaximums σ_0 oder der inneren Kraft F_i auszudrücken; man erhält so, wenn man mit a den Radius der Kugel und mit u ihr Volumen bezeichnet,

$$F_i = -\frac{4}{3}\pi\rho\delta = -\frac{4}{3}\pi\sigma_0 = -\frac{u\sigma_0}{a^3},$$

$$\bar{\omega} = u\sigma_0 = -a^3 F_i,$$

$$V_i = \frac{u\sigma_0 x}{a^3} = -F_i x = -F_i r\cos\omega,$$

$$V_a = u\sigma_0\frac{x}{r^3} = -F_i\frac{a^3}{r^3}x = -F_i\frac{a^3\cos\omega}{r^2},$$

$$X_a = \frac{u\sigma_0}{r^3}(3\cos^2\omega - 1) = F_i\frac{a^3}{r^3}(1 - 3\cos^2\omega),$$

$$Y_a = \frac{u\sigma_0}{r^3}\,3\sin\omega\cos\omega = -F_i\frac{a^3}{r^3}\,3\sin\omega\cos\omega,$$

$$F_n = \frac{u\sigma_0}{r^3}\,2\cos\omega = -2F_i\frac{a^3}{r^3}\cos\omega,$$

$$F_t = \frac{u\sigma_0}{r^3}\sin\omega = -F_i\frac{a^3}{r^3}\sin\omega,$$

$$M = \pi a^2\sigma_0 = \frac{3}{4}\frac{u\sigma_0}{a} = -\frac{3}{4}F_i a^2,$$

$$Q = S\pi\sigma_0 = -S\frac{3}{4}F_i = -3\pi a^2 F_i.$$

159. **Leitende Kugel in einem gleichförmigen Felde.** — Wir nehmen jetzt an, dass eine leitende Kugel in ein gleichförmiges Feld, in welchem in der der xAchse parallelen Richtung die Intensität φ herrscht, gebracht ist, und es sei V_0 der Wert des Potentials in der durch den Mittelpunkt gehenden Ebene. Die Kugel wird dann durch Influenz elektrisch, auf einer Seite positiv, auf der andern negativ, bedeckt sich also mit zwei Gleitschichten, die gegen die Richtung des Feldes senkrecht liegen. Da die Kugel leitend ist, stellt sich auf ihr Gleichgewicht her, und die ganze elektrische Kraft sinkt in ihrem Innern auf Null herab. Man erhält also hier

$$F_i + \varphi = 0,$$

das Potential ist demnach constant.

Um demnach die Wirkung einer leitenden Kugel in einem gleichförmigen Felde von der Intensität φ zu erhalten, braucht man folglich nur F_i in den letzten Formeln durch $-\varphi$ zu ersetzen, wodurch man erhält

$$\sigma_0 = \frac{3}{4\pi}\varphi,$$

$$\bar{\omega} = a^3\varphi,$$

$$V_i = \varphi r \cos\omega,$$

$$V_a = \varphi \frac{a^3}{r^3}\cos\omega,$$

$$X_a = \varphi \frac{a^3}{r^3}(3\cos^2\omega - 1),$$

$$Y_a = \varphi \frac{a^3}{r^3} 3 \sin\omega \cos\omega,$$

$$F_n = 2\varphi \frac{a^3}{r^3}\cos\omega,$$

$$F_t = \varphi \frac{a^3}{r^3}\sin\omega,$$

$$M = \frac{3}{4}a^2\varphi,$$

$$Q = 3\pi a^2\varphi.$$

160. — Bezeichnet man mit R den Radius eines auf einer Niveaufläche construirten Kreises, durch den in dem ursprünglichen Felde die durch Q bestimmte Strömung gehen würde, d. h. des Kreises, der alle nach der leitenden Kugel gerichteten Kraftlinien auffängt, so erhält man

$$\pi R^2\varphi = 4\pi M = 3\pi a^2\varphi,$$

$$R^2 = 3a^2.$$

Dieser Kreis hat also eine dreimal so grosse Fläche, als der grösste Kreis der Kugel.

Die Kraftlinien des Feldes stossen normal auf die Oberfläche der Kugel und treten normal aus derselben heraus, ausser denen, die auf den Aequator treffen; diese bilden mit der Normale einen Winkel von 45°.

Denn für einen beliebigen in der Entfernung r, in der Richtung ω gelegenen Punkt ist der Winkel θ der resultirenden Kraft gegen den Radius vector gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\varphi\sin\omega - F_t}{\varphi\cos\omega + F_n} = \operatorname{tg}\omega \frac{1 - \frac{a^3}{r^3}}{1 + 2\frac{a^3}{r^3}}.$$

Dieser Winkel ist also stets Null, wenn man $r = a$ annimmt, d. h. wenn der Punkt auf der Kugel liegt, falls nicht $\operatorname{tg}\omega = \infty$ wird. Für die Punkte des Aequators aber ist der Winkel ω gleich $\frac{\pi}{2}$, also $\operatorname{tg}\omega = \infty$, und der Ausdruck wird unbestimmt.

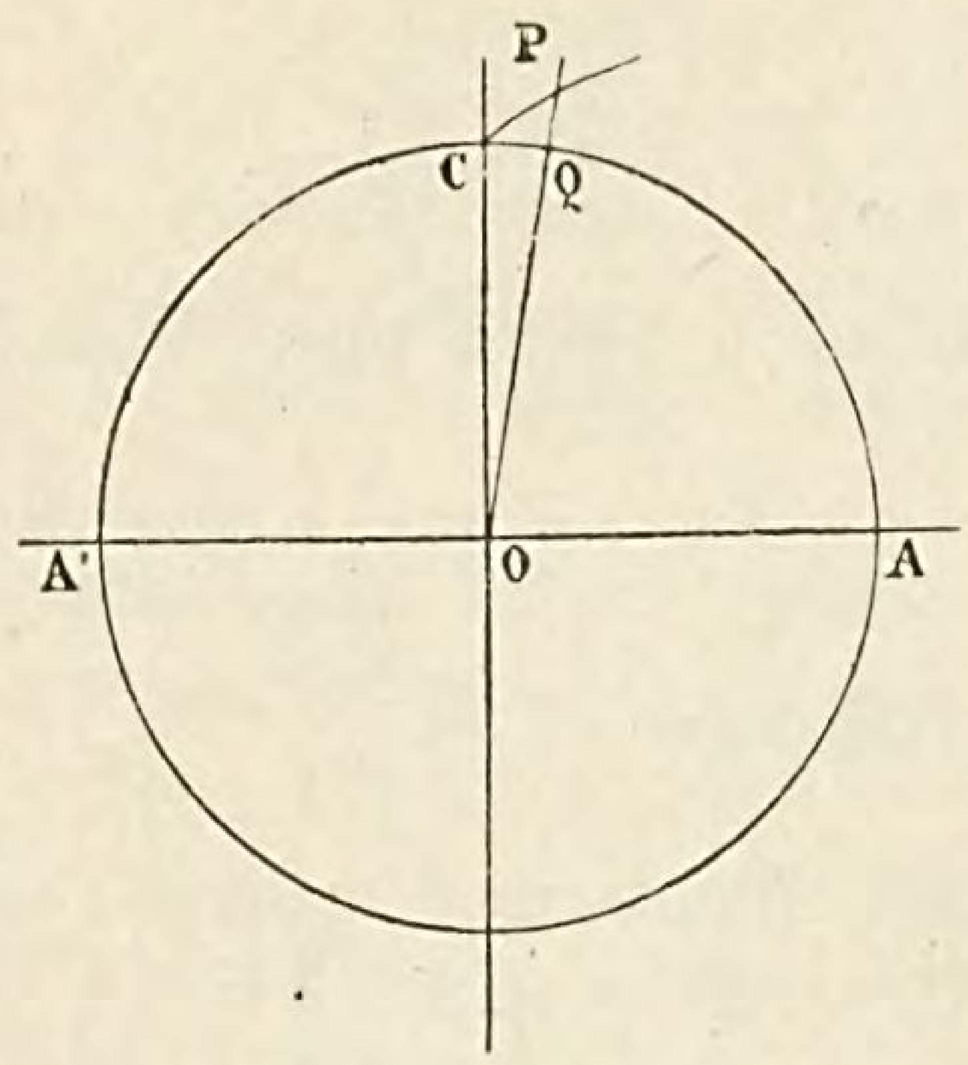


Fig. 42.

Nehmen wir nun an, dass der Winkel ω sich sehr wenig von $\frac{\pi}{2}$ unterscheide, so ist die Tangente des Winkels θ für einen Punkt P (Fig. 42), der der Oberfläche benachbart ist,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{CQ}{QP} = \frac{a\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}{r - a} = \frac{a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}{r - a} = \frac{a}{r - a} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\omega}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der vorhergehenden, die immer gilt, und berücksichtigt man, dass $r - a$ sehr klein ist, so ergiebt sich

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{a}{r - a} \cdot \frac{r^3 - a^3}{r^3 + 2a^3} = \frac{a}{r - a} \cdot \frac{3a^2(r - a)}{r^3 + 2a^3} = \frac{3a^3}{r^3 + 2a^3} = 1.$$

Die Kraftlinien, welche die Kugel im Aequator treffen, bilden also mit der Oberfläche einen Winkel von 45°.

Die Niveaufläche, welche das ursprüngliche Potential V_0 des Kugelmittelpunktes besitzt, ist eine Ebene, die sich bis zum Aequator erstreckt und die dann in der Kugelfläche selbst fortgesetzt wird. Der Aequator ist eine singuläre Linie dieser Niveaufläche.

161. Nicht isolirte leitende Kugel in einem gleichförmigen Felde. — Es ist leicht von dem eben behandelten Falle zu einer in einem gleichförmigen Felde gelegenen Kugel, die mit der Erde leitend verbunden ist, überzugehen. Es braucht in der That nur das ganze innere Potential, welches im vorigen Falle den Wert V_0 hatte, Null zu werden, und es genügt hierfür zu dem vorhin angenommenen Zustande eine gleichförmige Ladung hinzuzufügen, die im Stande ist, dem Innern ein V_0 entgegengesetzt gleiches

Potential zu erteilen. Ist $-M'$ die Masse dieser Schicht und $-\sigma'$ deren Dichte, so erhält man

$$V_0 = \frac{M'}{a} = \frac{4\pi a^2 \sigma'}{a} = 4\pi a \sigma',$$

und hieraus

$$\sigma' = \frac{V_0}{4\pi a}.$$

Die resultirende Dichte in irgend einem Punkte ist

$$\sigma = \sigma_0 \cos\omega - \sigma' = \frac{3}{4\pi}\varphi \cos\omega - \frac{V_0}{4\pi a},$$

$$4\pi\sigma - 3\varphi\cos\omega = \frac{V_0}{a}.$$

Wenn die resultirende Dichte in dem dem Felde abgewendeten Pole A der Kugel Null sein soll, so muss sein

$$3\varphi a = V_0.$$

Nennt man V_1 und V_2 die ursprünglichen Potentiale in A' und A, den Polen der Kugel, so hat die Kraft des Feldes den Wert

$$\varphi = \frac{V_2 - V_1}{2a},$$

und das Potential im Mittelpunkte den Wert

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Damit geht die obige Bedingungsgleichung über in

$$\frac{3}{2}(V_2 - V_1) = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

oder

$$V_2 = 2V_1.$$

Wenn also die Dichte in A Null sein soll, müssen die ursprünglichen Werte des Potentials in den beiden Polen im Verhältnisse von 1 zu 2 stehen.

Die Dichte in einem andern Punkte ist negativ, und folglich ist die Kugeloberfläche überall negativ, so lange $V_2 < 2V_1$ ist.

Andernfalls ist der grösste Teil der Oberfläche auch noch negativ; aber um den Punkt A herum liegt eine mehr oder weniger ausgedehnte Zone positiver Elektricität.

162. Dielektrische Kugel in einem gleichförmigen Felde. — Die gleichförmige Polarisation oder die Elektrisirung durch Gleitschichten stellt nach der von Maxwell auf elektrische Fragen übertragenen Theorie von Poisson in gleicher Weise den Zustand einer dielektrischen Kugel in einem gleich-

förmigen Felde dar. Nur wird, wenn wir φ die Intensität des Feldes, F_i die constante, innere, von der idealen Schicht herrührende Kraft nennen, die resultirende Kraft in jedem Punkte im Innern, statt Null zu sein, den constanten Wert $\varphi + F_i$ haben.

Wir können zeigen, dass dann in der That die für das Gleichgewicht der Dielektrica notwendige Bedingung befriedigt ist, dass nämlich in der ganzen Ausdehnung der Fläche ein constantes Verhältnis zwischen den von innen und von aussen wirkenden normalen Kraftcomponenten besteht.

Da dieses Verhältnis μ durch die Natur des Dielektricums gegeben ist, ist es möglich, die Kraft F_i und in Folge dessen die Verteilung der idealen Schicht zu bestimmen.

Für einen auf der Oberfläche in der Richtung ω angenommenen Punkt ist die äussere Normalcomponente $\varphi \cos\omega + F_n = (\varphi - 2F_i)\cos\omega$ und die innere Normalcomponente $(\varphi + F_i)\cos\omega$. Das Verhältnis dieser beiden Kräfte

$$\mu = \frac{(\varphi - 2F_i)\cos\omega}{(\varphi + F_i)\cos\omega} = \frac{\varphi - 2F_i}{\varphi + F_i}$$

ist demnach constant, und man findet hieraus

$$F_i = -\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\varphi.$$

Man sieht, dass die Aufgabe vollständig bestimmt ist, und dass der Zustand der Kugel derselbe ist wie der einer leitenden Kugel von demselben Radius in einem gleichförmigen elektrischen Felde, dessen Intensität $\varphi\frac{\mu - 1}{\mu + 2}$ wäre. Man findet hieraus (**159**)

$$\sigma_0 = \frac{3}{4\pi}\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\varphi.$$

163. — Die von der Kugel ausgehende Kraftströmung ist gleich der durch dieselbe hindurchgehenden Strömung $\pi a^2(\varphi + F_i)$ vermehrt um die Strömung $-3\pi a^2 F_i$, welche letztere jeder der Oberflächenschichten entspricht.

Man erhält demnach

$$Q = \pi a^2(\varphi + F_i - 3F_i) = \pi a^2(\varphi - 2F_i)$$

$$= \pi a^2\varphi\left(1 + 2\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\right) = 3\pi a^2\varphi\frac{\mu}{\mu + 2}.$$

Der Kreis der gleichwertigen Strömung auf den Niveauflächen hat einen Radius, der durch die Beziehung gegeben ist

$$R^2 = 3a^2\frac{\mu}{\mu + 2} = a^2\frac{3}{1 + \frac{2}{\mu}};$$

derselbe ist stets grösser als der der Kugel, so lange $\mu > 1$ ist. Die innere Kraft ist

$$\varphi + F_i = \varphi\left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2}\right) = \frac{3}{2 + \mu}\varphi;$$

dieselbe ist gleich $\frac{3}{4}\varphi$, wenn $\mu = 2$ ist, was für die meisten Dielektrica nahezu der Fall ist, und wird gleich $\frac{3\varphi}{\mu}$, wenn μ sehr gross ist.

In der Nähe des Poles A ist ausserhalb die Kraft

$$\varphi - 2F_i = \varphi\frac{3\mu}{\mu + 2};$$

dieselbe ist gleich $\frac{3}{2}\varphi$ für $\mu = 2$ und wird 3φ, wenn μ sehr gross ist. Die

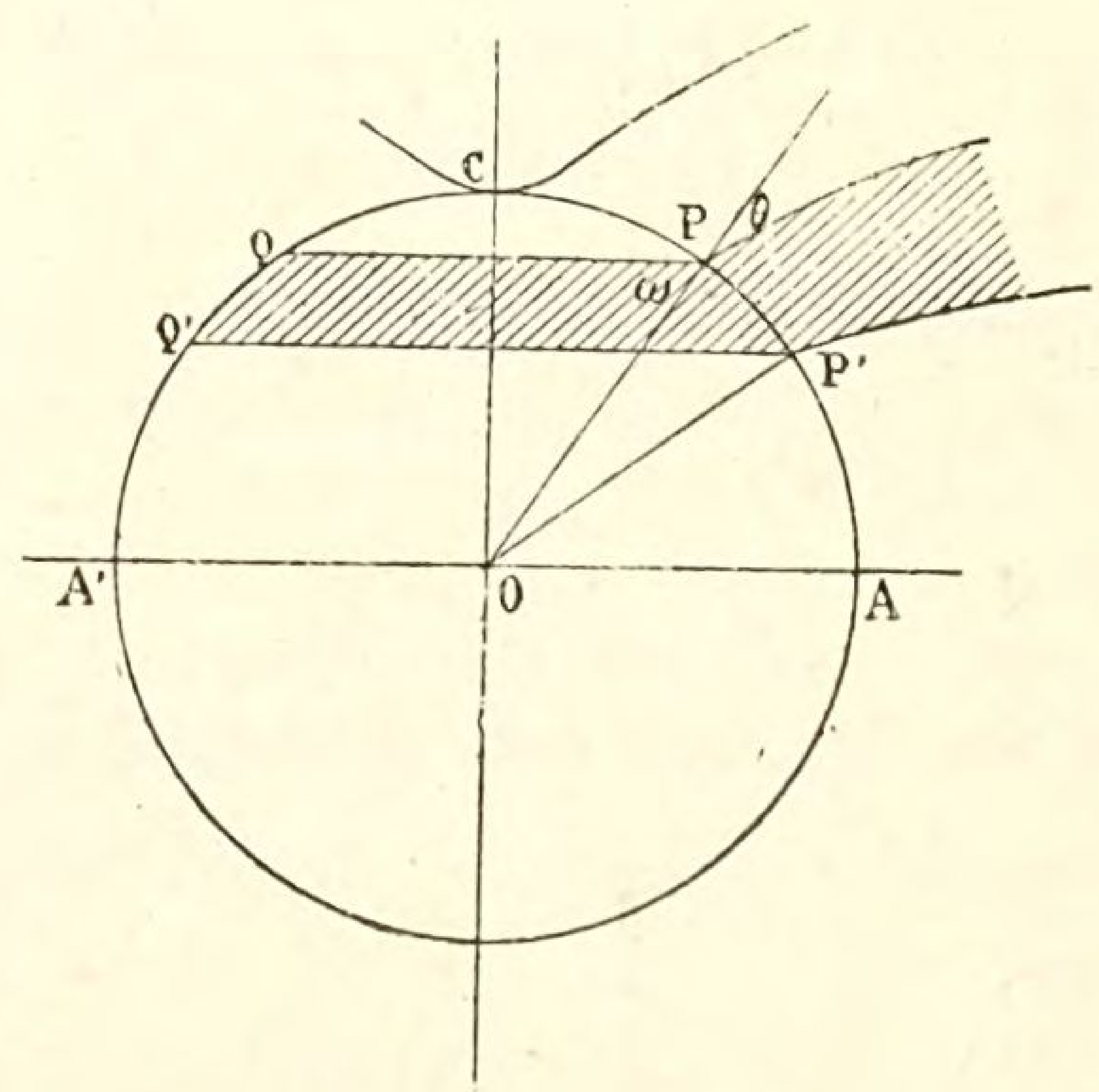


Fig. 43.

Kraft ist in diesem Falle dreimal so gross, als sie ursprünglich gewesen ist; dieser Fall tritt bei Leitern ein.

Im vorliegenden Falle sind die äusseren Kraftlinien nicht mehr zur Oberfläche senkrecht. Man kann leicht beweisen, dass die tangentialen Componenten einander gleich sind, und dass das Verhältnis zwischen den Winkeln θ und ω (Fig. 43) der Normale gegen die Kraftlinien innerhalb und ausserhalb dem Brechungsgesetze (**113**) genügt

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\mu}.$$

Für den Aequator, wo $\omega = \frac{\pi}{2}$ ist, giebt diese Gleichung auch, so lange μ endlich ist, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Die Kraftlinien, welche die Kugel im Aequator treffen, sind demnach Tangenten an der Oberfläche.

164. Concentrische sphärische Schichten in einem gleichförmigen Felde. — Es ist leicht, die eben behandelte Aufgabe zu verallgemeinern und dieselbe auf eine Reihe von concentrischen sphärischen Schichten auszudehnen. Eine Reihe concentrischer Kugeln $S_1, S_2, S_3 \ldots$ (Fig. 44) mit den Radien $a_1, a_2, a_3 \ldots$ und den inductiven Capacitäten $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ befinde sich in einem gleichförmigen Felde von der Intensität φ.

Wir betrachten die innere Kugel S_1. Wäre das Mittel von der inductiven Capacität μ_2, welches dieselbe umgiebt, unendlich, und bildete dasselbe ein gleichförmiges Feld von der Intensität φ_2, so würde sich jene Kugel mit einer idealen Gleitschicht M_1 bedecken, die im Innern eine constante Kraft F_1 und ein gleichförmiges Feld $\varphi_1 = \varphi_2 + F_1$ hervorrufen würde; und

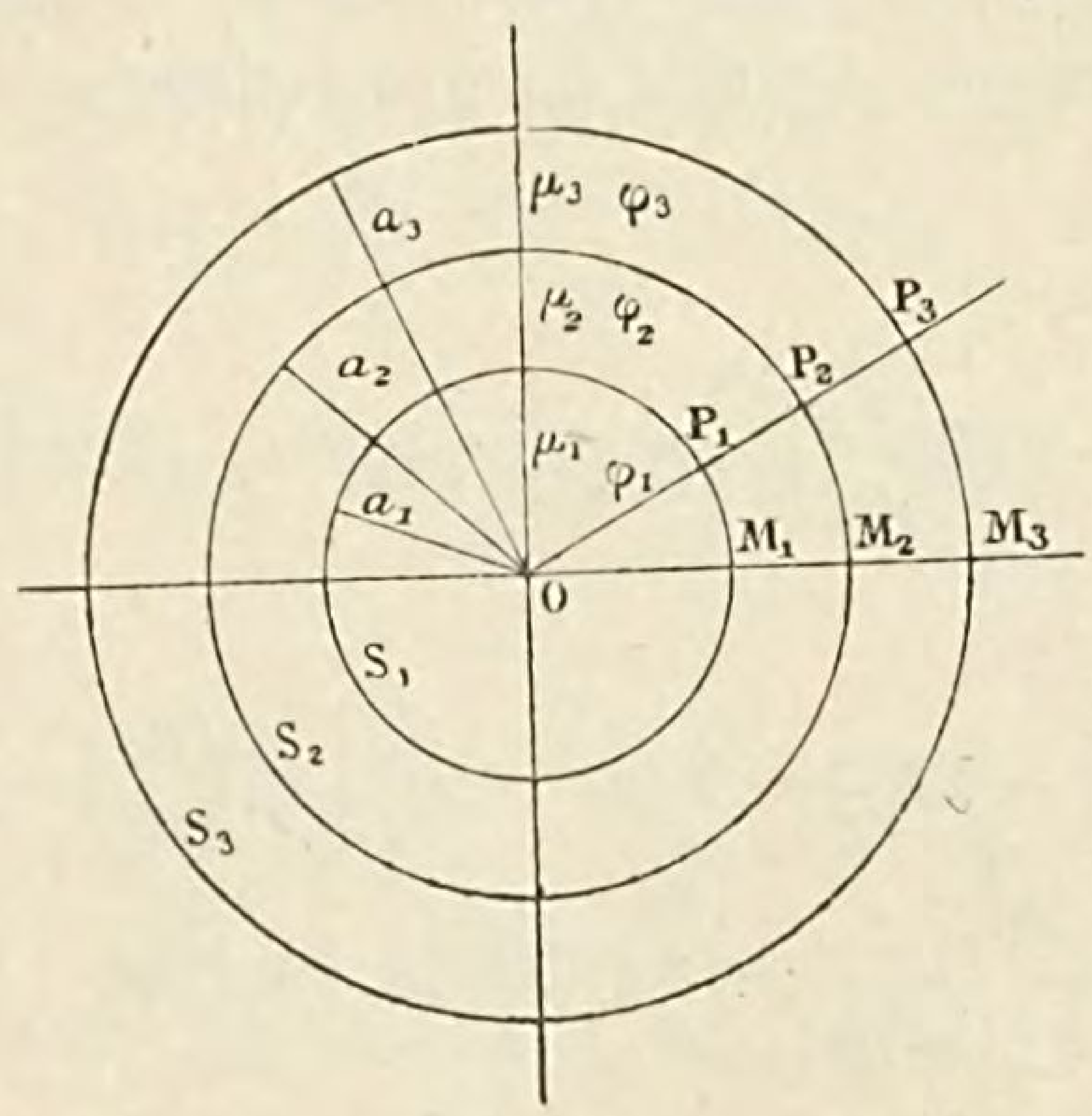


Fig. 44.

für einen Punkt, der auf der Oberfläche in der Richtung ω angenommen wäre, würde man die Beziehung erhalten

$$\mu_1 \varphi_1 \cos \omega = \mu_2 (\varphi_2 - 2F_1) \cos \omega,$$

oder

$$(25) \qquad \mu_1 \varphi_1 = \mu_2 (\varphi_2 - 2F_1).$$

Aber das ausserhalb der Kugel S_1 befindliche gleichförmige Feld von der Intensität φ_2 ist das, welches für das Innere der Kugel S_2 durch ein äusseres gleichförmiges Feld von der Intensität φ_3 und von der inneren Kraft F_2 hergestellt wird, die ihrerseits von der nach demselben Gesetze verteilten idealen Schicht M_2 herrührt; das ergiebt

$$\varphi_2 = \varphi_3 + F_2.$$

Für einen Punkt P_2 dieser Fläche muss man jedoch nicht bloss die Kraft des äusseren Feldes und die der Schicht M_2 in Rechnung ziehen, sondern auch die Wirkung der Schicht M_1 der inneren Kugel S_1.

Das Gesetz von der Erhaltung der Inductionsströmung liefert zwischen diesen Grössen eine der Gleichung (25) analoge Beziehung, die wir nach § **158** ohne Weiteres, indem wir den Faktor $\cos\omega$ fortlassen, in folgender Weise niederschreiben können

$$\mu_2\left[\varphi_2 - 2F_1\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right] = \mu_3\left[\varphi_3 - 2F_2 - 2F_1\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right],$$

oder

$$\mu_2\varphi_2 = \mu_3(\varphi_3 - 2F_2) + 2(\mu_2 - \mu_3)F_1\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3. \tag{26}$$

Dieselbe Betrachtung kann auf die Fläche S_3 angewandt werden; man muss dann für einen Punkt P_3 ihrer Oberfläche die Intensität φ_4 des äusseren Feldes und die Wirkungen der drei inneren Schichten M_1, M_2, M_3 in Rechnung ziehen.

Man erhält so

$$\mu_3\left[\varphi_3 - 2F_2\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 - 2F_1\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^3\right] = \mu_4\left[\varphi_4 - 2F_3 - 2F_2\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 - 2F_1\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^3\right]$$

oder

$$\mu_3\varphi_3 = \mu_4(\varphi_4 - 2F_3) + 2(\mu_3 - \mu_4)\left[F_2\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 + F_1\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^3\right]. \tag{27}$$

Das Bildungsgesetz für diese Ausdrücke ist klar. Verbindet man diese Gleichungen mit den Identitäten

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 + F_1, \\ \varphi_2 &= \varphi_3 + F_2, \\ \varphi_3 &= \varphi_4 + F_3, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{28}$$

so kann man die Werte für F_1, F_2, $F_3 \ldots$ bestimmen. Die Aufgabe ist demnach vollständig gelöst.

165. — Wir nehmen jetzt an, dass nur zwei Schichten, die von den Flächen S_1 und S_2 begrenzt sind, in einem gleichförmigen Felde von der Intensität φ, wo das Dielektricum aus Luft besteht, vorhanden sind. Man braucht jetzt nur zu setzen

$$\varphi_3 = \varphi,$$
$$\mu_3 = 1.$$

Die Gleichungen (28) liefern dann

$$\varphi_2 = \varphi + F_2$$
$$\varphi_1 = \varphi + F_2 + F_1.$$

Setzt man dies in (25) und (26) ein, und setzt man noch $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \beta$, so ergiebt sich

$$
(29) \qquad \begin{aligned} \mu_1 (\varphi + F_2 + F_1) &= \mu_2 (\varphi + F_2 - 2F_1) \\ \mu_2 (\varphi + F_2) &= (\varphi - 2F_2) + 2 (\mu_2 - 1) \beta F_1, \end{aligned}
$$

welche Gleichungen die Kräfte F_1 und F_2 als Funktionen der Daten der Aufgabe bestimmen.

166. — Wir nehmen nunmehr an, dass ausserdem der innere Kern ebenfalls aus Luft besteht; dies kommt darauf zurück, den Zustand einer kugelförmigen Schale zu bestimmen; man muss also auch $\mu_1 = 1$ setzen. Bezeichnen wir mit μ die vorher mit μ_2 bezeichnete specifische inductive Capacität der Substanz der Schale, so gehen die Gleichungen (29) über in

$$
\begin{aligned} F_1 (1 + 2\mu) &= (\mu - 1) (\varphi + F_2), \\ F_2 (\mu + 2) &= (\mu - 1) (2\beta F_1 - \varphi). \end{aligned}
$$

Hieraus ergiebt sich

$$
\begin{aligned} F_1 (1 + 2\mu - 2 (\mu - 1) \beta) &= - 3F_2, \\ F_1 [(1 + 2\mu) (\mu + 2) - 2 (\mu - 1)^2 \beta] &= 3 (\mu - 1) \varphi, \end{aligned}
$$

und folglich

$$
\frac{F_1}{3 (\mu - 1)} = \frac{-F_2}{(\mu - 1) [1 + 2\mu - 2 (\mu - 1) \beta]} = \frac{\varphi}{(1 + 2\mu) (\mu + 2) - 2 (\mu - 1)^2 \beta}.
$$

Die Kraft innerhalb der Fläche S_1 ist

$$
F_i = \varphi_1 = \varphi + F_2 + F_1 = \varphi \frac{9\mu}{(1 + 2\mu) (\mu + 2) - 2 (\mu - 1)^2 \beta}.
$$

$$
F_i = \frac{\varphi}{1 + \frac{2 (\mu - 1)^2}{9\mu} (1 - \beta)}.
$$

Die Kraft ist innerhalb S_1 constant, aber dieselbe ist weder zwischen S_1 und S_2, noch ausserhalb S_2 überall gleich gross. Der Wert der Kraft innerhalb S_1 ist ein Bruchteil der Intensität des Feldes, der für $\mu = 1$ der Einheit, für $\mu = \infty$ der Null gleich sein würde. Mit den gewöhnlichen Dielektrica, für welche der Coefficient μ sich wenig von 2 unterscheidet, ist dieser Bruch stets der Einheit sehr nahe; ist die Schicht leitend, so kann der Coefficient μ als unendlich gross aufgefasst werden, und F_i wird Null.

Wir werden später sehen, welches Interesse die gegenwärtige Aufgabe für die Lehre vom Magnetismus bietet.

167. Poisson's Hypothese über die Constitution der Dielektrica. — Die Hypothese, die Poisson über die Constitution der Magnete aufgestellt hat und die für die Elektricität von Faraday wieder aufgenommen ist, besteht, wie bereits oben (**110**) angeführt ist, in der Annahme, dass der dielektrische

Körper aus kleinen leitenden Kugeln zusammengesetzt ist, die in einem isolirenden Mittel verstreut sind.

Die eben gefundenen Resultate setzen uns in den Stand, hier die von Poisson angewandte Methode auseinanderzusetzen, um wenigstens annäherungsweise die Consequenzen seiner Hypothese zu berechnen.

Betrachten wir eine Kugel vom Radius a_1 und von der specifischen inductiven Capacität μ_1, die in einem Felde von der Intensität φ_2 und von der specifischen inductiven Capacität μ_2 liegt, so ist die innere Kraft der elektrischen Schicht nach den Gleichungen (25) und (28)

$$F_1 = \varphi_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + 2\mu_2}$$

und das äussere Potential der scheinbaren Ladung dieser Kugel auf einen in der Enfernung r gelegenen Punkt ist gleich

$$V_a = -F_1 \frac{a_1^3}{r^2} \cos\omega.$$

Wir nehmen nun an, dass eine Kugel vom Radius a eine grosse Anzahl von kleinen Kugeln vom Radius a_1 einschliesst, und setzen mit Poisson voraus, dass die Elektrisirung einer jeden der letzteren nicht durch die Elektrisirung der benachbarten Kugeln beeinflusst wird und nur von der Intensität des Feldes abhängt.

Ist n die Anzahl der in der grossen Kugel enthaltenen kleinen, so hat das Potential in einer gegen a sehr grossen Entfernung den Wert

$$V = nV_a = -F_1 \frac{na_1^3}{r^2} \cos\omega = -\varphi_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + 2\mu_2} na_1^3 \frac{\cos\omega}{r^2},$$

oder wenn man $h = \frac{na_1^3}{a^3}$ setzt, d. h. wenn man mit h das Verhältnis des von den kleinen Kugeln eingenommenen Raumes zum Volumen der ganzen Kugel bezeichnet

$$V = -\varphi_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + 2\mu_2} ha^3 \frac{\cos\omega}{r^2}.$$

Wäre die Kugel homogen und hätte dieselbe die inductive Capacität μ, so wäre das Potential V' in derselben Entfernung

$$V' = -\varphi_2 \frac{\mu_2 - \mu}{\mu + 2\mu_2} a^3 \frac{\cos\omega}{r^2}.$$

Man erhält demnach in beiden Fällen dieselbe Wirkung, wenn man hat

$$\frac{\mu_2 - \mu}{\mu + 2\mu_2} = h \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + 2\mu_2},$$

woraus man erhält

$$\mu = \mu_2 \frac{\mu_1 + 2\mu_2 - 2h(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + 2\mu_2 + h(\mu_2 - \mu_1)},$$

dieser Wert von μ stellt die *scheinbare* inductive Capacität der Kugel von der angenommenen Constitution dar.

Nimmt man an, dass die kleinen Kugeln Leiter sind, so muss man $\mu_1 = \infty$ setzen; es bleibt dann

$$\mu = \mu_2 \frac{1+2h}{1-h}.$$

Wenn endlich das äussere Mittel die Luft ist, also $\mu_2 = 1$ wird, so ergiebt sich

$$\mu = \frac{1+2h}{1-h}, \quad \text{oder} \quad h = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Für die gewöhnlichen Dielektrica, deren specifische inductive Capacität nahezu 2 ist, erhält man

$$h = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Dieses Resultat kann eine Anschauung geben von dem Grade der Annäherung an die Wirklichkeit, den die Auffassungsweise Poisson's erreicht.

In einer leitenden Kugel ist die von den inducirten Schichten herrührende innere Kraft der Wirkung des äusseren Feldes gleich. Die äussere Wirkung einer polarisirten Kugel ist sehr klein gegen die innere Wirkung, da das Verhältnis der Kräfte (**158**) höchstens gleich $2\left(\frac{a}{r}\right)^3$ ist und sich der Null nähert, wenn die Kugeln unendlich klein sind. Aber wenn der von den leitenden Kugeln eingenommene Raum ein Viertel des Gesammtvolumens ist, dann darf die Wirkung, welche jede derselben auf die benachbarten ausübt, nicht mehr gegen die innere Kraft vernachlässigt werden, und das Feld ist demnach ein anderes.

Das Maximum des Verhältnisses der Volumensumme sich berührender Kugeln zum Gesammtraume ist gleich $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ oder merklich $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Reducirt sich dieses Verhältnis auf $\frac{1}{4}$, so ist die Entfernung der Mittelpunkte zweier benachbarter Kugeln ungefähr gleich dem Durchmesser, multiplicirt mit $\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{2}}}$. Die von der elektrischen Schicht einer Kugel auf den Mittelpunkt der nächsten ausgeübte Wirkung könnte demnach einen Bruchteil der inneren Kraft erreichen, der gleich ist

$$2\left(\frac{a}{2a\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{2}}}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{11}.$$

Wenn nun so die Wirkung der Kugeln auf einander die Elektrisirung parallel der Kraft des Feldes zu vergrössern strebt, so verkleinert sie dieselbe doch in einer zu jener senkrechten Richtung, so dass man der Wahrheit sehr nahe bleibt, wenn man mit Poisson annimmt, dass dieser gegenseitige Einfluss vernachlässigt werden kann.

168. Zwei ungleiche Massen von entgegengesetztem Zeichen. — Sind $+m$ und $-m'$ zwei Massen von entgegengesetztem Zeichen, die in A und A' (Fig. 45) in der Entfernung $2a$ von einander liegen, und ist m

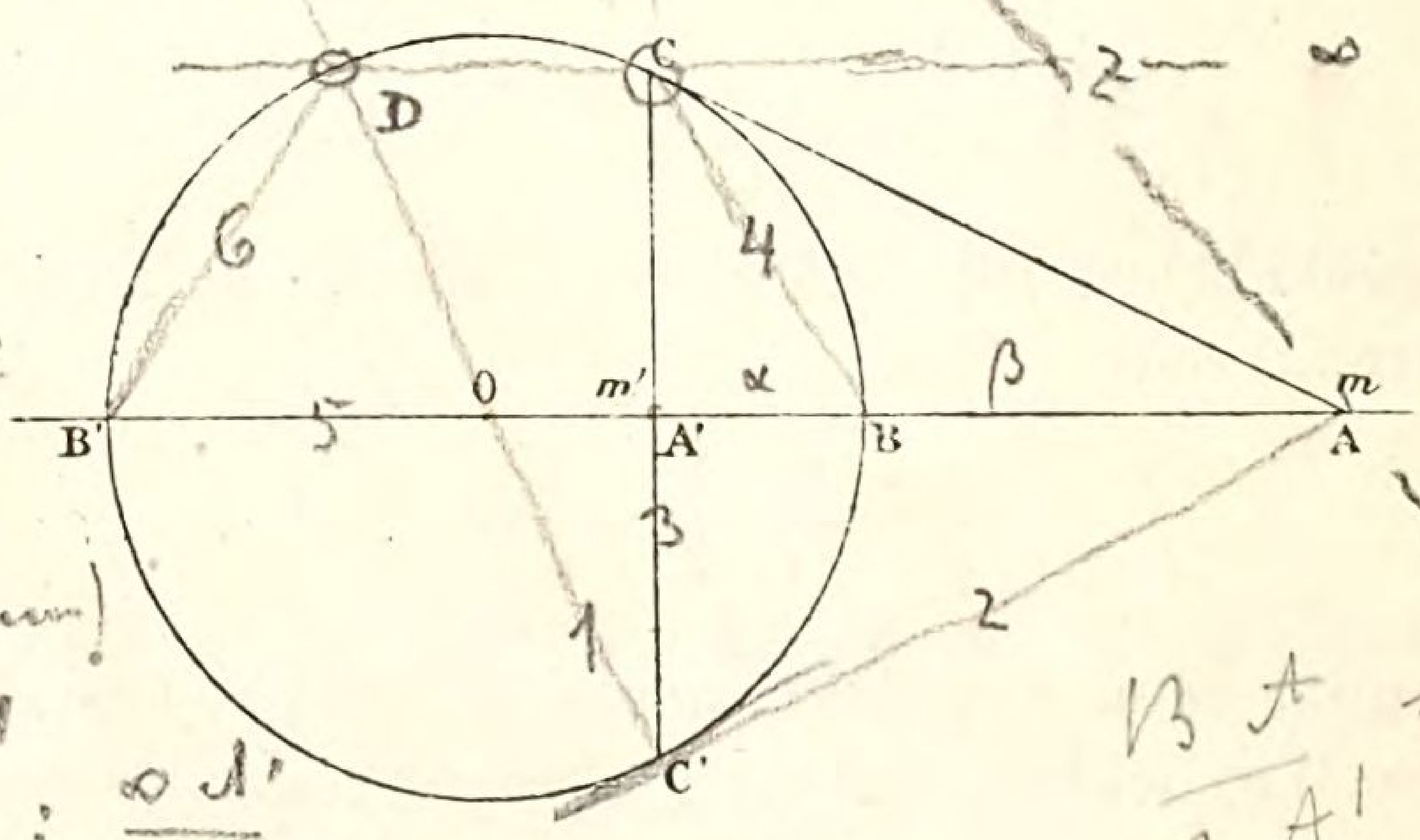


Fig. 45.

dem absoluten Werte nach grösser als m', so setzen wir

$$\frac{m}{m'} = k^2.$$

Die Gleichung einer Niveaufläche ist

$$V = \frac{m}{r} - \frac{m'}{r'} = m'\left(\frac{k^2}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{m'}{r}\left(k^2 - \frac{r}{r'}\right) = \frac{m}{r'}\left(\frac{r'}{r} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Die eine dieser Flächen entspricht dem Potential Null und hat die Gleichung

$$\frac{m}{r} - \frac{m'}{r'} = 0,$$

oder

$$\frac{r}{r'} = \frac{m}{m'} = k^2.$$

Dies ist eine Kugel, die den Punkt A' einschliesst; die beiden Punkte A und A' sind in Bezug auf diese Kugel conjugirte Punkte.

Zur Bestimmung des Radius R und des Mittelpunktes O dieser Kugel kann man von den Beziehungen Gebrauch machen

$$k^2 = \frac{r}{r'} = \frac{BA}{BA'} = \frac{B'A}{B'A'} = \frac{R}{OA'} = \frac{OA}{R}.$$

Berücksichtigt man, dass $AA' = 2a$, so erhält man hieraus leicht

$$R = 2a\frac{k^2}{k^4 - 1},$$

$$(30) \qquad OA = 2a\frac{k^4}{k^4 - 1},$$

$$OA' = 2a\frac{1}{k^4 - 1}.$$

Die Potentiale sind innerhalb dieser Kugel negativ, ausserhalb derselben positiv.

Alle Niveauflächen sind geschlossene einschalige oder aus zwei getrennten Schalen bestehende Flächen bis auf eine, die zwei zusammenhängende

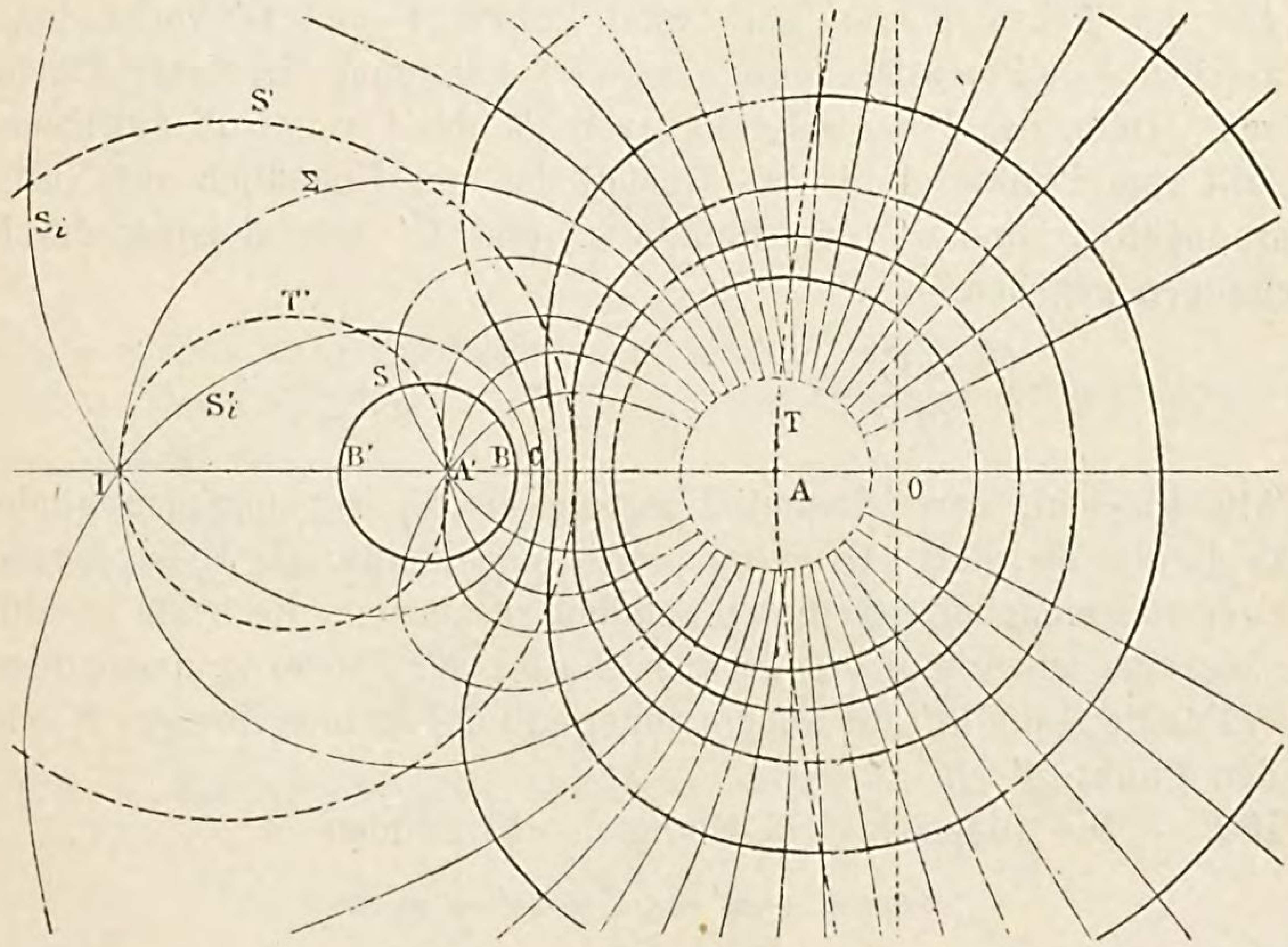


Fig. 46.

Schalen S_i und S_i' besitzt, die durch den Punkt I (Fig. 46) geht, in welchem die Kraft Null ist. Die Lage dieses Punktes ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{m}{\overline{IA}^2} = \frac{m'}{\overline{IA'}^2}$$

oder

$$\left(\frac{IA}{IA'}\right)^2 = \frac{m}{m'} = k^2;$$

man hat demnach

$$\frac{IA}{IA'} = k$$

und folglich

$$IA' = 2a\frac{1}{k-1},$$

$$IA = 2a\frac{k}{k-1}.$$

Der Wert des Potentials in I und demnach auch auf der ganzen zweischaligen Fläche ist

$$V_i = \frac{m}{2a}\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 = \frac{m'}{2a}\left(k-1\right)^2.$$

Auf der Achse müssen noch zwei Punkte C und C' vorhanden sein, auf welchen das Potential denselben Wert hat, und die dieser Fläche angehören. Denn das Potential steigt von B bis A von Null auf Unendlich und fällt vom Punkte A bis in's Unendliche von Unendlich auf Null. Die Entfernungen x und x' der Punkte C und C' von A sind durch die Gleichungen gegeben

$$\frac{(k-1)^2}{2a} = \frac{k^2}{x} - \frac{1}{2a-x} = \frac{k^2}{x'} - \frac{1}{2a+x'}.$$

Alle Flächen, deren Potential grösser als V_i ist, umgeben allein den Punkt A; alle die, deren Potential positiv und kleiner als V_i ist, setzen sich aus zwei von einander getrennten Schalen zusammen, die beide geschlossen sind: die eine ausserhalb des grossen Blattes der Fläche S_i umschliesst die beiden Punkte A und A', die andere innerhalb des kleinen Zweiges S_i' schliesst nur den Punkt A' ein.

169. — Die allgemeine Gleichung der Kraftlinien

$$m\cos\omega + m'\cos\omega' = m' + m\cos\theta$$

geht hier über in

$$m\cos\omega - m'\cos\omega' = -m' + m\cos\theta,$$

oder

(31) $$\cos\omega' - k^2\cos\omega = 1 - k^2\cos\theta.$$

Die Asymptote, die $\omega = \omega'$ entspricht, ist durch die Gleichung

$$(1-k^2)\cos\alpha = 1 - k^2\cos\theta$$

bestimmt; dieselbe geht durch den Schwerpunkt O der beiden Massen, der durch die Beziehung gegeben ist,

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{m'}{m} = \frac{1}{k^2}.$$

Soll die Asymptote reell sein, so muss $\cos\alpha > -1$ sein oder

$$\frac{1-k^2\cos\theta}{1-k^2}+1>0.$$

Die Bedingung

$$\frac{1-k^2\cos\theta}{1-k^2}+1=0$$

liefert den Wert von θ (**141**), welcher der Grenzkraftlinie entspricht. Die Gleichung dieser Kraftlinie ist demnach

$$\cos\omega' - k^2\cos\omega = k^2 - 1;$$

dieselbe bildet augenscheinlich die Grenze der Strömung $4\pi(m-m')$, die vom Punkte A ausgeht. In der That ist der dieser Linie entsprechende Wert von θ nach (**144**) gegeben durch

$$1-\cos\theta=\frac{N}{2\pi m}=\frac{2(m-m')}{m}=2\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

oder

$$\cos\theta=\frac{2}{k^2}-1,$$

und dies stimmt mit der obigen Gleichung für θ überein.

Diese Kraftlinie Σ geht ausserdem durch den Gleichgewichtspunkt I, wie man leicht zeigen kann.

Die Richtung der Tangenten der Kraftlinien, also die Richtung der Kraft bestimmen wir wie oben (**145**) und erhalten die Beziehung

$$(32)\qquad \frac{\sin\beta}{\sin\beta'}=\frac{f'}{f}=\frac{m'r^2}{mr'^2}=\frac{1}{k^2}\frac{r^2}{r'^2}.$$

170. — Ist die Tangente horizontal, so wird

$$\beta+\omega=\pi,$$
$$\beta'=\omega',$$

oder

$$\sin\beta=\sin\omega$$
$$\sin\beta'=\sin\omega'.$$

Die Gleichung (32) geht dann über in

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}=\frac{1}{k^2}\frac{r^2}{r'^2},$$

oder wenn man die Sinus durch die gegenüberliegenden Seiten ersetzt,

$$\frac{r'}{r}=\frac{1}{k^2}\frac{r^2}{r'^2}.$$

eine Gleichung, die man auch schreiben kann

$$\frac{r}{r'} = k^{\frac{2}{3}}.$$

Der Ort der Punkte der Kraftlinien, in denen ihre Tangente horizontal verläuft, ist demnach eine Kugel S', die den Punkt A' einschliesst. Der Mittelpunkt und der Radius dieser Kugel lassen sich durch die Formeln (30) berechnen, wenn man k durch $k^{\frac{1}{3}}$ ersetzt.

171. — Ist die Tangente vertical, so ist

$$\omega + \beta = \frac{\pi}{2},$$

$$\beta' - \omega' = \frac{\pi}{2},$$

oder

$$\sin\beta = \cos\omega,$$

$$\sin\beta' = \cos\omega'.$$

In diesem Falle ergiebt die Gleichung (32)

$$\frac{r^2}{\cos\omega} = k^2 \frac{r'^2}{\cos\omega'};$$

dieselbe stellt eine Curve mit zwei Zweigen dar, der eine geht von A, der andere von A' aus (Fig. 46).

Der Zweig T, der von A ausgeht, ist zunächst in diesem Punkte vertical. Für eine grosse Entfernung werden die Winkel ω und ω' einander gleich, und man erhält, wenn man $\omega - \omega' = \delta$ setzt,

$$\frac{\cos\omega}{r^2} = \frac{\cos\omega'}{k^2 r'^2} = \frac{\cos\omega - \cos\omega'}{r^2 - k^2 r'^2} = \frac{\sin\omega \cdot \delta \cdot r}{r(r^2 - k^2 r^2)} = \frac{2a \sin^2\omega}{r^3(1 - k^2)},$$

woraus folgt

$$\frac{\sin^2\omega}{\cos\omega} = \frac{r(1 - k^2)}{2a}.$$

Die rechte Seite wächst mit r ins Unendliche. Demnach nähert sich ω dem Werte $\frac{\pi}{2}$, und die Curve hat eine verticale Asymptote, die, wie man sieht, durch den Punkt O geht.

Der zweite Zweig ist eine geschlossene Curve T'; dieselbe geht durch den Punkt A' und durch den Punkt I.

172. Elektrisirung einer Kugel unter dem Einflusse eines Punktes. — Nach den oben (**61**) aufgestellten Sätzen wissen wir, dass man die Masse $-m'$ durch eine gleiche, auf irgend einer Niveaufläche, die den Punkt A' umgiebt, im Gleichgewicht befindliche Schicht ersetzen kann; als solche kann beispielsweise die Schale S'_i der (**168**) behandelten zweischaligen Fläche dienen.

Ebenso kann man die Masse m durch eine gleiche Schicht auf einer den Punkt A einschliessenden Niveaufläche ersetzen, die Fläche S_i einbegriffen. Endlich können beide Massen m und $-m'$ für äussere Punkte stets durch eine Masse $m-m'$ auf einer beide Punkte einschliessenden Fläche, beispielsweise auf S_i, ersetzt werden.

Fassen wir insbesondere die Kugel S vom Potential Null in's Auge, die den Punkt A' einschliesst, so können wir $-m'$ durch eine im Gleichgewicht befindliche gleiche Masse auf der Kugel ersetzen. Für die äusseren Punkte wird dadurch nichts geändert; aber für die inneren Punkte ist das Potential constant und gleich dem Werte, den dasselbe auf dieser Oberfläche hat, also Null. Für die innerhalb der Fläche S liegenden Punkte kann man noch die Masse m durch eine Masse $+m'$ ersetzen, die sich auf dieser Fläche im Gleichgewichte befindet, und dann ist das Potential auch ausserhalb Null.

Der erste Fall entspricht der Elektrisirung einer nicht isolirten Kugel, die der Influenz einer äusseren Masse ausgesetzt ist; der zweite stellt die

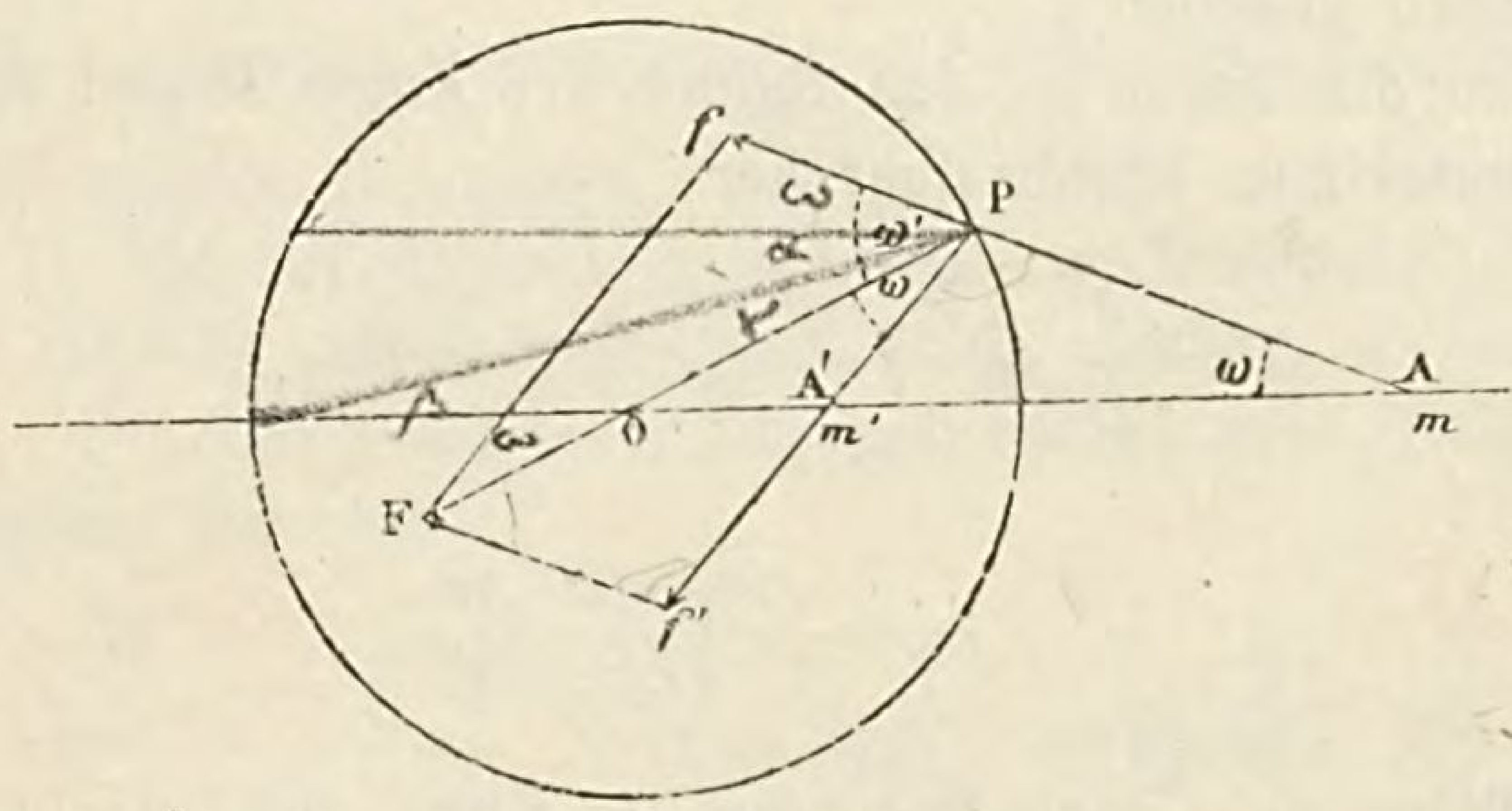


Fig. 47.

Influenz einer elektrischen Masse auf eine dieselbe einschliessende nicht isolirte sphärische Fläche dar.

Die Dichte σ der Schicht in jedem Punkte muss der Gleichung genügen

$$F = -4\pi\sigma.$$

Im Punkte P auf der Oberfläche (Fig. 47) ist die Kraft, da S eine Niveaufläche und zugleich eine Kugel ist, längs PO gerichtet; dieselbe ist die Resultante der Kräfte f und f', von denen die eine von A ausgeht, die andere nach A' gerichtet ist. Das von den drei Kräften F, f und f' gebildete Dreieck ist dem Dreieck APA' ähnlich; man erhält demnach

$$\frac{F}{AA'} = \frac{f}{r'} = \frac{f'}{r},$$

und folglich

$$F = 2a\frac{f}{r'} = 2a\frac{m}{r^2 r'} = 2ak^2\frac{m}{r^3} = \frac{2a}{k^2}\cdot\frac{m'}{r'^3}.$$

Hieraus folgt

$$\sigma = -\frac{2ak^2m}{4\pi\, r^3} = -\frac{2a}{4\pi k^2}\cdot\frac{m'}{r'^3}.$$

So sind die Kraft und die Dichte in einem Punkte auf der Fläche dem Cubus seiner Entfernung sowohl vom Punkte A als vom Punkte A' umgekehrt proportional.

Diese Dichte ist positiv, wenn man die Masse m für ihre Wirkung innerhalb S durch eine auf der Kugelfläche S ausgebreitete Schicht ersetzt. Die Fläche ist dann so geladen, wie wenn sie, während sie mit der Erde in Verbindung steht, von einer in ihrem Innern in A' gelegenen Masse $-m'$ influenzirt wäre.

Die Dichte ist dagegen negativ, wenn man die Wirkung dieser Schicht auf Punkte ausserhalb derselben an die Stelle der Masse $-m'$ setzt, und die Verteilung ist so, als wenn die Kugelfläche, während sie mit der Erde in Verbindung steht, von der Masse m in A influenzirt wäre.

In beiden Fällen ist die Kugel ebenso wie die Lage und die Grösse der einen der Massen gegeben.

Kennt man die Masse m, den Radius der Kugel R und die Entfernung $AO = d$, so leitet man unmittelbar her

$$k^2 = \frac{d}{R},\quad m' = -m\frac{R}{d},\quad 2ad = d^2 - R^2$$

und folglich

$$\sigma = -\frac{d^2 - R^2}{4\pi R}\cdot\frac{m}{r^3}.$$

173. — Wenn man nach Isolirung der Kugel zur Schicht $-m'$ irgend eine gleichförmig verteilte Schicht M hinzufügt, bleibt das Gleichgewicht bestehen, und das Potential der Kugel, das vorher Null gewesen ist, geht über in

$$V_1 = \frac{M}{R}.$$

Macht man $M = m'$, so ist die Gesammtladung der Kugel Null, und ihr Potential ist

$$V_0 = \frac{m'}{R}.$$

Dies ist der Fall einer isolirten Kugel, die ursprünglich neutral gewesen ist, dann durch Influenz seitens eines äusseren Punktes elektrisirt worden ist. Da ihre Gesammtladung Null ist, hängt das Potential im Mittelpunkte nur von der äusseren Masse ab. Man muss demnach haben

$$V_0 = \frac{m'}{R} = \frac{m}{d}.$$; identisch ; § 168

p. 148 ; $\frac{m}{m'} = k^2 = \frac{d}{R}$

§ 172

Die Dichte dieser neuen Schicht ist

$$\sigma_0 = \frac{m'}{4\pi R^2} = \frac{m}{4\pi R d};$$

also ist die resultirende Dichte

$$\sigma_0 + \sigma = \frac{m}{4\pi R d} - \frac{d^2 - R^2}{4\pi R} \cdot \frac{m}{r^3} = \frac{m}{4\pi R}\left[\frac{1}{d} - \frac{d^2 - R^2}{r^3}\right].$$

Sie ist für alle Punkte des kleinen zur Achse senkrechten durch die Gleichung

$$r^3 = d\,(d^2 - R^2)$$

definirten Kreises Null.

Die Ebene dieses kleinen Kreises schneidet die Achse OA links vom Punkte A', da $r < \sqrt{d^2 - R^2}$ ist. Der Kreis selbst bildet auf der Kugel die *neutrale Linie*, welche die positive Zone von der negativen scheidet; er ist eine Gleichgewichtslinie; die Kraft und die Dichte sind auf ihm Null. Er bildet den Schnitt der Niveaufläche $V_0 = \frac{m}{d}$, welche die Kugel senkrecht (**48**) trifft und mit ihr zusammen eine Niveaufläche abgiebt.

Soll die Dichte auf der Kugel auf dem Berührungskreise eines von A ausgehenden Kegels, also auf dem Kreise, in welchem sie von einer durch A' senkrecht zur Achse gelegten Ebene geschnitten wird, Null sein, so muss M der Bedingung genügen

$$\frac{M}{4\pi R^2} = \frac{d^2 - R^2}{4\pi R} \cdot \frac{m}{(d^2 - R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m}{4\pi R\sqrt{d^2 - R^2}},$$

und folglich

$$\frac{M}{m} = \frac{R}{\sqrt{d^2 - R^2}}.$$

174. Bild an einer Kugel. — Für alle äusseren Punkte kann die Wirkung der nicht isolirten von der Masse m influenzirten Kugel S durch die einer in A' befindlichen Masse $-m' = -\frac{m}{k^2}$ ersetzt werden. Ebenso ist die Wirkung der nicht isolirten von $-m'$ influenzirten Fläche S' für alle inneren Punkte derjenigen der Masse $m = k^2 m'$, wenn sich dieselbe in A befindet, gleich.

Diese Eigenschaft ist der analog, die wir bereits für die Ebene (**148**) gefunden haben. Die Masse $-m'$ in A' ist das Bild der äusseren Masse m in Bezug auf die Kugelfläche, und das Bild der Masse $-m'$ in Bezug auf dieselbe Fläche ist eine grössere, in A befindliche Masse $m = k^2 m'$.

175. Bild eines gegebenen Systems. — Das Princip der Bilder gegen eine Kugelfläche kann auf ein beliebiges System, beispielsweise auf eine elektrische Schicht ausgedehnt werden. Denn jedes Element des Systems

ruft durch Induction auf der Kugel eine Schicht hervor, deren Wirkung auf äussere Punkte mit der des entsprechenden Bildes identisch ist. Da jede dieser Schichten sich im Gleichgewichte befindet, liefert ihre Uebereinanderlagerung einen Gleichgewichtszustand, und die resultirende Wirkung ist der resultirenden Wirkung aller Bilder gleich. Die Gesammtheit dieser Bilder giebt ein System, welches das Bild des gegebenen Systems in der Kugel ist. Ist das gegebene System eine Fläche Σ, so ist das Bild eine Fläche Σ', die der ersteren conjugirt ist.

176. Einwirkung zweier Kugeln auf einander. — Das Princip der Bilder in Verbindung mit der Methode von Murphy (**86**) ermöglichen es, in vollkommener Weise die sehr wichtige Aufgabe der Einwirkung zweier Kugeln auf einander zu lösen. S_a und S_b (Fig. 48) seien die beiden Kugeln, R und R' deren Radien. Die Methode besteht bekanntlich darin, eine Reihe

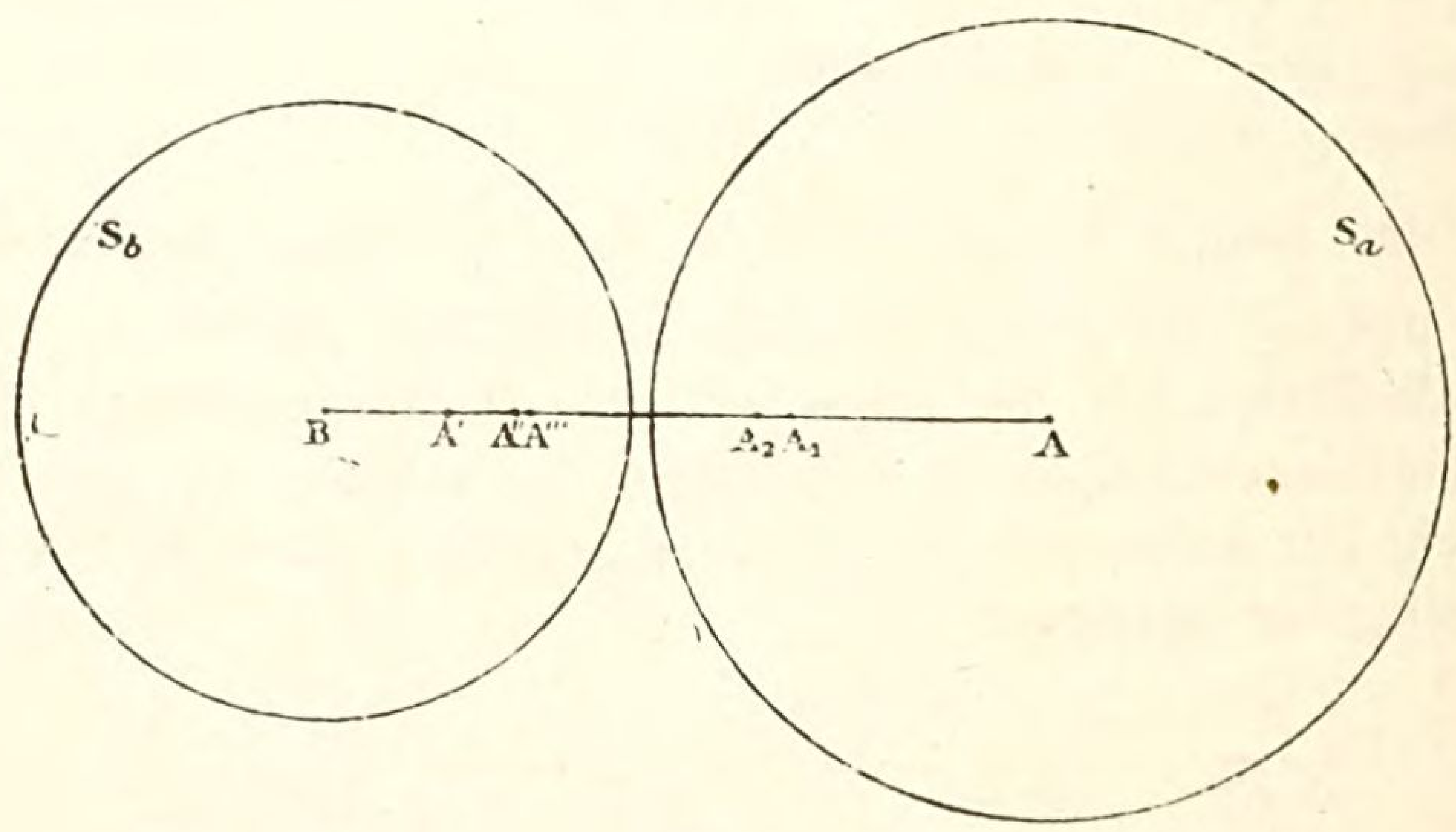


Fig. 48.

von auf einander folgenden Schichten in folgender Weise zu bestimmen. Man bringt auf den Leiter S_a eine Schicht, die ihm ein Potential 1 giebt; dies ist in diesem Falle eine gleichförmige Schicht von der Masse R. Diese Schicht wirkt so nach aussen, als ob sie in A vereinigt wäre. Man denkt sich dieselbe fest und bestimmt die auf der Oberfläche S_b der zweiten nicht isolirten Kugel inducirte Schicht, was darauf zurückkommt, das Bild einer in A befindlichen Masse $+R$ in A' in Bezug auf S_b zu bestimmen. Hierauf denkt man sich die äquivalente Schicht in A' befestigt und bestimmt den Einfluss derselben auf die nicht isolirte Kugel S_a, d. h. das neue Bild A_1 von A' u. s. f. Man wiederholt dieselbe Operation, indem man mit der Kugel S_b anfängt und multiplicirt alle so bestimmten Massen mit passenden Coefficienten. Da jede der Massen und Dichten genau berechnet werden kann, ist die Aufgabe der Verteilung in vollkommener Weise gelöst.

Was die zwischen den beiden Kugeln wirkende Kraft betrifft, so ist dieselbe die Resultante der von allen in der einen Kugel enthaltenen Massen auf alle von der andern eingeschlossenen Massen ausgeübten Wirkungen.

Die Rechnung bietet keine theoretischen Schwierigkeiten, ist aber in Wirklichkeit sehr schwierig. Sir W. Thomson hat dieselbe für den Fall zweier Kugeln von gleichem Radius durchgeführt, wenn die Entfernung der Mittelpunkte sich zwischen $2R$ und $4R$ bewegt, d. h. wenn die Entfernung der Kugeln zwischen 0 und dem Durchmesser einer Kugel liegt.

Nennt man in diesem Falle R den den beiden Kugeln A und B gemeinschaftlichen Radius, U und V die Potentiale, cR die Entfernung der Mittelpunkte, M und N die bezüglichen Ladungen, so erhält man, wenn man noch mit I, J, a und b von c abhängige Coefficienten bezeichnet,

$$M = R(IU - JV),$$
$$N = R(IV - JU),$$
$$F = 2bUV - a(U^2 + V^2),$$

Ausdrücke, welche denen analog sind, welche die Methode von Murphy (**87**) für beliebige Körper liefert.

Will man die Kraft und das Potential als Funktion der Massen ausdrücken, so erhält man

$$RU = \frac{I}{I^2 - J^2} M + \frac{J}{I^2 - J^2} N,$$
$$RV = \frac{I}{I^2 - J^2} N + \frac{J}{I^2 - J^2} M,$$
$$R^2 F = 2\beta MN - \alpha(M^2 + N^2),$$

wenn

$$\alpha = \frac{a(I^2 + J^2) - 2bIJ}{(I^2 - J^2)^2},$$
$$\beta = \frac{b(I^2 + J^2) - 2aIJ}{(I^2 - J^2)^2}$$

gesetzt wird.

Sind die Ladungen M und N gleich, so müssen es auch die Potentiale sein, und es ergiebt sich

$$M = RV(I - J),$$
$$F = 2(b - a)V^2,$$
$$RV = \frac{M}{I - J},$$
$$R^2 F = 2(\beta - \alpha)M^2.$$

177. — Da diese Formeln nur bis $c = 4$ berechnet sind, ist es vorteilhaft zu sehen, wie man dieselben für grössere Entfernungen durch andere ersetzen kann.

Nehmen wir an, dass die Wirkung der beiden Kugeln dieselbe ist, wie wenn die Massen beziehungsweise in den Mittelpunkten vereinigt wären, und dass das Potential jeder derselben dem gleich ist, welches man für den

Mittelpunkt erhalten würde, wenn man die benachbarte Kugel durch eine in ihrem Mittelpunkte gelegene gleiche Masse ersetzt. Man erhält dann

$$U=\frac{M}{R}+\frac{N}{cR},$$
$$V=\frac{N}{R}+\frac{M}{cR},$$
$$F=\frac{MN}{c^2R^2},$$
$$F=\frac{c^2+1}{(c^2-1)^2}UV-\frac{c}{(c^2-1)^2}(U^2+V^2),$$

und für gleiche Ladungen

$$RV=M\left(1+\frac{1}{c}\right)=M\frac{c+1}{c},$$
$$R^2F=\frac{M^2}{c^2},$$
$$F=\frac{V^2}{(c+1)^2}.$$

Macht man $c=4$, so ergeben die Formeln von Sir W. Thomson

$$I-J=0{,}80258,$$
$$2(\beta-\alpha)=0{,}05846,$$
$$2(b-a)=0{,}03766.$$

Die entsprechenden Werte in unserer angenäherten Formel sind

$$\frac{c}{c+1}=\frac{4}{5}=0{,}80,$$
$$\frac{1}{c^2}=\frac{1}{16}=0{,}0625,$$
$$\frac{1}{(c+1)^2}=\frac{1}{25}=0{,}04.$$

Ist die Entfernung der Flächen gleich dem Durchmesser einer Kugel, und sind die Ladungen gleich, so liefern also die angenäherten Formeln die Potentiale als Funktion der Massen, den Wert der Kraft als Funktion der Massen und die Kraft als Funktion der Potentiale mit einer Genauigkeit, für welche die Fehler für diese verschiedenen Grössen bez. sind $\frac{1}{300}$, $\frac{1}{16}$ und $\frac{1}{17}$. Da die entsprechenden Fehler bereits $\frac{1}{12}$ erreichen, wenn $c=3{,}8$ gesetzt wird, so sieht man, dass dieselben für grössere Entfernungen sehr schnell abnehmen.

Man darf also wohl die von Coulomb zur Bestimmung der Wirkung zweier elektrischer Körper auf einander angewandte Methode als vollkommen

genau ansehen, und die Coulomb'sche Drehwaage kann demnach bei der Messung von Potentialen sehr genaue Resultate mit den angenäherten Formeln liefern, wenn man nur dafür Sorge trägt, dass der Abstand der Kugelflächen merklich ihren Durchmesser übersteigt. Man muss ferner bei der Auswertung von Potentialen mittels der Drehwaage besondere Vorsichtsmassregeln treffen, den Einfluss der Influenz der Wände des Gehäuses zu eliminiren oder in Rechnung zu ziehen.

178. Bewegung kleiner Körper in einem elektrischen Felde. — Wir haben (**162**) gesehen, dass eine Kugel vom Radius a, die sich in einem gleichförmigen Felde, in dem die Kraft φ ist, befindet, in der Weise elektrisch wird, dass die innere Wirkung der entstandenen Schicht ist

$$F_i = -\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\varphi = -h\varphi.$$

Dieser Coefficient h ist gleich $\frac{1}{4}$ für die gewöhnlichen Dielektrica, deren specifische inductive Capacität 2 ist, und wird für Leiter der Einheit gleich.

Man leitet daraus ab (**159**)

$$\sigma_0 = \frac{3h}{4\pi}\varphi,$$

$$\omega = u\sigma_0 = u\frac{3h}{4\pi}\varphi = uK\varphi.$$

Der Coefficient K ist für die Leiter gleich $\frac{3}{4\pi}$ und erhält für die Dielektrica einen kleineren Wert, da für diese der Factor h stets kleiner als Eins ist.

Fassen wir jetzt eine Kugel in's Auge, die so klein ist, dass sie, wenn sie in einen beliebigen Punkt eines variabeln Feldes gebracht wird, so elektrisch wird, wie sie es in einem gleichförmigen Felde, in dem die Kraft an der betreffenden Stelle so gross ist, wie sie hier thatsächlich ist, werden würde, so ist das elektrische Moment dieser Kugel

$$\omega = u\sigma_0 = uK\varphi,$$

und die Achse der Elektrisirung ist, da sie der Kraft φ parallel ist, senkrecht zu den dieselbe einschliessenden Niveauflächen.

Denken wir uns nun auf der Oberfläche die beiden elektrischen Schichten befestigt, welche dem System zweier Vollkugeln oder auch zweier entgegengesetzt gleicher Massen $\pm m$ gleichwertig sind und eine unendlich kleine Entfernung δ von einander haben, so dass $\omega = m\delta$ ist, so ist die Energie dieser Kugel in dem Felde, wenn man mit V_1 und V_2 die Potentiale in den mit den Massen $-m$ und $+m$ belegten Punkten bezeichnet,

$$W = \int mV = -m(V_1 - V_2) = -m\delta\frac{V_1 - V_2}{\delta} = -\omega\varphi.$$

In einem Punkte P', wo die Kraft gleich $\varphi + d\varphi$ ist, wäre die Energie der Kugel

$$W' = -\varpi(\varphi + d\varphi).$$

Die Arbeit, die nötig ist, um die Kugel von dem Punkte P in den Punkt P' überzuführen, ist demnach

$$W' - W = -\varpi d\varphi.$$

In Wirklichkeit, wenn die Schichten nicht fest sind, ändert sich die Elektrisirung allerdings mit dem Ortswechsel der Kugel und die betrachtete Arbeit liegt zwischen $-\varpi d\varphi$ und $-(\varpi + d\varpi)d\varphi$; diese Arbeit unterscheidet sich aber nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung von dem gefundenen Werte.

Die für die Verschiebung aufgewandte Arbeit darf also gesetzt werden gleich

$$(33)\qquad \begin{aligned} dW &= -\varpi d\varphi = -uK\varphi d\varphi, \\ dW &= -\frac{uK}{2} d(\varphi^2). \end{aligned}$$

Geht demnach eine unendlich kleine Kugel in dem Felde von einem Punkte, in dem die Kraft φ_0 ist, auf einen andern Punkt über, in dem die Kraft φ ist, so ist der Energiezuwachs

$$W - W_0 = -\frac{uK}{2}(\varphi^2 - \varphi_0^2).$$

Kommt die Kugel aus dem Unendlichen, so erhält man

$$W = -\frac{uK}{2}\varphi^2.$$

Ist die Kugel sich selbst überlassen, so sucht sie naturgemäss ihre Energie auszugeben und folglich nach Gleichung (33) in der Richtung sich zu bewegen, in welcher der Wert von φ^2 am schnellsten zunimmt. Sie strebt also sich nach den Punkten hin zu bewegen, in denen die Kraft dem absoluten Werte nach ein Maximum ist.

179. — Es sei n die Richtung, in welcher φ^2 sich am schnellsten ändert; die auf die Kugel wirkende Kraft wird ausgedrückt durch

$$(34)\qquad F = -\frac{dW}{dn} = \frac{uK}{2}\frac{d(\varphi^2)}{dn},$$

und die den Coordinaten parallelen Componenten dieser Kraft sind

$$(35)\qquad \begin{aligned} X &= \frac{uK}{2}\frac{\partial(\varphi^2)}{\partial x}, \\ Y &= \frac{uK}{2}\frac{\partial(\varphi^2)}{\partial y}, \\ Z &= \frac{uK}{2}\frac{\partial(\varphi^2)}{\partial z}. \end{aligned}$$

180. — **In einem veränderlichen elektrischen Felde kann die Kraft in keinem ausserhalb der wirksamen Massen gelegenen Punkte ein Maximum sein.**

Dieser Satz ist eine direkte Folgerung aus dem eben erhaltenen Resultate. Denn wir haben gesehen, dass nach dem Satze von Earnshaw (**63**) ein elektrischer Körper in einem veränderlichen Felde sich nicht im stabilen Gleichgewichte befinden kann. Da nun, wie eben gezeigt, eine unendlich kleine Kugel nur in den Punkten stabiles Gleichgewicht erreicht, in denen der Wert von φ^2 ein absolutes Maximum ist, in denen also der Wert von φ dem absoluten Werte nach ein Maximum ist, so folgt, dass dieser Fall nicht eintreten kann für einen ausserhalb der wirksamen Massen liegenden Punkt.

181. — Dieselbe Schlussweise gilt für die Bewegung eines sehr kleinen Körpers von beliebiger Form, wenn man von den Rotationswirkungen absieht, d. h. wenn man annimmt, dass der Körper stets dieselbe Richtung gegen die Kraftlinien beibehält. Denn dieser Körper wird proportional der Kraft des Feldes in dem Punkte, in dem er sich befindet, elektrisch, und die Aenderung der Energie ist proportional der Aenderung des Quadrates der Kraft.

Unabhängig von dieser Ortsveränderung erfährt ein nicht kugelförmiger Körper in jedem Punkte eine Drehung um sich selbst in der Weise, dass für einen stabilen Gleichgewichtszustand seines Schwerpunktes die elektrische Energie ein Minimum und die Elektrisirung ein Maximum ist.

Dies ist nach Sir W. Thomson der wahre Sinn der auf leichte Körper von kleinen Dimensionen in einem elektrischen Felde ausgeübten Anziehungen, so lange dieselben noch nicht direkt durch Berührung elektrisch gemacht sind. Diese Körper, gleichviel ob sie Leiter sind oder nicht, bewegen sich nach den Punkten hin, wo die Kraft dem absoluten Werte nach ein Maximum ist, und gelangen schliesslich, sich selbst überlassen, bis zu den elektrischen Flächen. Wären sie in einem Mittel beweglich, in dem ein äusserer Widerstand die Geschwindigkeit sehr klein erhielte, so würden sie sich nicht längs einer Kraftlinie, sondern längs einer Linie der grössten Kraftänderung nach den elektrischen Körpern hin bewegen; in gewissen Fällen, wo ein Körper einem Zwange unterworfen ist, kann diese Bewegung selbst senkrecht zur Kraft erfolgen.

Der Körper befindet sich im Gleichgewicht in den Punkten, für welche ist

$$d(\varphi^2) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi d\varphi = 0.$$

Dieser Bedingung kann auf zwei Weisen genügt werden,

$$\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad d\varphi = 0.$$

Gleichgewicht ist also vorhanden, wenn die Kraft Null, ein Maximum, ein Minimum oder stationär ist. Insbesondere besteht in einem gleichförmigen Felde Gleichgewicht, was a priori klar war. In diesem Falle ist

das Gleichgewicht indifferent; dasselbe ist stabil in den Maxima der Kraft, labil in den Minima und in den Punkten, in denen die Kraft Null ist.

182. Richtung einer dielektrischen Nadel in einem veränderlichen Felde. — Wir denken uns, dass man auf eine Kugel, die, wie wir stets angenommen haben, mit Gleitschichten geladen ist, eine ihrer Grösse und Richtung nach constante Kraft wirken lässt, die mit der Elektrisirungsachse einen Winkel θ bildet; das Moment des von dieser Kraft hervorgerufenen Kräftepaares ist

$$Fm\delta \cos\theta = F\varpi \cdot \cos\theta.$$

Das elektrische Moment ϖ ist demnach das Moment des Kräftepaares, welches auf diese Kugel wirken würde in einem der Einheit gleichen Felde, wenn die Kraft desselben senkrecht zur Elektrisirungsachse wäre.

Geht man von der Anschauung Poisson's und Faraday's über die Constitution der Dielektrica aus, betrachtet man dieselben also als aus leitenden Kugeln bestehend, die in einem isolirenden Mittel verstreut sind, und nimmt man ferner an, dass die Elektrisirung einer jeden derselben nicht durch die benachbarten beeinflusst wird, so ist das elektrische Moment eines beliebig gestalteten Körpers in einem gleichförmigen Felde, wenn man noch U das Volumen des Dielektricums, n die Anzahl der in demselben enthaltenen Kugeln und u das Volumen einer jeden derselben nennt,

$$\varpi = nu\frac{3}{4\pi}\varphi = \frac{nu}{U}U\frac{3}{4\pi}\varphi = U\frac{3h}{4\pi}\varphi = UK\varphi.$$

Der Ausdruck für dieses Moment ist demnach derselbe, wie für eine homogene Kugel.

Nach dieser Hypothese wäre ein beliebig gestalteter Körper in einem gleichförmigen Felde gegen seinen Schwerpunkt im Gleichgewichte, welches auch seine Richtung sein möge. Denn alle Volumenelemente werden parallel zur Richtung des Feldes elektrisch, und das Kräftepaar für die Rotation ist für den ganzen Körper Null, da dasselbe für jedes einzelne Volumenelement Null ist.

In einem variabeln Felde dagegen sucht ein sehr kleiner in seinem Schwerpunkte befestigter Körper eine bestimmte Richtung anzunehmen. Da jedes Volumenelement du nur der Kraft des Feldes ausgesetzt ist, sucht es sich nach den Punkten hin zu bewegen, wo die Kraft grösser wird, und die Kraftcomponenten, die auf dasselbe wirken, sind

$$X = \frac{Kdu}{2}\frac{\partial(\varphi^2)}{\partial x},$$

$$Y = \frac{Kdu}{2}\frac{\partial(\varphi^2)}{\partial y},$$

$$Z = \frac{Kdu}{2}\frac{\partial(\varphi^2)}{\partial z}.$$

183. — Wir betrachten eine kurze unendlich dünne Nadel; φ_0 sei die Kraft des Feldes im Schwerpunkte der Nadel. Wir wählen die Kraftrichtung als x Achse, nehmen an, dass die Nadel um die z Achse drehbar ist, und dass dieselbe mit φ_0 den Winkel θ bildet.

Für das Element du in der Entfernung a vom Mittelpunkte, dessen Coordinaten x und y sind, hat die der Ebene parallele Kraftcomponente φ einen Ausdruck von der Form

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + Ax + By.$$

Die Componenten X und Y der Kraft sind daher

$$X = \frac{Kdu}{2} A,$$

$$Y = \frac{Kdu}{2} B.$$

Die zu dem vom Volumenelemente du beschriebenen Kreise tangentiale Componente ist aber

$$F = X \sin\theta - Y \cos\theta = \frac{Kdu}{2}(A \sin\theta - B \cos\theta);$$

also genügt die Gleichgewichtslage der Bedingung

$$A \sin\theta - B \cos\theta = 0, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{B}{A},$$

sie liegt also in der Richtung, in welcher die Aenderung der Kraft ein Maximum ist.

Hat sich dieses Element um einen Winkel $d\theta$ aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, so ist die Aenderung der tangentialen Componente

$$dT = \frac{Kdu}{2}(A \cos\theta + B \sin\theta)\, d\theta.$$

Entfernt sich die Nadel nur wenig von der Gleichgewichtslage, so ist der Winkel θ durch die Bedingung für die Gleichgewichtslage bestimmt, und da aus dieser folgt

$$A \cos\theta + B \sin\theta = \sqrt{A^2 + B^2},$$

so erhält man

$$dT = \frac{Kdu}{2} \sqrt{A^2 + B^2}\, d\theta.$$

Für die ganze Nadel ist das Moment die Resultante in Bezug auf die Achse

$$\int a\, dT = \frac{K}{2} \int a\, du \sqrt{A^2 + B^2}\, d\theta.$$

Nennt man ρ die Dichte der betrachteten Substanz, so ist die Dauer unendlich kleiner Schwingungen gegeben durch die Gleichung

$$t^2 = \pi^2 \frac{\rho \int a^2 du}{\frac{K}{2} \int a du \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ist die Nadel geradlinig und von der Länge $2l$, so erhält man

$$\frac{\int a^2 du}{\int a du} = \frac{2}{3} l,$$

was schliesslich liefert

$$t^2 = \frac{4}{3} \pi^2 \frac{\rho l}{K \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Schwingt demnach in einem variabeln Felde eine kurze dielektrische Nadel um ihren Schwerpunkt, nicht um die Richtung der Kraftlinie, sondern um die Richtung der grössten Kraftänderung, so ist das Quadrat der Schwingungsdauer nicht einfach der Kraft des Feldes umgekehrt proportional, es hängt vielmehr von den Coefficienten jener Aenderung ab und ist ausserdem ceteris paribus der Länge der Nadel proportional.

184. — Insbesondere ist es vorteilhaft, die Erscheinung zu betrachten, wenn das Feld gegen den Punkt, in dem die Nadel sich befindet, symmetrisch ist. Nehmen wir beispielsweise an, dass die Nadel in der Mitte O (Fig. 34) des Abstandes AA' zweïer entgegengesetzt gleicher Massen angebracht ist, und dass dieselbe um eine zu AA' senkrechte Gerade schwingen kann, so ist in der Schwingungsebene die Kraft im Punkte O ein Minimum für die Richtung AA' oder Ox, und ein Maximum für die zu dieser senkrechten Richtung Oy. Für einen Punkt in der Nähe von O hat man demnach zu setzen

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + Ax^2 - By^2.$$

Die Componenten der auf das Element du wirkenden Kraft sind dann

$$X = \quad KduAx = \quad KduAa \cos\theta,$$
$$Y = -KduBy = -KduBa \sin\theta$$

und die tangentiale Componente wird

$$T = aKdu(A + B) \sin\theta \cos\theta.$$

Hieraus resultirt als Gleichgewichtsbedingung

$$\sin\theta \cos\theta = 0,$$

woraus sich zwei Richtungen ergeben, $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$; die erstere entspricht einem stabilen, die andere einem labilen Gleichgewichtszustande.

Für eine sehr kleine Ablenkung $d\theta$ aus der Lage des stabilen Gleichgewichtes ist die Aenderung der tangentialen Componente

$$dT = aKdu(A + B)d\theta.$$

Ist dieses Volumenelement allein vorhanden, so ist die Schwingungsdauer gegeben durch die Formel

$$t^2 = \pi^2 \frac{a^2 \rho du}{aKdu(A + B)a} = \pi^2 \frac{\rho}{K} \frac{1}{A + B};$$

man sieht, dass dieselbe von a unabhängig ist und nur von der Dichte der betrachteten Substanz, von der elektrischen Empfänglichkeit derselben und von dem Gesetze der Aenderung des Feldes abhängt.

Vereinigt man auf einer Geraden eine Reihe von ähnlichen Teilchen, und nimmt man an, dass dieselben auf einander keinen Einfluss ausüben, so verhält sich jedes derselben so, als wenn es allein vorhanden wäre, und die Schwingung der ganzen Nadel erfolgt in derselben Zeit, wie die eines jeden ihrer Teile; die Schwingungsdauer einer Nadel ist für den betrachteten Zustand des Feldes unabhängig von ihrer Länge.

185. Wirkung eines Feldes auf eine leitende Nadel. — Ein leitender Körper verhält sich ganz anders. Wir betrachten als Beispiel eine so kleine Nadel, dass die Elektrisirung als identisch mit der angenommen werden kann, die in einem gleichförmigen Felde hervorgerufen werden würde.

Die Nadel ist im Gleichgewichte in einer zur Kraftlinie senkrechten Richtung, aber es ist klar, dass dann die Elektrisirung ein Minimum ist, und dass das Gleichgewicht labil ist.

Steht die Nadel schräg gegen die Kraft des Feldes, so sind die beiden elektrischen Schichten, die positive und die negative, symmetrisch gegen den Mittelpunkt, und die Wirkung des Feldes ruft, wie man sieht, ein Kräftepaar hervor, welches die Nadel in die Richtung der Kraft zu bringen strebt.

Das Verteilungsgesetz ist unabhängig von der Kraft des Feldes, und jede der Schichten ist dieser Kraft proportional. Folglich ist das Moment des Kräftepaares, welches auf die Nadel wirkt, für eine bestimmte Ablenkung aus der Gleichgewichtslage dem Quadrat der Kraft φ proportional. Endlich ist die Schwingungsdauer der Kraft umgekehrt proportional, und man kann setzen

$$t = \frac{A}{\varphi},$$

wo die Constante A nur von dem Verhältnisse zwischen der Länge und den Querdimensionen der Nadel abhängig ist.

8. Capitel.

Elektricitätsquellen.

186. Entdeckung von Volta. — Wir haben bereits (9) die wichtige Entdeckung Volta's erwähnt, dass zwei Leiter und allgemeiner zwei beliebige Körper, wenn sie mit einander in Berührung gebracht sind, in differente elektrische Zustände versetzt werden.

Handelt es sich um zwei sich berührende, im elektrischen Gleichgewicht befindliche Leiter von verschiedener Natur, so ist das Potential auf jedem derselben constant, aber dasselbe erfährt eine plötzliche Aenderung von einer Seite der Trennungsfläche zur andern.

Wir brauchen hier nicht alle Versuche vorzuführen, welche zur Aufstellung dieses grundlegenden Gesetzes geführt haben; wir wollen nur den folgenden anführen, um die Bedingungen der Erscheinungen genau zu präcisiren.

Werden zwei Platten, die eine aus Zink, die andere aus Kupfer, die sich ursprünglich im neutralen Zustande befanden und dieselbe Temperatur besassen, mittels isolirender Handhaben mit ihren parallelen Flächen in Berührung gebracht und dann von einander getrennt, so erkennt man, dass jede derselben elektrisch geworden ist, das Zink positiv, das Kupfer negativ. Die elektrische Ladung einer jeden der Platten ist ceteris paribus der Grösse der in Berührung gewesenen Flächen proportional.

Die Erscheinung geht so vor sich, als ob die Platten die Belegungen eines Condensators bildeten, zwischen denen eine bestimmte Potentialdifferenz besteht, während die entsprechenden elektrischen Schichten bez. in den beiden Metallen zu beiden Seiten der Trennungsfläche in sehr geringer Entfernung so liegen, dass die Capacität des Systems einfach proportional der Ausdehnung der betrachteten Flächen ist.

187. Elektromotorische Kraft der Berührung. — Bezeichnet man mit V_1 und V_2 die Potentiale des Zinkes und des Kupfers, mit δV deren Differenz $V_1 - V_2$ oder die *elektromotorische Kraft des Contactes* und mit C die Capacität des in dem Momente der Berührung gebildeten Condensators, so ist die Ladung der Platten

$$m = C(V_1 - V_2) = C\delta V.$$

Beide Platten zusammen können noch ausserdem eine gemeinsame elektrische Ladung M erhalten, die beispielsweise das Zink auf das Potential V bringt. In diesem Falle bleibt an der Berührungsfläche dieselbe Potentialdifferenz δV bestehen; wenn die Platten getrennt werden, setzt sich die Ladung einer jeden von ihnen aus der von der Potentialdifferenz bei dem Contacte herrührenden Ladung $\pm m$ und einem Teile der gemeinsamen Ladung M zusammen, welche letztere sich unter ihnen nach den gewöhnlichen Verteilungsgesetzen teilt.

Der Versuch bietet grosse Schwierigkeiten, wenn man aus der Grösse der Ladungen die Potentialdifferenz ableiten will, da die wirkliche Entfernung der Platten von der Politur der Flächen abhängt; die Berührung erfolgt meist nur in einer kleinen Anzahl von Punkten, und die Capacität des Systems kann zwischen ziemlich weiten Grenzen variiren.

Man erhält regelmässigere Resultate, wenn man die Platten parallel zu einander in eine gemessene Entfernung e bringt und dieselben mittels eines Kupfer- oder Zinkdrahtes verbindet. Die in dem Berührungspunkte hervorgerufene Potentialdifferenz δV besteht auf der ganzen Ausdehnung der beiden Platten; die Entfernung der entsprechenden Schichten ist merklich der Dicke des die Platten trennenden Dielektricums gleich, und die Capacität des Systems steht im umgekehrten Verhältnis dieser Dicke. Entfernt man nach Aufhebung der äusseren Verbindung die Platten von einander, so ist die Ladung einer jeden, wenn man mit S die Grösse der gegenüberstehenden Flächen bezeichnet,

$$m = \frac{S}{4\pi e}\delta V.$$

Dieser Versuch ermöglicht es also, den absoluten Wert von δV zu bestimmen. In allen Fällen kann man, wenn man die Entfernung e der Platten constant erhält und mit verschiedenen Metallen den Versuch macht, die Verhältnisse der elektromotorischen Contactkräfte messen.

In der Praxis sind diese Versuche sehr subtil, da die kleinsten Aenderungen im Zustande der Oberflächen die Resultate ändern. Selbst die Natur des Gases, welches das Dielektricum bildet, scheint einen kleinen Einfluss zu besitzen, sei es dadurch, dass die an dem Metalle haftende Gasschicht dessen physikalische Eigenschaften ändert, sei es, dass gleichzeitig eine besondere chemische Verbindung entsteht.

188. Gesetze von Volta. — Berührungsgesetz. — Wie dem auch sein möge, die Anschauungen Volta's sind durch alle in der Elektricität gemachten Fortschritte bestätigt worden, und man kann als *Berührungsgesetz* folgendes Gesetz aussprechen:

Zwischen zwei sich berührenden Körpern von derselben Temperatur entsteht eine bestimmte Potentialdifferenz, die von ihrer Natur abhängt, die aber absolut unabhängig ist von ihren Dimensionen, von ihrer Form, von der Ausdehnung der sich berührenden Flächen und von dem absoluten Werte des Potentials auf jedem von ihnen.

Volta erklärte diese Thatsache mit der Annahme, dass zwischen zwei Körpern eine *Contactspannung* existirt, aber die Art und Weise, wie er die Erscheinung auffasste, stimmt vollkommen mit der Anschauung einer Potentialdifferenz überein.

Wir werden diese charakteristische Potentialdifferenz oder elektromotorische Contactkraft zweier Metalle A und B durch das Zeichen $A|B$ wiedergeben, wo der erste Buchstabe das Metall bezeichnen soll, dessen Potential das höhere ist. Man erhält demnach

$$\delta V = V_a - V_b = A|B.$$

Wir können sogleich hinzufügen, dass diese Differenz eine Funktion der Temperatur ist, und dass die Berührung zweier Körper von derselben Natur, aber von verschiedener Temperatur ebenfalls eine elektromotorische Kraft hervorruft.

In allen auf das elektrische Gleichgewicht von Leitern bezüglichen Fragen haben wir bis jetzt die von dem Contact der verschiedenen Leiter herrührenden elektromotorischen Kräfte nicht berücksichtigt. Alle bisherigen Rechnungen setzen voraus, dass die Leiter ihrer Natur nach identisch sind und dieselbe Temperatur haben, und die Resultate müssen geändert werden wenn man auf diesen neuen Umstand Rücksicht nimmt, ausser wenn es sich um sehr hohe Potentiale handelt, in welchem Falle die Contactwirkungen vernachlässigt werden können.

189. Spannungsgesetz. — Nachdem er die grundlegende Thatsache der elektromotorischen Contactkraft festgestellt hatte, verglich Volta die von verschiedenen Metallen gelieferten Resultate mit einander und stellte durch den Versuch ein zweites Gesetz auf, Spannungsgesetz genannt, welches man in folgender Weise aussprechen kann:

Sind mehrere Metalle von derselben Temperatur so an einander gelötet, dass sie eine fortlaufende Kette bilden, so ist die Potentialdifferenz auf den letzten Metallen dieselbe, als wenn diese beiden Metalle sich direkt berührten.

Sind $A, B, C \ldots L, M$ die die Kette bildenden Metalle, so wird dieses Gesetz nach den obigen Bezeichnungen durch die folgende Formel dargestellt

$$A|B + B|C + \cdots + L|M = A|M.$$

Andererseits ist identisch

$$A|M = - M|A.$$

Bringt man alle Glieder auf die linke Seite, so geht also die Gleichung über in

$$A|B + B|C + \cdots + L|M + M|A = 0,$$

welche besagt, dass die *beiden Enden jeder mit denselben Metallen endigenden Kette dasselbe Potential besitzen.*

Dieser wichtige Satz ist eine notwendige Folge des Gesetzes von der Erhaltung der Energie. Könnten die Endmetalle A und A' von identischer Natur durch die Zwischencontacte auch auf verschiedenen Potentialen gehalten werden, so könnte man, indem man dieselben durch einen Leiter von derselben Natur verbindet, in dem äusseren Leiter und in der Kette der Zwischenmetalle eine continuirliche Entladung, d. h. eine dauernde Elektricitätsströmung erhalten. Dieser Elektricitätstransport wurde analog einer Folge von Entladungen als notwendige Folge die Produktion von Wärmeerscheinungen, also von Energie haben, worin also die Realisirung einer perpetuellen Bewegung läge.

Nimmt man selbst an, dass die Entwicklung von Wärme in gewissen Punkten des Kreises einer Absorption in andern Punkten entspricht, so fände doch ein Wärmetransport von kälteren nach wärmeren Punkten statt ohne entsprechende Arbeit. Dieses Resultat lässt sich nicht mit dem Carnot-schen Princip in Einklang bringen, welches Gesetz in der Wissenschaft ebenso wohl begründet ist wie die Unmöglichkeit des perpetuum mobile.

190. Ausnahmen vom Spannungsgesetze. — Galvanische Batterien. — Volta fand, dass das Gesetz der Spannungen manchmal unrichtig ist. Wir bemerken in der That, dass dasselbe nur notwendig erscheint, wenn keine Energiequelle im Kreise vorhanden ist; aber wenn dieser Energiequellen irgend welcher Art enthält, beispielsweise Körper, die exothermische, dem Durchgange der Elektricität entsprechende Reactionen zulassen, kann die von diesen Reactionen gelieferte Wärme wohl die Unterhaltung eines dauernden Stromes ermöglichen.

Ohne über diesen Punkt sehr klare Anschauungen zu besitzen (er hoffte, immer noch Metalle zu finden, die dem Gesetze nicht genügen), war Volta dahin geführt worden, die Körper in zwei grosse Klassen zu teilen. Die erste umfasst diejenigen, die dem Spannungsgesetze unterworfen sind; zu dieser gehören alle Metalle und eine gewisse Anzahl fester Körper. Die zweite umfasst die Körper, welche diesem Gesetze nicht unterworfen sind; zu dieser Klasse gehören die meisten Flüssigkeiten und Lösungen. Verbindet man Körper der ersten Klasse mit solchen der zweiten, so kann man eine Kette bilden, deren Enden, selbst wenn sie aus demselben Metall bestehen, eine bestimmte Potentialdifferenz zeigen.

Der Versuch zeigt, dass auch noch in diesem Falle das Volta'sche Grundgesetz richtig ist, d. h. dass die jedem Contacte entsprechende elektromotorische Kraft für eine bestimmte Temperatur eine constante, von den andern die Kette bildenden Körpern unabhängige Grösse ist; die zwischen den beiden Enden dieser Kette bestehende Potentialdifferenz ist die algebraische Summe aller von den einzelnen Contacten herrührenden Potentialdifferenzen.

Verbindet man diese beiden Enden durch einen Leiter, so führt man keine neuen elektromotorischen Contactkräfte ein; eine dauernde Elektricitätsströmung entsteht im Kreise, wo dieselbe durch die Energie der

chemischen Wirkungen unterhalten wird. Dies ist das Princip der *galvanischen Elemente* oder *Batterieen.*

191. Folgerungen für den Abstand der Atome von einander. — Sind zwei Metalle in Contact, so weist die Existenz einer elektromotorischen Kraft auf die Bildung zweier elektrischer Schichten von entgegengesetztem Zeichen hin, die durch eine bestimmte Entfernung von einander getrennt sind, und diese beiden Schichten müssen beziehungsweise in den beiden Metallen localisirt sein. Man könnte den Zwischenraum zwischen den beiden Schichten bestimmen, wenn man die Grösse der elektromotorischen Kraft wüsste, indem man die absolute Ladung misst, die auf den beiden Platten bleibt, wenn man dieselben, nachdem man sie mit einander in Berührung gebracht hat, trennt; denn man hat, indem man einfach mit V die elektromotorische Kraft bezeichnet (79),

$$e = \frac{S}{4\pi} \cdot \frac{V}{m}.$$

In dieser Form lässt sich der Versuch kaum ausführen, denn die Ladungen, welche die Platten behalten, hängen nur von der Capacität des Systems in dem Momente, wo sie definitiv getrennt werden, ab, und diese Capacität ist im Allgemeinen nur ein sehr kleiner Bruchteil der ursprünglichen Capacität, weil der Contact nicht in der ganzen Ausdehnung der Fläche gleichzeitig unterbrochen werden kann.

Immerhin konnte Sir W. Thomson durch eine Folge geistvoller Schlüsse bezeichnen, welches die untere Grenze für die Entfernung der elektrischen Schichten sein muss.

Die elektrische Energie des Systems zweier sich berührender Platten wird ausgedrückt durch

$$W = \frac{1}{2} m V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{S V^2}{8\pi e},$$

und diese Energie giebt die Arbeit an, die nötig ist, die beiden Platten zu trennen. Man kann diese Folgerung noch in anderer Weise nachweisen. Nennt man σ die elektrische Dichte jeder Schicht, so ist

$$4\pi\sigma = \frac{V}{e},$$

und die Kraft, die auf die eine Fläche wirkt, ist

$$F = 2\pi\sigma^2 S = \frac{V^2}{8\pi e^2}.$$

Um die Platten auf eine grosse Entfernung von einander zu entfernen, muss man die Arbeit aufwenden

$$T = -\int F de = -\frac{S V^2}{8\pi} \int_e^\infty \frac{de}{e^2} = \frac{S V^2}{8\pi e}.$$

Die dem Systeme im Momente der Berührung mitgeteilte Energie ist der ursprünglichen potentiellen Energie der Platten entnommen, und man kann nicht annehmen, dass diese letztere grösser ist als diejenige, die durch die Legirung der beiden Metalle disponibel werden könnte.

Nehmen wir an, dass für Zink und Kupfer das Gewichtsverhältnis der beiden Platten das ist, in welchem sie Messing bilden, und ist p das Gesammtgewicht, ε die Summe der beiden Dicken und δ die mittlere Dichte des Systems, so erhält man

$$p = S\varepsilon\delta \text{ oder } S = \frac{p}{\varepsilon\delta}.$$

Die elektrische Energie kann also gesetzt werden

$$W = \frac{p}{8\pi\delta} \cdot \frac{V^2}{e\varepsilon}.$$

Diese Gleichung bleibt richtig, so lange die Metalle ihre physikalischen Eigenschaften behalten, und hierfür ist augenscheinlich nötig, dass die Gesammtdicke beider Platten grösser ist als die normale Entfernung der beiden elektrischen Schichten.

Nehmen wir nunmehr an, dass man, ohne das Gesammtgewicht p zu ändern, die Oberflächen der Platten auf Kosten ihrer Dicke vergrössert, so wächst die Energie W proportional der Oberfläche und umgekehrt proportional der Dicke, wenigstens so lange ε grösser als e ist. Das Maximum der Energie entspricht dem Falle, wo $\varepsilon = e$ ist, und man findet dann

$$W = \frac{p}{8\pi\delta}\left(\frac{V}{e}\right)^2,$$

oder

$$e = V\sqrt{\frac{p}{8\pi\delta}\,\frac{1}{W}}.$$

Die Energie W bleibt notwendig kleiner als die bei der Legirung frei werdende. Da diese bis auf ungefähr $\frac{1}{3}$ ihres Wertes bekannt ist, vermag man mittels der letzten Gleichung eine untere Grenze für die Entfernung e der elektrischen Schichten zu bestimmen. Für eine geringere Dicke würden die Metalle ihre Eigenschaften verlieren, da sie nicht mehr fähig wären, bei der Berührung die sie charakterisirende Potentialdifferenz anzunehmen; man kann sagen, dass die molekulare Constitution dieser Körper dann geändert wäre, und dass die so berechnete Dicke von derselben Ordnung ist wie die mittlere Entfernung der Atome.

Sir W. Thomson hat so für Kupfer und Messing gefunden

$$e = \frac{1^{mm}}{3 \cdot 10^7},$$

was ungefähr $\frac{1}{15000}$ der Wellenlänge des grünen Lichtes entspricht.

Könnte man die beiden Platten trennen, ohne dass sich die gegenüberliegenden Schichten teilweise wieder vereinigten, so würde man jede derselben auf einem sehr hohen Potentiale finden. Dieses Potential hängt von den Dimensionen der Platten ab, da die Capacität des Systems der Berührungsfläche proportional ist, während die Capacität jeder einzelnen Platte den linearen Dimensionen derselben proportional ist. Nimmt man an, dass die Entfernung der elektrischen Schichten $\frac{1}{10^6}$ mm beträgt, so wäre, wie Helmholtz gezeigt hat, für eine Zinkplatte von 10 cm Radius, die eine mit der Erde verbundene Kupferplatte berührt, das Potential, nachdem man sie von der Kupferplatte weit entfernt hat, $39 \cdot 10^6$ Mal grösser als das ursprüngliche, von der Berührung herrührende Potential. Mit den Zahlen von Sir W. Thomson wäre das Potential noch 30 Mal grösser.

192. Berührung der Dielektrica. — Das erste Gesetz von Volta scheint in gleicher Weise für den Contact sowohl der Metalle mit den Dielektrica als der Dielektrica mit einander zu gelten. Nur bietet in diesen beiden Fällen die Bestimmung der elektromotorischen Kräfte sehr grosse Schwierigkeiten.

Ein Berührungspunkt zwischen zwei leitenden Körpern genügt, um das Gleichgewicht der Potentiale zu sichern; die Ladungen hängen dann allein von der Capacität des aus den beiden Leitern bestehenden Systems in dem Augenblicke, wo ihre Trennung definitiv wird, ab. Bei den schlecht leitenden Körpern dagegen findet das Gleichgewicht nur für die sich berührenden Punkte statt, und nur diese laden sich mit Elektricität. Die Gesammtladung ist demnach mit der Anzahl der sich berührenden Punkte äusserst veränderlich. Wir fügen hinzu, dass die Thatsache, dass die Elektricität in die Dielektrica eindringt, die Versuche noch complicirt.

193. Elektrisirung durch Reibung. — Bei der Elektrisirung der Körper durch Reibung scheint die Elektricität keinen anderen Ursprung zu haben, als den der Berührung der beiden Körper; die Reibung würde in diesem Falle nur den Zweck haben, die Berührungspunkte zu vervielfachen.

Sind die geriebenen Körper gleicher Natur, so kann man dieselben im Allgemeinen nicht elektrisch machen; trotzdem zeigen sich oft sehr schwache Spuren von Elektricität, aber dann kann man die Elektricitätsentwicklung immer einer mehr oder weniger sichtbaren Ungleichheit zwischen den geriebenen Körpern zuschreiben.

194. Elektrisirmaschinen. — Man gelangt so zu dem Schlusse, dass nur zwei Arten der Erzeugung von Elektricität vorhanden sind, die *Berührung* und die *Induction*. Alle elektrischen Maschinen bringen die eine oder die andere dieser Arten ins Spiel und haben nur den Zweck, die auf die eine oder andere Weise auf einem Leiter hervorgerufenen Ladungen anzuhäufen.

Die allgemeine Theorie dieser Maschinen ist sehr einfach. Betrachten wir einen hohlen isolirten Leiter, beispielsweise den Faraday'schen Cylinder,

nehmen wir andererseits den Kuchen eines Elektrophors aus Harz oder Ebonit, der mit negativer Elektricität geladen ist, so ladet sich eine mit einer isolirenden Handhabe versehene Metallplatte, wenn sie auf den Kuchen gesetzt und einen Augenblick mit der Erde in Verbindung gebracht ist, mit positiver Elektricität; bringt man dieselbe nunmehr in den Hohlcylinder und lässt sie die innere Fläche desselben berühren, so entsteht auf der äusseren Fläche des Cylinders eine gleiche Ladung; die Platte selbst wird dann im neutralen Zustande herausgezogen, und der Versuch kann beliebig oft wiederholt werden. Es ist klar, dass in der Theorie die Ladung des Cylinders keine Grenze findet, da ein in seinen Hohlraum eingeführter und mit ihm in Verbindung gebrachter Leiter keine Elektricität zurückbehält, welches auch die vom Cylinder bereits erlangte Ladung sein mag. Dies ist, auf den einfachsten Ausdruck zurückgeführt, der Mechanismus der auf Induction beruhenden Maschinen.

Nehmen wir jetzt statt des Elektrophorkuchens eine mit der Erde verbundene Kupferplatte an und bringen mit derselben mittels einer isolirenden Handhabe eine Zinkplatte in Berührung, so ladet sich nach dem Volta'schen Gesetze die Zinkplatte mit positiver Elektricität; diese Ladung kann dann wie im vorigen Falle auf den Cylinder übertragen und der Versuch beliebig oft wiederholt werden.

Das Verhältnis würde noch dasselbe bleiben, wenn man statt der Kupferplatte ein Stück Tuch oder Kautschuk nimmt und eine Glasplatte an Stelle der Zinkplatte. Man muss dann allerdings die isolirende Natur der verwendeten Körper in Rechnung ziehen; der Contact wird zwischen dem Tuch und den verschiedenen Punkten der Glasfläche nur durch Reibung hergestellt werden. Wird das mit positiver Elektricität geladene Glas in den Hohlraum des Cylinders gebracht, so erzeugt es auf der Innenfläche desselben eine gleiche Schicht von entgegengesetztem Zeichen; allein es genügt nicht, dasselbe mit einem Punkte der Innenfläche in Berührung zu bringen, damit sich die Ladungen gegenseitig aufheben. Aber man gelangt zu demselben Resultat, wenn die Innenfläche des Cylinders mit Spitzen versehen ist: das Gleichgewicht wird erst dann hergestellt sein, wenn die Dichte an den Enden dieser Spitzen Null ist, d. h. wenn die von ihnen ausströmende Elektricität die Ladung der Glasplatte neutralisirt hat. Dies ist die bei allen Reibungselektrisirmaschinen angewandte Anordnung.

195. Wesentliche Organe der Maschinen. — Man sieht, dass in allen Fällen die Maschine sich auf drei wesentliche Organe reducirt, eines, welches die Elektricität erregt, ein anderes, welches sie weiter führt, und ein drittes, welches sie empfängt: *einen Erreger, einen Uebertrager und einen Sammler.* Die dem Sammler mitgeteilte potentielle Energie wird durch die mechanische Arbeit geliefert, die geleistet wird, wenn man den *Uebertrager* in dem den elektrischen Kräften entgegengesetzten Sinne von dem mit entgegengesetzter Elektricität geladenen, ihn also anziehenden *Erreger* bis zu dem mit Elektricität von gleichem Zeichen geladenen, ihn also abstossenden *Sammler* bewegt.

Bei den Reibungsmaschinen erhält der Collector bei jeder einzelnen Operation dieselbe Elektricitätsmenge und seine Ladung wächst in arithmetischer Progression.

In dem Falle der Inductionsmaschinen kann man solche construiren, bei denen die Ladung in geometrischer Progression wächst: man braucht nur zwei Maschinen so zusammen zu koppeln, dass die beiden Inductoren Elektricität entgegengesetzter Art entwickeln und dass jeder derselben mit dem Collector des andern Systems in metallischer Verbindung steht. Bei jeder Operation wächst die Ladung des Erregers gleichzeitig mit der des Collectors, mit dem er verbunden ist, und erregt durch Influenz in dem Uebertrager für die nächste Operation eine grössere Ladung. Diese Anordnung ist in der Maschine von Varley ausgenutzt, ebenso wie in einigen der so geistvollen Maschinen von Sir W. Thomson, wie in dem selbstthätigen reciproken Condensator und dem Replinisher. Die Holtz'sche Maschine beruht auf demselben Princip mit einer etwas complicirteren Anordnung.

196. Grenze der Ladung. — Giebt auch die Theorie keine Grenze für die Ladung des Collectors, so wird doch diese Grenze in der Praxis erreicht, sei es infolge des Verlustes durch die Luft oder durch die Stützen, sei es durch spontane Entladung in Form von Funken, die zwischen dem Collector und den andern Teilen der Maschine oder zwischen jenem und benachbarten Leitern überspringen.

In dem letzteren Falle hängt die Grenze nur von der Form der Maschine und von ihrer Lage gegen die benachbarten Leiter ab; im ersteren wird dieselbe vom atmosphärischen Zustande und von der Geschwindigkeit, mit welcher die Operationen einander folgen, bestimmt.

Für die Summationsmaschinen ist die Grenze erreicht, wenn in jedem Augenblicke der Gewinn gleich den Verlusten ist, und diese Grenze hat stets einen bestimmten Wert.

Bei den Multiplicationsmaschinen müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein, wenn die Ladung des Collectors einen bestimmten Wert behalten soll. Es seien C und C' die Capacitäten der beiden Sammler, V und V' ihre Potentiale in absoluten Werten, c und c' die Capacitäten der Uebertrager, und n und n' die Anzahl der in der Zeiteinheit vorgenommenen Operationen.

Für sehr schwache Ladungen ist der Verlust eines elektrisirten Leiters durch die Luft merklich der Ladung oder dem Potentiale proportional.

Nennt man m und m' die Coefficienten der Proportionalität in Bezug auf die beiden Leiter, so können die Verluste der Ladung für die Zeiteinheit dargestellt werden durch mV und $m'V'$.

Während einer unendlich kleinen Zeit dt ist der Ladungszuwachs des Collectors C gleich dem Ueberschuss der empfangenen Elektricität über die verlorene; man erhält also

$$CdV = (n'c'V' - mV)\,dt$$

oder auch

$$C\frac{dV}{dt} = n'c'V' - mV.$$

Der andere Collector liefert in derselben Weise

$$C'\frac{dV'}{dt} = ncV - m'V'.$$

Durch Lösung dieser simultanen Differentialgleichungen könnte man den von den Potentialen V und V' am Ende irgend einer Zeit erreichten Wert berechnen, wenn die Anfangswerte gegeben sind; aber die so erhaltenen Resultate stimmen nur innerhalb der Grenzen mit der Erfahrung überein, innerhalb deren man das Coulomb'sche Gesetz als richtig annehmen darf. Bekanntlich vollzieht sich für etwas grössere Ladungen der Verlust in einer viel schnelleren Weise.

Diese Gleichungen liefern die notwendigen Bedingungen dafür, dass die Ladung überhaupt wächst; denn es genügt hierfür, dass die Ableitungen der Potentiale positiv sind, woraus man erhält

$$n'c'V' - mV > 0,$$

$$ncV - m'V' > 0;$$

hieraus folgt

$$\frac{m}{n'c'} < \frac{V'}{V} < \frac{nc}{m'}$$

oder auch

$$nn'cc' > mm'.$$

Ist diese letztere Bedingung für die Leistung erfüllt (und man sieht, dass dieselbe nicht von der ursprünglichen Elektrisirung abhängt), so wird die Ladung der Maschine zunächst wachsen. Bleibt diese Ungleichheit trotz der Vergrösserung der Coefficienten m und m' bestehen, so findet die Ladung keine andern Grenzen, als durch die Entstehung von Funken bedingte. Würde die eben angeführte Ungleichheit in entgegengesetztem Sinne bestehen, dann würde die Ladung kleiner und schnell Null werden.

Ist der Apparat symmetrisch, so ist die Bedingung für das Anwachsen der Ladung einfach

$$nc > m.$$

Die eben ausgeführte Rechnung gilt insbesondere für die Anordnung, bei welcher der Collector der einen Maschine in metallischer Verbindung mit dem Inductor der andern steht; aber dieselbe Betrachtungsweise würde auch bis auf einige Einzelheiten für alle Elektricitätsmultiplicatoren mit gegenseitiger Influenz ihre Geltung behalten.

197. Leistungsfähigkeit der Maschinen. — Welches übrigens auch die äussere Ursache sein möge, welche die Ladung begrenzt, man sieht, dass alle Maschinen als wirkliche *Quellen* wirken, d. h. als Systeme, die durch das Spiel ihrer eigenen Organe fähig sind, einen Leiter auf constantem Potential zu halten oder eine bestimmte Potentialdifferenz zwischen zwei Leitern zu unterhalten.

Dieses Resultat wird erhalten, wenn die Menge der dem Collector zugeführten Elektricität in jedem Augenblicke gleich ist derjenigen, die ihm entnommen wird, gleichviel ob durch den Verlust infolge der Berührung mit der Luft oder durch auf irgend eine Art zwischen dem Collector und der Erde hervorgerufene Entladungen. Die *Lieferung* der Maschine ist dann die in jeder Zeiteinheit in Bewegung gesetzte Elektricitätsmenge. Für die Summationsmaschinen ist, wie man unmittelbar sieht, ceteris paribus die Lieferung proportional der Capacität des Uebertragers und der Anzahl der in jeder Zeiteinheit ausgeführten Operationen. Funktionirt wie in den Maschinen mit Platten der Uebertrager continuirlich, so ist die Lieferung der Geschwindigkeit proportional.

In den Multiplicationsmaschinen gehen die Erscheinungen nicht mehr in so einfacher Weise vor sich; aber der Versuch zeigt, dass die Lieferung noch immer merklich der Geschwindigkeit proportional ist, obwohl dieselbe immerhin im Allgemeinen etwas schneller wächst.

Zweiter Teil.

Elektrische Ströme.

1. Capitel.

Fortpflanzung der Elektricität im stationären Zustande.

198. Stationärer Zustand. — Stellt man zwischen zwei isolirten Leitern mit den Potentialen V und V' eine metallische Verbindung her, so kann das Gleichgewicht nicht bestehen, die positive Elektricität geht von dem Körper mit höherem Potential nach dem hin, der das niedrigere Potential besitzt; es entsteht eine *Elektricitätsströmung*, ein *elektrischer Strom*. Haben beide Körper begrenzte Ladungen, so stellt sich das Gleichgewicht nach einer im Allgemeinen sehr kurzen Zeit, deren Dauer von der Natur und den Dimensionen des Zwischenleiters abhängt, wieder her; der Strom ist dann mit der Zeit *veränderlich*. Erhält man aber durch irgend einen Process die Potentialdifferenz der beiden Leiter constant, so stellt sich eine dauernde Wirkung ein, und der Zwischenleiter wird der Sitz eines *elektrischen Stromes*.

199. Analogie mit den Wärmeerscheinungen. — Die Analogie dieser Erscheinungen mit denen der Wärmefortpflanzung in einem leitenden Mittel zwischen zwei Flächen von constanter Temperatur tritt klar hervor, und diese Analogie drückt sich in Gesetzen aus, die in beiden Fällen identisch sind.

An die Principien der Fourier'schen Theorie anknüpfend, haben wir (**70**) gesehen, dass, wenn man in einem die Wärme leitenden Mittel zwei benachbarte isotherme Flächen in Betracht zieht, welche bezw. die Temperaturen t und $t + dt$ besitzen, die Wärmeströmung dQ, die in der Zeiteinheit durch ein Flächenelement dS normal zu diesem Elemente hindurchgeht, der Temperaturdifferenz dt der beiden Flächen proportional ist und im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernung dn steht und ausgedrückt wird durch

$$dQ = -kdS\frac{dt}{dn},$$

wo k der Coefficient der Wärmeleitungsfähigkeit des Mittels ist; das Zeichen — deutet an, dass die Wärmeströmung in dem Sinne der abnehmenden Temperaturen fortschreitet. Der Ausdruck für die Strömung durch ein

Element dS' einer beliebigen Fläche S' hindurch ist der nämliche, ob dieselbe isotherm ist oder nicht; die Wärmeströmung ist der partiellen Ableitung $\frac{\partial t}{\partial n'}$, der Temperatur nach der Normale n' der Fläche S' proportional, und man erhält

$$dQ' = -kdS'\frac{\partial t}{\partial n'}.$$

200. Theorie von Ohm. — Ohm hat die Betrachtungsweise Fourier's auf die Lehre von der Fortpflanzung der Elektricität übertragen. Er nimmt an, dass alle Punkte eines im Gleichgewichte befindlichen Leiters in demselben elektrischen Zustande sind, dieselbe *Spannung* besitzen. Ist kein Gleichgewicht vorhanden, so treten Auswechslungen an Elektricität ein; die Spannung in jedem Punkte ist dann im Allgemeinen eine Funktion der Zeit und der Coordinaten; aber wenn eine äussere Ursache eine constante Differenz zwischen den Spannungen der verschiedenen Teile des Leiters unterhält, dann stellt sich in dem System nach Verlauf einer längeren oder kürzeren Zeit ein dauernder Zustand her, in welchem die Spannung in jedem Punkte von der Zeit unabhängig wird.

Ohm nimmt ferner an, dass zwischen zwei Molekülen, deren Spannungen U und U' sind, in der Zeiteinheit eine Auswechslung an Elektricität eintritt, die der Differenz der Spannungen und einer solchen Funktion der Entfernung proportional ist, dass die benachbarten Molekel einen vorherrschenden Einfluss ausüben.

Diese Hypothese ist mit der von Fourier (70) identisch. Ohne dass wir die Schlüsse zu wiederholen brauchen, folgt, dass dieAuswechslungen der Elektricität normal zu den Flächen gleicher Spannung oder den elektrischen Niveauflächen in Bezug auf diese neue Eigenthümlichkeit erfolgen. Die Elektricitätsströmung dQ, die in der Zeiteinheit ein Element dS einer Niveaufläche durchströmt, ist proportional der Ableitung der Spannung U nach der Normale dieser Fläche und wird ausgedrückt durch

$$dQ = -cdS\frac{dU}{dn},$$

wo der Coefficient c von der Natur des Mittels abhängt und als *Coefficient der elektrischen Leitungsfähigkeit* bezeichnet werden kann. Die Ableitung $-\frac{dU}{dn}$ ist die *elektromotorische Kraft* in dem betrachteten Punkte. Man sieht auch, dass durch ein Element dS' irgend einer Fläche eine Elektricitätsströmung geht, die der elektromotorischen Kraft in Richtung der Normale dieser Fläche oder $\frac{dU}{dn'}$ proportional ist.

In der Theorie von Ohm wie in der von Fourier nimmt man an, dass die Richtung der Strömung constant parallel derjenigen der auf dieselbe einwirkenden Kraft und folglich von deren früherem Zustande unabhängig

ist. Diese Hypothese ist mit dem Begriff der Trägheit und folglich mit dem der Materialität dessen, was die Strömung ausmacht, unvereinbar.

Ohm fasst die Spannung als einen besonderen Zustand eines jeden Punktes auf, infolge dessen die Elektricität ihm zu entschlüpfen strebt und, wenn die Spannungen in einem Mittel veränderlich sind, die Elektricität von Punkten höherer Spannung nach solchen niederer Spannung hinfliesst. Man erkennt bereits die Analogieen, die diese Funktion mit dem Potential zeigt, da die Spannung ebenfalls in einem im Gleichgewichte befindlichen Leiter constant ist. Ohm scheint in einzelnen Teilen seiner Abhandlungen eine nahe Verwandtschaft zwischen der elektrischen Dichte und der Spannung anzunehmen, aber er giebt andererseits an, dass man die Spannung in einem Punkte selbst bei veränderlichem Zustande bestimmen könnte durch Verbindung dieses Punktes mittels eines Drahtes mit einem isolirten Elektroskop; die so gemessene Grösse ist aber nichts anderes als das Potential.

201. Hypothese von Kirchhoff. — Um die Ohm'sche Theorie mit den jetzigen Anschauungen über die Elektricität in Einklang zu bringen, genügt es, wie es Kirchhoff gethan hat, anzunehmen, dass die Spannung und das Potential zwei identische Funktionen sind.

Aus dieser Annahme folgt, dass in einem System von mit einander verbundenen, aber nicht im Gleichgewicht befindlichen Leitern die Elektricitätsströmung in jedem Punkte der Ableitung des Potentials nach der Normale der durch diesen Punkt gehenden Niveaufläche proportional ist, oder in andern Worten der in diesem Punkte wirkenden elektromotorischen Kraft, d. h. der Resultante der Wirkungen aller Massen des Systems in ihrem augenblicklichen Zustande.

Noch einfacher: *die Elektricitätsströmung ist der Kraftströmung parallel und proportional.*

202. Uebereinanderlagerung stationärer Zustände. — In anderer Form kann man sagen, dass die Hypothese in der Annahme besteht, dass die Uebereinanderlagerung zweier dynamischer Gleichgewichtszustände einen neuen Gleichgewichtszustand ergiebt, in dem die ein Flächenelement durchfliessende Strömung gleich der Summe der von den beiden ursprünglichen Zuständen herrührenden Strömungen ist.

Denn betrachten wir zwei Zustände, für welche die Strömungen, die ein Flächenelement dS durchfliessen, AdS und $A'dS$ sind, so sind die normalen Kraftcomponenten auf diesem Elemente $-\frac{\partial V}{\partial n}dS$ und $-\frac{\partial V'}{\partial n}dS$. Bringt man diese beiden Zustände zusammen, so addiren sich die Potentiale in jedem Punkte, und die normal zu einem Elemente dS gerichtete Kraft wird

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V'}{\partial n}\right)dS.$$

Nach der Kirchhoff'schen Annahme ist die Strömung durch das Element dS hierdurch geworden

$$AdS + A'dS.$$

Nimmt man die ursprünglichen Zustände als identisch an, so ist die Strömung $2AdS$ geworden und die Kraft ist ebenfalls verdoppelt; die Elektricitätsströmung ist demnach der Kraftströmung proportional.

Ist der Zustand ein stationärer, d. h. ist das Potential in jedem Punkte unveränderlich, so ist die irgend ein Flächenelement durchsetzende Strömung constant. Ist der Zustand veränderlich, so ändern sich die Potentiale mit der Zeit, und die in der Zeit dt ein Flächenelement durchsetzende Strömung d^2Q ist

$$d^2Q = -\, c dS \frac{\partial V}{\partial t} dt.$$

203. Im stationären Zustande ist die Dichte der freien Elektricität im Innern der Leiter Null. — Die Elektricitätsströmung kann sich im Innern einer geschlossenen Fläche nicht stauen, ohne ihr Potential zu ändern, ebenso wie ein Zuwachs der Wärmeströmung dort eine Erhöhung der Temperatur hervorrufen würde.

Ist der stationäre Zustand für ein Leitersystem erreicht, so ist daher die Gesammtströmung, die ein Punkt erhält, Null. Wenn aber die algebraische Summe der Strömungen, die in ein Volumenelement $dxdydz$ eintreten, der Null gleich ist, gilt wieder die Laplace'sche Gleichung

$$\Delta V = 0.$$

Da man allgemein, wenn man mit ρ die Raumdichte der Elektricität in dem betrachteten Punkte bezeichnet, hat

$$\Delta V = -\, 4\pi\rho,$$

so folgt

$$\rho = 0.$$

Das Gesetz, dass die Elektricitätsströmung der Kraftströmung proportional ist, führt unmittelbar zu derselben Folgerung. Denn, wenn der Zustand stationär ist, ist die Elektricitätsströmung für ein Volumenelement Null; die dieser proportionale Kraftströmung ist ebenfalls Null; diese letztere ist aber gleich $4\pi m$, wenn m die in dem betrachteten Volumen enthaltene Masse bezeichnet; demnach ist $m = 0$. Wenn demnach ein Leitersystem zu einem stationären Zustande gelangt ist, ist die elektrische Dichte im Innern aller Leiter Null; die freien elektrischen Massen, die das Potential V hervorrufen, und deren Wirkung den Strom bedingt, liegen demnach ganz auf der Oberfläche der Leiter. Diese Massen befinden sich nicht von selbst im Gleichgewicht, und sie bringen in jedem Punkte die elektromotorische Kraft des Stromes hervor.

Hieraus folgt, dass die Strömung, was sie auch sein möge, wenn sie eine reale Existenz besitzt, nicht eine Strömung freier Elektricität ist; nach der Hypothese von zwei Fluida müsste man annehmen, dass in jedem Augen-

blicke in jedem Volumenelemente im Innern des Leiters die gleiche Menge von beiden Elektricitäten vorhanden ist, und dass diese sich in zwei gleichen Strömen in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Nach der Hypothese von einem Fluidum müsste man jedes Element so auffassen, als ob es in jedem Augenblicke die normale Elektricitätsmenge enthielte, wobei man immer noch annimmt, dass diese in ihrer Gesammtheit oder teilweise ihren Ort verändert.

204. Lineare Leiter. — Ohm'sches Gesetz. — Wir fassen zunächst einen cylindrischen Draht in's Auge, dessen Länge gegen den Durchmesser gross ist, der sich in einem vollkommen isolirenden Mittel befindet, und wir nehmen an, dass der stationäre Zustand erreicht ist.

Findet kein Verlust an der Oberfläche des Drahtes statt, so ist die Elektricitätsströmung in jedem Punkte der erzeugenden Linie des Cylinders parallel, die Niveauflächen sind zur Drahtachse senkrechte Ebenen. Die Elektricitätsströmung, die durch irgend einen Querschnitt des Drahtes in der Zeiteinheit hindurchgeht, ist für die ganze Länge dieselbe; wir wollen diese Strömung *Intensität des Stromes* nennen und dieselbe mit i bezeichnen. V sei das Potential im Punkte P, der in einer Entfernung x von einer festen zum Drahte normalen Ebene liegt, und S der Querschnitt des Drahtes.

Das Potential ist einfach eine Funktion von x, und die Intensität wird ausgedrückt durch

$$i = -cS\frac{dV}{dx}.$$

Da diese Strömung von x unabhängig ist, erhält man

$$\frac{dV}{dx} = a \text{ und } V = ax + b,$$

wo a und b zu bestimmende Constanten sind.

Bezeichnen wir mit V_1 und V_2 die Potentialwerte an zwei Punkten



Fig. 49.

A und B (Fig. 49), die um l von einander entfernt sind, und wählen wir den Punkt A zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ergiebt sich

$$V = -\frac{V_1 - V_2}{l}x + V_1 \tag{1}$$

und folglich

$$i = cS\frac{V_1 - V_2}{l} = \frac{V_1 - V_2}{\frac{l}{cS}}. \tag{2}$$

Der Quotient $\frac{l}{cS} = r$ wird der *Widerstand* des Drahtes zwischen den beiden Punkten A und B genannt, der reciproke Wert dieses Widerstandes $\frac{cS}{l}$ ist die *Leitungsfähigkeit* desselben Drahtes.

Die Gleichungen (1) und (2) zeigen:

1. Das Potential nimmt den Draht entlang in arithmetischer Progression in dem Sinne der Fortbewegung des Stromes ab;

2. Zwischen zwei Punkten A und B ist die Stromintensität gleich dem Quotienten der Potentialdifferenz dieser beiden Punkte durch den Widerstand des Zwischendrahtes.

Diese beiden Sätze sprechen das *Ohm'sche Gesetz* aus.

Man sieht, dass die Verteilung des Potentials und die Elektricitätsströmung in dem eben betrachteten Felde identisch sind mit der Verteilung der Temperaturen und mit der Wärmeströmung, die sich in einer homogenen, von zwei parallelen Ebenen, die beziehungsweise auf constanten Temperaturen gehalten werden, begrenzten Wand fortpflanzt.

205. Der Widerstand eines Leiters kann als der reciproke Wert einer Geschwindigkeit dargestellt werden. — Die Grösse r, die wir den Widerstand des Leiters genannt haben, hat den Wert $\frac{l}{cS}$; dieselbe ist der Länge des Leiters proportional und steht im umgekehrten Verhältnisse des Querschnittes und des Coefficienten der specifischen Leitungsfähigkeit des Mittels.

Das Verhältnis $\frac{1}{c}$ giebt den Widerstand eines der Einheit gleichen Würfels an; man kann dasselbe den *specifischen Widerstand* des Leiters nennen.

Der Widerstand eines Leiters ist eine Grösse derselben Art wie der reciproke Wert einer Geschwindigkeit in der Mechanik.

Denn es ist

$$r = \frac{V_1 - V_2}{i}.$$

Die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ ist dem Quotienten einer elektrischen Masse M durch eine Länge a gleich; die Intensität eines Stromes oder die Strömung in der Zeiteinheit ist gleich dem Verhältnis der Elektricitätsmenge M', die in der Zeit t durchfliesst, zu der entsprechenden Zeit. Man erhält demnach

$$r = \frac{\frac{M}{a}}{\frac{M'}{t}} = \frac{M}{M'} \cdot \frac{1}{\frac{a}{t}}.$$

Der Quotient $\frac{M}{M'}$ ist eine abstracte Zahl, und das Verhältnis $\frac{a}{t}$ eine Geschwindigkeit. Der Widerstand ist demnach das Reciproke einer Geschwindigkeit.

206. — Man kann übrigens auch einen Versuch angeben, in dem diese Geschwindigkeit eine concrete physikalische Bedeutung erhält.

Wir fassen eine Kugel vom Radius R ins Auge, die mit einer Elektricitätsmasse M geladen ist, und nehmen an, dass man diese Kugel durch einen Leiter vom Widerstande r mit der Erde in Verbindung setzt.

Das Potential dieser Kugel ist gleich $\frac{M}{R}$; dasselbe wird kleiner, sobald die Verbindung mit der Erde hergestellt ist; aber wenn die Kugel sich in derselben Zeit, in der die Ladung kleiner wird, zusammenzieht, kann es vorkommen, dass das Potential constant bleibt.

Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man, indem man dM den Verlust der Kugel an Elektricität während der Zeit dt und dR die Verkleinerung nennt, die der Radius in derselben Zeit erleiden muss, wenn das Potential seinen Betrag nicht ändern soll,

$$V = \frac{M}{R} = \frac{M - dM}{R - dR} = \frac{dM}{dR},$$

aber nach dem Ohm'schen Gesetze ist

$$dM = \frac{V}{r} dt.$$

Soll das Potential constant sein, so muss auch dR der Zeit proportional sein; wir setzen demnach

$$dR = u dt.$$

Es ergiebt sich dann

$$V = \frac{\frac{V}{r} dt}{u dt} = \frac{V}{ru},$$

und folglich

$$r = \frac{1}{u} \cdot$$

Demnach ist der Widerstand r eines Leiters der reciproke Wert der Geschwindigkeit u, mit der der Radius einer Kugel abnehmen muss, wenn das Potential auf derselben trotz des Elektricitätsverlustes, den sie erleidet, wenn man sie durch den betrachteten Leiter mit der Erde verbindet, constant bleiben soll.

207. Beliebige lineare Leiter. — Wir haben die Leiter als geradlinig angenommen, aber dieselbe Schlussweise gilt offenbar auch für irgendwie zusammengebogene lineare Leiter; die Elektricitätsströmung bleibt in jedem Punkte normal zum senkrechten Querschnitte des Leiters.

Besteht der Kreis aus zwei oder mehr cylindrischen Teilen von verschiedenen Querschnitten und differenter Natur, die Ende an Ende zusammengefügt sind, so muss man diese verschiedenen Teile gesondert betrachten.

Es seien beispielsweise V_1 und V_2 die Potentiale zweier Punkte A und B (Fig. 50), von denen der erste einem Leiter angehört, dessen Querschnitt S und dessen Leitungsfähigkeit c ist, der zweite einem Leiter, für den diese

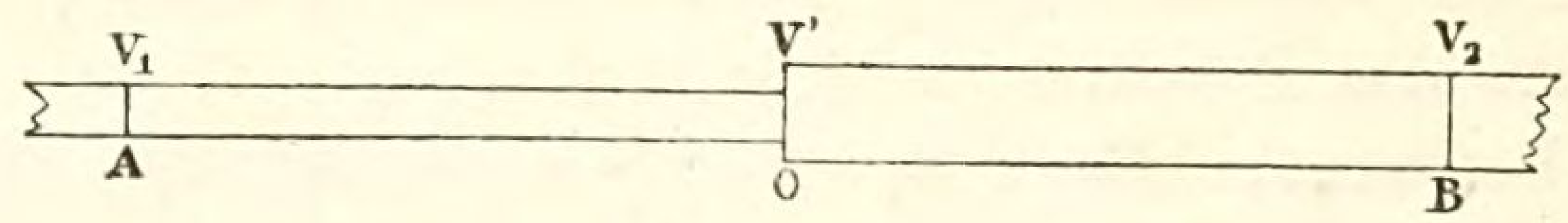


Fig. 50.

Grössen S' und c' sind. Ist V' das Potential im Berührungspunkte O der beiden Cylinder, der die Entfernungen l und l' von A bez. B hat, und lassen wir für einen Augenblick die elektromotorische Contactkraft der beiden Leiter, auf die wir später noch zurückkommen werden, unberücksichtigt, so erhält man zu beiden Seiten des Punktes O

$$i = \frac{V_1 - V'}{\frac{l}{cS}} = \frac{V' - V_2}{\frac{l'}{c'S'}} = \frac{V_1 - V_2}{\frac{l}{cS} + \frac{l'}{c'S'}} = \frac{V_1 - V_2}{r + r'}.$$

Die Stromintensität steht also im umgekehrten Verhältnis der Summe der Widerstände der beiden Leiter zwischen den Punkten A und B. Diese Beziehung gilt augenscheinlich allgemein.

Demnach ist der Widerstand einer Reihe auf einander folgender cylindrischer Leiter gleich der Summe der Widerstände aller Leiter.

Betrachten wir endlich einen Leiter von beliebiger Form, der an seinen Enden von Niveauflächen begrenzt wird, die auf Potentialen V_1 und V_2 gehalten werden, so ist die Stromintensität noch immer der Differenz $V_1 - V_2$ der Potentiale proportional, und die Zahl, durch die man diese Differenz dividiren muss, um die Stromintensität zu erhalten, giebt den Widerstand des Leiters an. Die so erhaltene Zahl ist der Widerstand eines cylindrischen Leiters, der für dieselbe Potentialdifferenz dieselbe Intensität liefern würde.

208. Die Kirchhoff'schen Gesetze. — Nehmen wir an, dass lineare Leiter von verschiedener Natur und Dimension mit einander in beliebiger Weise in Verbindung gebracht sind, so muss die Teilung des Stromes zwischen den verschiedenen Leitern folgenden zwei von Kirchhoff gefundenen Bedingungen genügen, die sich unmittelbar aus dem Ohm'schen Gesetze ergeben:

1. Wenn mehrere Leiter in demselben Punkte endigen, ist im stationären Zustande die Summe der Stromintensitäten, von diesem Punkte aus gerechnet, Null.

Denn, da in dem betrachteten Punkte eine Anhäufung von Elektricität nicht eintreten kann, muss die durch einen Teil der Leiter zugeführte Elektricität gleich der durch die übrigen in derselben Zeit abgeführten sein; versieht man mit dem Zeichen + die Ströme, die nach dem Punkte hin fliessen, mit dem Zeichen — diejenigen, welche sich von demselben entfernen, so muss man erhalten

(3) $$\Sigma i = 0.$$

2. Wenn mehrere Leiter ein geschlossenes Polygon bilden und innerhalb derselben keine elektromotorischen Kräfte thätig sind, ist die Summe der Produkte aus dem Widerstande jedes einzelnen Leiters in die Intensität des Stromes, der denselben durchfliesst, Null.

Denn, nehmen wir eine Reihe von Leitern an mit den Widerständen $r_1, r_2, r_3 \cdots r_n$, welche die auf einander folgenden Seiten eines geschlossenen Polygons (Fig. 51) bilden, sind $V_1, V_2 \cdots V_n$ die Potentiale in den verschiedenen Ecken $A_1, A_2 \cdots A_n$ und endlich $i_1, i_2 \cdots i_n$ die Intensitäten der einander folgenden Ströme, die positiv gerechnet werden, wenn man den

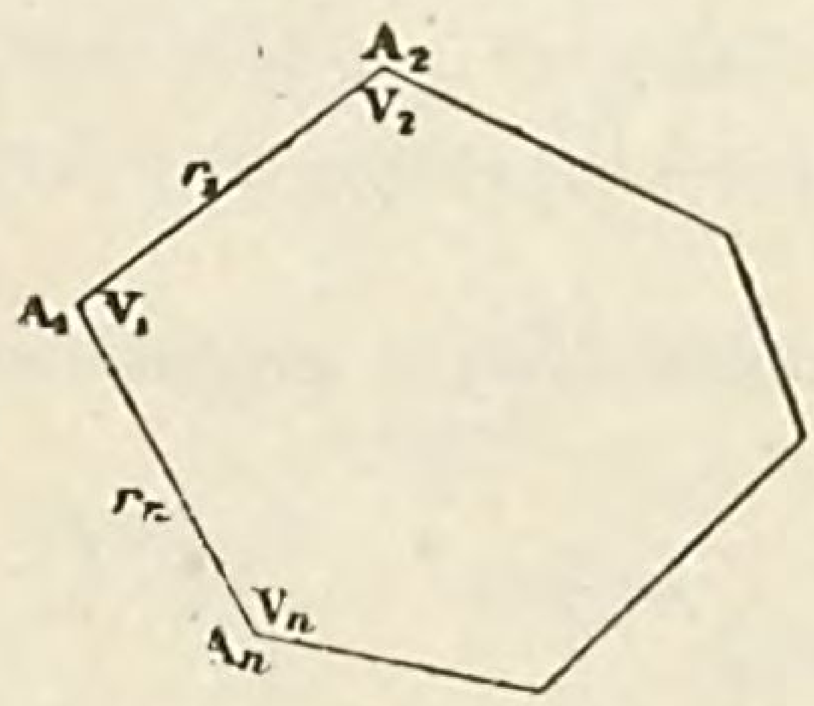


Fig. 51.

Kreis in einem bestimmten Sinne durchläuft, so brauchen diese Intensitäten nicht gleich zu sein, da in den verschiedenen Ecken noch andere Leiter vorhanden sein können, die Ströme ableiten oder zuführen.

Man erhält dann der Reihe nach

für den ersten Leiter $i_1 r_1 = V_1 - V_2$,
" " zweiten " $i_2 r_2 = V_2 - V_3$,
. .
. .
. .
" " nten " $i_n r_n = V_n - V_1$.

Addirt man diese Gleichungen, so verschwinden alle Potentiale, und es bleibt schliesslich

$$i_1 r_1 + i_2 r_2 + \cdots i_n r_n = 0$$

oder

(4) $$\Sigma i r = 0.$$

Die beiden Beziehungen (3) und (4) sind als *„die Kirchhoff'schen Gesetze"* bekannt.

209. Widerstand eines verzweigten Leiters. — Als Anwendung dieser Sätze betrachten wir den Fall, wo der Stromkreis sich in mehrfache Bogen zwischen den beiden Punkten A und B teilt (Fig. 52). Die Intensität des Stromes muss hinter dem Punkte B so gross sein wie vor dem Punkte A; sind $r_1, r_2 \ldots r_n$ die Widerstände der Leiter, $i_1, i_2 \ldots i_n$ die bezüglichen Stromintensitäten, ist schliesslich R der Widerstand, der einem ungeteilten

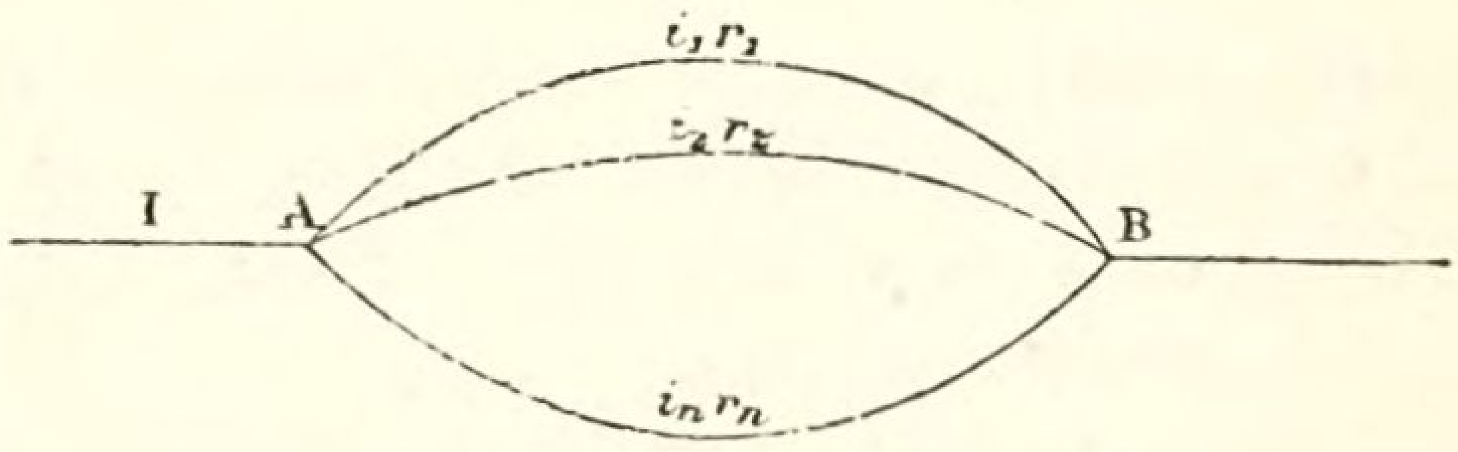


Fig. 52.

Kreise zukäme, der dem verzweigten Kreise zwischen denselben Punkten äquivalent wäre, so erhält man

$$I = i_1 + i_2 + i_3 \cdots + i_n = \Sigma i,$$

$$i_1 r_1 = i_2 r_2 = i_3 r_3 = \cdots = i_n r_n = IR.$$

Die letzteren Gleichungen können geschrieben werden

$$\frac{i_1}{\frac{1}{r_1}} = \frac{i_2}{\frac{1}{r_2}} = \cdots \frac{i_n}{\frac{1}{r_n}} = \frac{I}{\frac{1}{R}},$$

woraus man durch Einsetzen in die erste findet

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots \frac{1}{r_n} = \sum \frac{1}{r}.$$

Demnach ist der reciproke Wert des Widerstandes eines Bündels von Leitern, welche in denselben Punkten endigen, gleich der Summe der reciproken Werte der Widerstände der verschiedenen Leiter für sich genommen, in andern Worten: die Leitungsfähigkeit des Bündels ist gleich der Summe der Leitungsfähigkeiten der verschiedenen Leiter, aus denen es besteht.

210. Heterogene lineare Kreise. — Die Existenz der elektromotorischen Contactkräfte zwischen den Metallen ändert das zweite Kirchhoff'sche Gesetz ein wenig.

Fassen wir zwei Punkte P_1 und P_2 (Fig. 53) in's Auge, die durch zwei

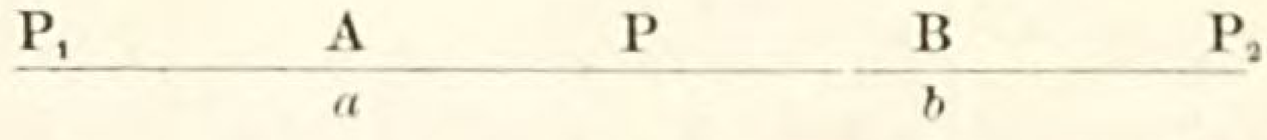


Fig. 53.

verschiedenartige Leiter A und B mit den Widerständen a und b von einander getrennt sind, sind V_1 und V_2 die Potentiale in den Punkten P_1 und P_2, V_a und V_b die Potentiale unmittelbar zu beiden Seiten der Trennungsfläche P der Metalle, so ist die Intensität des Stromes von P_1 bis P_2

$$I = \frac{V_1 - V_a}{a} = \frac{V_b - V_2}{b} = \frac{V_1 - V_2 + V_b - V_a}{a + b}.$$

Bezeichnet man mit H_{ab} die plötzliche Erhöhung, die das Potential zwischen den Metallen A und B erlangt, also die elektromotorische Contactkraft $V_b - V_a = B|A$ der Leiter B und A, so ergiebt sich

$$I = \frac{V_1 - V_2 + H_{ab}}{a + b}.$$

Nehmen wir jetzt an, dass ein geschlossener Kreis aus verschiedenen Leitern $A, B, C \cdots L$ (Fig. 54) besteht, und dass sich unter denselben auch von Volta als Leiter zweiter Klasse bezeichnete Körper befinden, dass also die Leiterkette nicht dem Gesetz der Spannungsreihe unterworfen ist, so wird der Kreis von einem dauernden Strome durchflossen.

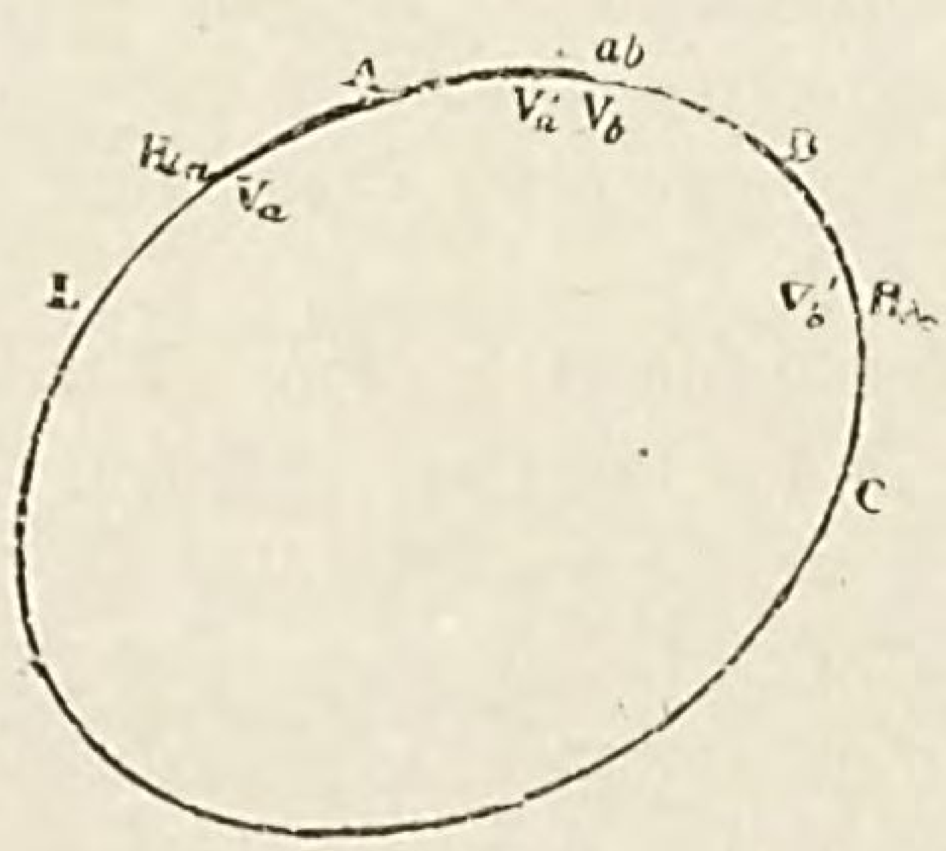


Fig. 54.

Nennen wir $r_a, r_b, r_c \cdots r_l$ die Widerstände der verschiedenen Leiter, V_a und V'_a, V_b und $V'_b \cdots$ die einander folgenden Potentiale an den Enden derselben, in der Stromrichtung gezählt, und drücken wir ebenso durch $H_{ab}, H_{bc} \cdots H_{la}$ die auf einander folgenden elektromotorischen Contactkräfte aus, so erhält man

$$\begin{aligned} H_{ab} &= V_b - V'_a, \\ H_{bc} &= V_c - V'_b, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ H_{la} &= V_a - V'_l. \end{aligned}$$

Da die Stromintensität in der ganzen Ausdehnung des Kreises dieselbe ist, erhält man auch

$$I = \frac{V_a - V'_a}{r_a} = \frac{V_b - V'_b}{r_b} = \cdots = \frac{V_l - V'_l}{r_l},$$

oder, wenn man diese gleichen Brüche durch Addition verbindet,

$$I = \frac{(V_b - V'_a) + (V_c - V'_b) + \cdots + (V_a - V'_l)}{r_a + r_b + r_c + \cdots + r_l} = \frac{H_{ab} + H_{bc} + \cdots + H_{la}}{r_a + r_b + r_c + \cdots + r_l}.$$

Der Zähler dieses Bruches giebt die algebraische Summe ΣH der elektromotorischen Contactkräfte in der Leiterkette an; dies ist die elektromotorische Kraft E des Kreises. Der Nenner ist die Summe der Widerstände oder der Gesammtwiderstand R des Kreises. Man erhält demnach

(5) $$I = \frac{\Sigma H}{R} = \frac{E}{R}.$$

211. Der Kreis enthält elektromotorische Kräfte. — Man kann leicht sehen, was aus den Kirchhoff'schen Gesetzen (**208**) wird, wenn elektromotorische Kräfte vorhanden sind.

Der erste Satz wird dadurch nicht geändert. Die Summe der Elektricitätsmengen, die von einem Punkte, in dem verschiedene Leiter endigen, ausfliessen, ist beim stationären Zustande stets Null; denn dieser Punkt kann weder ein Centrum unbegrenzter Produktion von Elektricität noch ein Centrum der Absorption sein.

Der zweite Satz muss geändert werden. Wir nehmen an, dass in dem oben behandelten Kreise in den Punkten, in denen mehrere Leiter zusammenstossen, auch die Metalle wechseln, dass also diese Orte Punkte sind, von denen die verschiedenartigen Leiter sich abzweigen. Die Intensität des Stromes ist nicht mehr im ganzen Kreise dieselbe; bezeichnen wir mit $i_a, i_b \ldots i_l$ die Intensitäten auf den verschiedenen Leitern zwischen den beiden auf einander folgenden Berührungs- oder Verzweigungspunkten, so erhält man nach dem Ohm'schen Gesetze

$$V_a - V'_a = r_a i_a,$$
$$V_b - V'_b = r_b i_b,$$
$$\cdots\cdots$$
$$V_l - V'_l = r_l i_l,$$

und folglich

$$\begin{aligned} r_a i_a + r_b i_b + \cdots + r_l i_l &= (V_a - V'_a) + (V_b - V'_b) + \cdots + (V_l - V'_l) \\ &= (V_b - V'_a) + (V_c - V'_b) + \cdots + (V_a - V'_l) \\ &= H_{ab} + H_{bc} + \cdots + H_{la} = \Sigma H = E, \end{aligned}$$

oder

(6) $$E = \Sigma ri.$$

Demnach ist in einem geschlossenen Kreise *die Summe der Produkte aus dem Widerstande jedes einzelnen Leiters in die Intensität des bezüglichen Stromes gleich der algebraischen Summe der elektromotorischen Kräfte des Kreises.*

Diese Summe ist Null, wenn der Kreis aus Leitern von derselben Natur oder aus Metallen von derselben Temperatur besteht, da die letzteren dem Gesetze der Spannungsreihe unterworfen sind.

Die beiden Beziehungen (5) und (6) liefern alle Gleichungen, die zur Bestimmung der Intensitäten in den verschiedenen Zweigen des Kreises nötig sind. Jede Aenderung in den Widerständen oder in den elektromotorischen Kräften, die keine Aenderung in den Gleichungen hervorruft, ist augenscheinlich ohne Einfluss auf die Stromintensität. Zum Beispiel:

1. Man kann nach Belieben den Widerstand in einem Zweige, in dem die Intensität einmal Null ist, ändern, ohne deshalb je in ihm einen Strom wach zu rufen.

2. Man kann in alle Leiter, die in demselben Punkte endigen, gleiche elektromotorische Kräfte einführen, die Ströme zu erzeugen suchen, die sämmtlich nach dem betrachteten Punkte hin oder von demselben fort fliessen, da diese elektromotorischen Kräfte sich, je zwei, in allen durch diesen Punkt gehenden geschlossenen Kreisen aufheben.

212. Leiter von beliebiger Form. — Elektroden. — Die Analogie der elektrischen Leitungsfähigkeit mit der Leitungsfähigkeit für Wärme und die der letzteren mit den Erscheinungen der statischen Elektricität setzt uns in den Stand, unmittelbar einige Sätze über die Fortpflanzung der Elektricität aufzustellen.

Wir betrachten zunächst ein einzelnes, isotropes, unbegrenztes Mittel, in welchem ein stationärer Zustand herrscht, nehmen an, dass für die drei erwähnten Arten von Erscheinungen, die Temperatur einerseits und das Potential andererseits auf verschiedenen geschlossenen Flächen S_1, $S_2 \ldots S_n$ constant erhalten werden, und dass auf jeder von diesen Flächen die Temperaturen und die Potentiale t_1 und V_1, t_2 und V_2 durch dieselben oder durch einander proportionale Zahlen dargestellt werden. In der Aufgabe über die Wärme stellen diese Flächen die Wärmequellen dar, in der Aufgabe über die statische Elektricität die Leiter; in der Aufgabe über die Fortpflanzung der Elektricität nennt man dieselben *Elektroden.*

Die Temperatur und das Potential in irgend einem Punkte des Mittels sind Funktionen der Coordinaten, die durch die Bedingung definirt sind, dass dieselben auf den Grenzflächen bestimmte Werte annehmen und in dem Zwischenraume zwischen diesen Flächen der Bedingung genügen

$$\Delta t = 0 \text{ oder } \Delta V = 0.$$

Die Temperatur und das Potential haben demnach in jedem Punkte gleiche oder in constantem Verhältnisse zu einander stehende Werte. Die isothermischen

Flächen und die elektrischen Niveauflächen sind in der ganzen Ausdehnung des Mittels identisch, und folglich sind auch die Stromröhren identisch.

Durch ein Element dS irgend einer Fläche hindurch ist die Wärmeströmung (70) $-kdS\frac{\partial t}{\partial n}$, die elektrostatische Kraftströmung $-dS\frac{\partial V}{\partial n}$ und der elektrische Strom $-cdS\frac{\partial V}{\partial n}$, wo k und c die Coefficienten der Leitungsfähigkeit für Wärme und Elektricität sind. Diese drei Strömungen sind demnach unter einander proportional.

Demnach wird immer, wenn eine Aufgabe über die Fortpflanzung der Wärme oder der statischen Elektricität gelöst ist, die entsprechende Aufgabe über die elektrische Fortpflanzung im stationären Zustande in derselben Weise gelöst sein.

Wir haben insbesondere gesehen, dass, wenn die Potentiale $V_1, V_2 \ldots V_n$ auf den festen Flächen $S_1, S_2 \ldots S_n$ gegeben sind, d. h. die Potentiale verschiedener Leiter in der Luft, das Potential in jedem Punkte des Mittels bestimmt ist, und dass die Aufgabe über das Gleichgewicht nur eine Lösung hat. Ebenso ist, wenn das dielektrische Mittel durch ein leitendes Mittel ersetzt wird, und wenn die Potentiale auf denselben Flächen $S_1, S_2 \ldots S_n$ constant erhalten werden, die Elektricitätsströmung in jedem Punkte bestimmt, und der stationäre Zustand ist ein eindeutiger.

213. — Wir nehmen nunmehr an, dass zwei Dielektrica, deren inductive Capacitäten μ_1 und μ_2 sind, durch eine Fläche S von einander getrennt sind. Die Kraftströmung bleibt dann nicht zu beiden Seiten der Fläche dieselbe, aber die Inductionsströmung bleibt bestehen, und man erhält (121), wenn man die Normale n der Fläche für beide Mittel in derselben Richtung misst,

$$\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial n}.$$

Dies ist die Bedingung für die Continuität auf der Fläche. Ersetzt man die Dielektrica durch Leiter, deren Leitungsfähigkeiten c_1 und c_2 sind, so ist die Elektricitätsströmung zu beiden Seiten der Fläche S dieselbe, woraus sich ergiebt

$$c_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = c_2 \frac{\partial V_2}{\partial n}.$$

Man sieht hiernach, dass, wenn man in einer Aufgabe der Elektrostatik, in der es sich um Dielektrica mit den inductiven Capacitäten $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ handelt, die Dielektrica durch Leiter ersetzt, deren Leitungsfähigkeiten $c_1, c_2 \ldots c_n$ bez. proportional den entsprechenden inductiven Capacitäten sind, so dass also

$$\frac{\mu_1}{c_1} = \frac{\mu_2}{c_2} = \ldots = \frac{\mu_n}{c_n},$$

dass dann die Elektricitätsströmung in jedem Punkte der Inductionsströmung des entsprechenden elektrostatischen Systems proportional ist.

So liefern alle Aufgaben, die in der Elektrostatik für mehrere Dielektrica gelöst sind, auch die Lösung der entsprechenden Aufgaben über die Fortpflanzung der Elektricität. Solches sind zum Beispiel die folgenden Fälle:

Concentrische Kugeln (77).

Concentrische Cylinder (80) oder excentrische Cylinder, von denen der eine innerhalb des andern liegt (136).

Parallele Ebenen (81).

Geschlossene Condensatoren von constanter Dicke (79).

Concentrische auf einander folgende Kugeln, die aus verschiedenen Mitteln bestehen (164).

214. Nicht homogene Leiter. — Wir haben ferner (167) gesehen, dass, wenn man ein Dielektricum mit einem Mittel von der inductiven Capacität μ_2 vergleicht, in welchem kleine Kugeln von der inductiven Capacität μ_1 verstreut sind, das so gebildete Dielektricum sich verhält wie ein homogenes Dielektricum, dessen inductive Capacität μ dargestellt ist durch den Ausdruck

$$\mu = \mu_2 \frac{\mu_1 + 2\mu_2 - 2h(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + 2\mu_2 + h(\mu_2 - \mu_1)},$$

in dem h das Verhältnis der Volumensumme der kleinen Kugeln zum Gesammtvolumen des Raumes, in dem dieselben verstreut sind, bezeichnet.

Unter den analogen Bedingungen wird die mittlere specifische Leitungsfähigkeit eines Mittels von der Leitungsfähigkeit c_2, welches kleine Kugeln von der Leitungsfähigkeit c_1 einschliesst, ausgedrückt durch

$$c = c_2 \frac{c_1 + 2c_2 - 2h(c_2 - c_1)}{c_1 + 2c_2 + h(c_2 - c_1)}.$$

Ist das Verhältnis $\frac{c_1}{c_2}$ der Leitungsfähigkeiten der Kugeln und des umgebenden Mittels sehr gross, so geht die Formel über in

$$c = c_2 \frac{1 + 2h}{1 - h}.$$

Ebenso würde die Aufgabe aus § 150 die Leitungsfähigkeit eines aus drei verschiedenen Mitteln, die durch zwei parallele Ebenen von einander getrennt sind, bestehenden Systems geben.

215. Anisotrope Leiter. — Wir haben bis jetzt nur isotrope Körper, d. h. Körper der Betrachtung unterzogen, die in allen Richtungen dieselben Eigenschaften besitzen. Ist das Mittel anisotrop, aber homogen, wie die krystallischen Körper, dann hängen die physikalischen Erscheinungen von der Richtung ab, in der man sie untersucht.

So kann beispielsweise die Ausdehnung je nach der Richtung, in der man sie am Krystall bestimmt, sehr ungleich sein. Dann sind drei zu einander senkrechte Hauptrichtungen vorhanden, die so beschaffen sind,

dass die Ausdehnung eines unendlich dünnen, parallel zu einer dieser Hauptrichtungen angenommenen Cylinders parallel zur Achse erfolgt. Jede dieser Richtungen ist durch einen besonderen Coefficienten bestimmt, was für das Mittel drei Hauptcoefficienten der Ausdehnung l, l' und l'' ergiebt. Betrachtet man in dem Mittel einen unendlich dünnen Cylinder in einer beliebigen Richtung, die mit den Hauptrichtungen Winkel bildet, deren Cosinus δ, δ', δ'' sind, dann dreht sich der Cylinder zugleich, indem er sich ausdehnt, bleibt aber geradlinig, wenn das Mittel homogen ist. Die Ausdehnung parallel zur Cylinderachse ist gleich der Summe der Projectionen der drei Hauptausdehnungen auf diese Achse, und der Coefficient L in Bezug auf diese Richtung hat den Wert

$$L = l\delta + l'\delta' + l''\delta''.$$

Aehnliche Betrachtungen gelten für die Fortpflanzung der Wärme, für die Fortpflanzung der Elektricität und für die elektrostatische Induction.

In einem anisotropen Mittel ist die Wärmeströmung in einem Punkte nicht mehr normal zur entsprechenden isothermen Fläche; aber wie für die Ausdehnung und allgemein für alle die Erscheinungen, welche lineare Funktionen der Ursachen sind, von denen dieselben abhängen, sind immer noch drei gegen einander orthogonale Richtungen vorhanden, in denen die Wärmeströmung zu den isothermen Flächen normal ist, und denen drei Hauptcoefficienten der Leitungsfähigkeit k, k' und k'' entsprechen.

Durch ein Flächenelement dS hindurch, deren Normale mit den Achsen Winkel bildet, deren Cosinus α, α' und α'' sind, ist die Wärmeströmung gleich der Summe der Strömungen, die den zu den drei Hauptachsen normalen Projectionen αdS, $\alpha' dS$, $\alpha'' dS$ des Elementes entsprechen; man findet demnach, wenn man diese drei Richtungen als Coordinatenachsen wählt,

$$dQ = -dS\left(k\alpha \frac{\partial t}{\partial x} + k'\alpha' \frac{\partial t}{\partial y} + k''\alpha'' \frac{\partial t}{\partial z}\right).$$

Ebenso wird, wenn man mit c, c' und c'' die Coefficienten der elektrischen Leitungsfähigkeit des Mittels nach den Hauptachsen bezeichnet, die Elektricitätsströmung dM durch ein Flächenelement dS hindurch in analoger Weise als Funktion der Potentiale ausgedrückt. Nennt man I_n die Intensität des Stromes für die Flächeneinheit nach der Normale des Elements, so erhält man

$$dM = I_n dS = -dS\left[c\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + c'\alpha' \frac{\partial V}{\partial y} + c''\alpha'' \frac{\partial V}{\partial z}\right],$$

oder

$$I_n = -\left[c\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + c'\alpha' \frac{\partial V}{\partial y} + c''\alpha'' \frac{\partial V}{\partial z}\right].$$

Dieser letztere Ausdruck ist die Summe der Projectionen der drei Stromintensitäten I, I', I'' nach den drei Hauptrichtungen auf die Normale oder die Projection des resultirenden Stromes I_0.

Nennt man θ den Winkel der Normale des Elementes dS mit der Stromrichtung, die mit den Achsen Winkel bildet, deren Cosinus λ, λ', λ'' sind, so erhält man

$$I_n = (\alpha I + \alpha' I' + \alpha'' I'') = (\alpha\lambda + \alpha'\lambda' + \alpha''\lambda'')\, I_0 = I_0 \cos\theta,$$

und

$$\frac{\lambda}{c\dfrac{\partial V}{\partial x}} = \frac{\lambda'}{c'\dfrac{\partial V}{\partial y}} = \frac{\lambda''}{c''\dfrac{\partial V}{\partial z}}.$$

216. — Wir können jetzt ohne Schwierigkeit dieselbe Betrachtungsweise auf die Inductionserscheinungen in den anisotropen Dielektrica ausdehnen. Auch dort sind drei solche durch die specifischen inductiven Capacitäten μ, μ' und μ'' zu charakterisirende Hauptinductionsrichtungen vorhanden, dass die Kraftströmung zu den Niveauflächen normal ist. Die Inductionsströmung durch ein Flächenelement dS hindurch ist, wenn man φ die Strömung für die Flächeneinheit nennt,

$$\varphi dS = -\,dS\left[\mu\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \mu'\alpha'\frac{\partial V}{\partial y} + \mu''\alpha''\frac{\partial V}{\partial z}\right].$$

Bezeichnet man mit β, β' und β'' die Cosinus der Winkel der elektrischen Kraft F in dem betrachteten Punkte, die nicht normal zur Niveaufläche ist, mit den Achsen, so kann man setzen

$$\varphi = (\mu\alpha\beta + \mu'\alpha'\beta' + \mu''\alpha''\beta'')\, F.$$

In diesem Falle ist die elektrische Verschiebung nicht mehr parallel zur elektrischen Kraft.

217. Leiter von zwei Dimensionen. — Die letzten Auseinandersetzungen gelten für unbegrenzte Mittel. Augenscheinlich ändert sich aber nichts, wenn man das leitende Mittel durch eine ganz aus Stromlinien des unbegrenzten Mittels bestehende Fläche begrenzt. Für einen begrenzten Leiter, der in einem isolirenden Mittel liegt, ist die äussere Oberfläche, wie dieselbe auch gestaltet sein mag, stets den Stromlinien parallel und folglich, wenn das Mittel isotrop ist, zu den Niveauflächen normal.

Dies ist bei der Fortpflanzung der Elektricität in einer dünnen Platte der Fall, die man als einen Leiter von zwei Dimensionen auffassen kann. Man kann experimentell den Ort der Punkte bestimmen, die dasselbe Potential besitzen, durch die Bedingung nämlich, dass kein Strom in einem leitenden Drahte entsteht, wenn ein Ende desselben mit einem festen Punkte der Platte verbunden wird, während das andere in der Ebene verschoben wird.

Die so durch den Versuch erhaltenen Resultate stehen mit den aus den Fourier'schen Formeln abgeleiteten in vollkommenem Einklang und geben einen weiteren Beweis für die Analogie der Wärmeströmung mit der Elektricitätsströmung.

Beide Strömungen lassen sich bestimmen, ob durch die Fläche der Platte ein Verlust an das umgebende Mittel erfolgt oder nicht.

Findet keine Abgabe von Elektricität an das umgebende Mittel statt, so reducirt sich die Poisson'sche Gleichung für alle ausserhalb der Elektroden gewählten Punkte auf

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0,$$

und für jeden Punkt des Plattenrandes erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial n}=0.$$

Man sieht leicht, dass diese Aufgabe mit der über das Gleichgewicht im Falle cylindrischer Verteilung (**132** sqq.) zusammenfällt. Wir haben gesehen, dass dann in einer Ebene, die in den Punkten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ von parallelen zu den Dichten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ elektrisirten Linien normal geschnitten wird, das Potential in einem Punkte P, welcher in den Abständen $r_1, r_2, r_3 \ldots$ von diesen Linien liegt, den Wert hat

$$V = \text{Const} - 2\Sigma\lambda l_n r.$$

Die Kraftströmungen, die in einer zwischen zwei parallelen Ebenen eingeschlossenen Schicht von der Dicke ε von den verschiedenen Linien ausgehen, sind

$$\varphi_1 = 4\pi\lambda_1\varepsilon,$$
$$\varphi_2 = 4\pi\lambda_2\varepsilon.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Fasst man in der Aufgabe über die Fortpflanzung dieselben Linienteile als Elektricitätsquellen, als *Elektroden* auf, so sind die Elektricitätsströmungen oder die Stromintensitäten

$$I_1 = c\varphi_1 = 4\pi c\lambda_1\varepsilon,$$
$$I_2 = c\varphi_2 = 4\pi c\lambda_2\varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

hieraus folgt, dass

$$\lambda_1 = \frac{I_1}{4\pi c\varepsilon},$$

$$\lambda_2 = \frac{I_2}{4\pi c\varepsilon},$$

$$\ldots\ldots$$

zu setzen ist, wodurch der Ausdruck für das Potential in P wird

$$V = \text{Const} - \sum \frac{I l_n r}{2\pi c \varepsilon} = \text{Const} - \frac{1}{2\pi c \varepsilon}[I_1 \, l_n r_1 + I_2 \, l_n r_2 + \cdots],$$

und dies ist das Potential in einer unendlich ausgedehnten Scheibe von der Dicke ε, in welche Elektricität aus den Mantelflächen sehr dünner Elektroden, die sie normal durchsetzen, einströmt, falls dieselbe zu beiden Seiten von einem nicht leitenden Mittel begrenzt ist.

Ein besonders interessanter Fall ist der zweier Elektroden A_1 und A_2, die entgegengesetzt gleiche Strömungen liefern. In diesem Falle strömt die Elektricität durch die eine Elektrode in die Scheibe ein und durch die andere wieder heraus, und es ist

$$I_1 + I_2 = 0$$

und

$$V = \text{Const} - \frac{1}{2\pi c \varepsilon} \, l_n \frac{r_1}{r_2}.$$

Die Stromlinien sind Kreisbögen, die durch die beiden Elektrodenpunkte A_1 und A_2 (Fig. 30) gehen; die Niveaulinien sind Kreise, die ihre Mittelpunkte auf der Linie $A_1 A_2$ haben, wobei diese beiden Punkte für jeden derselben conjugirte sind. Nach der obigen Bemerkung ist klar, dass die Aufgabe dieselbe bleibt, wenn man statt einer unbegrenzten Platte eine kreisförmige Platte in Betracht zieht, auf deren Peripherie sich die beiden Elektroden befinden, oder auch irgend eine Platte, die zwischen zwei durch die Punkte A_1 und A_2 gehende Kreisbögen gefasst ist.

218. Widerstand eines Leiters von beliebiger Form. — Welches auch der betrachtete Leiter sein möge, kann man ihn stets durch zwei Reihen von den Stromlinien parallelen Flächen in unendlich dünne Röhren geteilt denken, von denen jede eine Stromröhre ist. Jede dieser Röhren kann für sich genommen mit einem Leitungsdraht von veränderlichem Querschnitt verglichen werden, dessen Widerstand in jedem Punkte im umgekehrten Verhältnisse des Querschnittes steht. Der Gesammtwiderstand ergiebt sich aus dem Widerstande der Gesammtheit der Röhren nach den gewöhnlichen Gesetzen der Zweigströme: der reciproke Wert des Gesammtwiderstandes oder die Leitungsfähigkeit ist die Summe der reciproken Werte der Widerstände aller einzelnen Röhren.

Die Rechnung ist im Allgemeinen sehr complicirt; aber wenn man den Wert des Potentials auf den beiden Elektroden und die entsprechende Elektricitätsströmung durch Experiment kennt, dann ist es leicht, den Gesammtwiderstand des leitenden Mittels nach der Ohmschen Formel (**207**) zu bestimmen.

Wir wählen als Beispiel den Fall zweier Elektroden A_1 und A_2 in einem unbegrenzten Mittel; wir wollen voraussetzen, dass diese Elektroden kleine

Kugeln vom Radius ρ sind. V_1 und V_2 seien ihre Potentiale und I der absolute Wert der jeder derselben entsprechenden Elektricitätsströmung. Darf der Radius ρ gegen die Entfernung A_1A_2 vernachlässigt werden, so kann man annehmen, dass das Potential in der Nähe jeder Elektrode im umgekehrten Verhältnisse zur Entfernung r von dieser Elektrode steht und dargestellt wird durch $\frac{b}{r}$, woraus sich für die Kugeln selbst ergiebt

$$V_1 = - V_2 = \frac{b}{\rho}.$$

Die Stromintensität ist dann

$$I = c\int F_n dS = - 4\pi\rho^2 c \frac{dV}{dn}.$$

Da auf der Oberfläche der Kugel ist

$$\frac{dV}{dn} = - \frac{b}{r^2} = - \frac{b}{\rho^2},$$

so ergiebt sich

$$I = 4\pi cb = 4\pi c V_1 \rho = - 4\pi c V_2 \rho,$$

oder

$$I = 2\pi c\rho(V_1 - V_2).$$

Hiernach wird der Gesammtwiderstand des Mittels ausgedrückt durch

$$R = \frac{1}{2\pi c\rho}.$$

Dieselbe Schlussweise gilt für den Fall eines Mittels, welches auf der einen Seite unbegrenzt ist, auf der andern Seite durch eine Ebene begrenzt wird, auf der sich zwei halbkugelförmige Elektroden A_1 und A_2 befinden. Der Widerstand ist dann doppelt so gross wie im vorigen Falle, und man erhält

$$R = \frac{1}{\pi c\rho}.$$

Es ist wohl zu beachten, dass der Widerstand von der Entfernung der beiden Elektroden unabhängig ist und nur von deren Dimensionen und von der Leitungsfähigkeit des Mittels abhängt. Dieser Fall kann als entsprechend dem aufgefasst werden, wenn zwei Punkte der Erde mit Elektroden in Verbindung stehen, die auf dem absoluten Werte nach gleichen, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehenen Potentialen gehalten werden.

219. Verteilung der Elektricität auf linearen Leitern. — Sobald der Zustand stationär ist, rührt das Potential, da die Dichte im Innern des Leiters (**203**) Null ist, lediglich von der auf der Oberfläche vorhandenen Elektricität her; diese elektrische Schicht ist nach einem Gesetze verteilt, welches man in einigen einfachen Fällen bestimmen kann.

Wir fassen einen geradlinigen cylindrischen Draht von einem Durchmesser, der gegen seine Länge sehr klein ist, ins Auge, der sich seiner ganzen Länge nach in den nämlichen Verhältnissen gegen die benachbarten Leiter befindet. Wäre dieser Draht elektrisch und im Gleichgewichte, so wäre die Verteilung der Oberflächenschicht eine gleichmässige, d. h. eine solche, dass jeder zwischen zwei zur Achse senkrechten um die Längeneinheit von einander abstehenden Ebenen enthaltene Teil der Oberfläche die gleiche Elektricitätsmenge enthielte; λ sei diese Menge, die man die lineare Dichte des Drahtes nennen kann.

Das Potential V des Drahtes ist aber der Gesammtladung proportional, folglich auch der Ladung der Längeneinheit. Man erhält demnach

$$V = A\lambda,$$

wo A eine Constante ist, die vom Querschnitt des Drahtes und von der Lage der äusseren Leiter abhängt.

Aendert sich die Ladung des Drahtes von Punkt zu Punkt in der Längsrichtung, so ist die lineare Dichte in einem Punkt die Grenze des Verhältnisses der Ladung zu der entsprechenden Länge.

Wenn Gleichgewicht nicht besteht, so kann man nicht streng sagen, dass das Potential in jedem Punkte der Dichte proportional ist. Aber diese Proportionalität besteht insbesondere für Kabel, bei denen der Leitungsdraht von einer dielektrischen Schicht von constanter Dicke umgeben ist, die ihrerseits von einem mit der Erde in leitender Verbindung stehenden Leiter eingehüllt wird. Die verschiedenen Teile des Drahtes bleiben dann ohne merkliche Wirkung auf einander, und das Potential in jedem Punkte rührt nur von den nächsten elektrischen Massen her. Nennt man γ die Capacität der Längeneinheit des Drahtes, d. h. die Ladung, die einem der Einheit gleichen Potentiale entsprechen würde, so ist die Ladung einer Länge dx vom Potentiale V gleich $\gamma V dx$.

220. Fortpflanzung in einem Drahte mit Verlust an der Oberfläche. — Wir betrachten wiederum einen cylindrischen Draht, der von einem Strom durchflossen wird, und nehmen an, dass der stationäre Zustand bereits eingetreten ist, aber mit Elektricitätsverlust durch die Oberfläche. Die Strömung

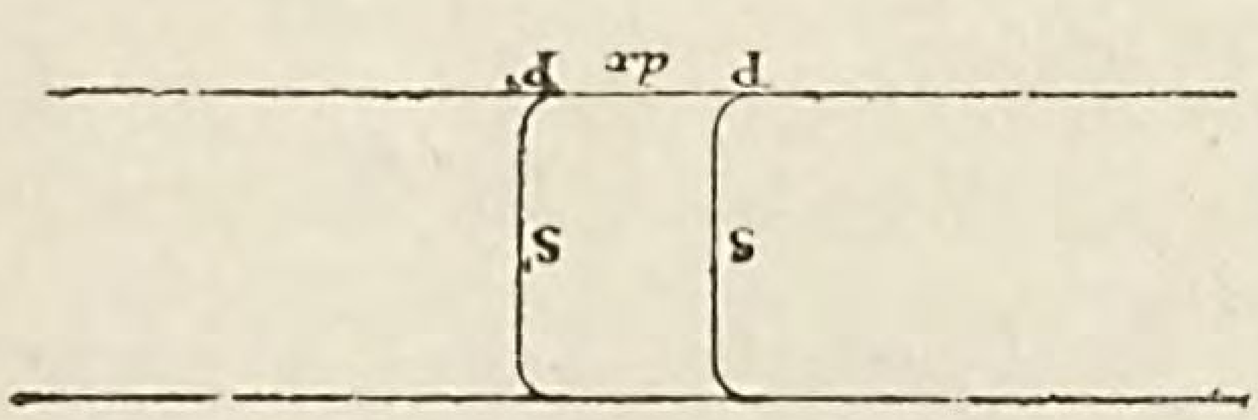


Fig. 55.

ist nicht in der ganzen Ausdehnung eines Normalschnittes der Achse parallel; dieselbe sucht vielmehr in unmittelbarer Nähe der äusseren Oberfläche zum Drahte senkrecht zu werden. Die Niveauflächen S, S' (Fig. 55) sind noch

zum grössten Teile eben, aber sie sind an den Rändern eingebogen und laufen schliesslich mit der äusseren Oberfläche des Drahtes zusammen.

Der durch die Oberfläche stattfindende Verlust ist nichts anderes als eine Elektricitätsströmung in das äussere Mittel; dieselbe ist demnach der elektrischen Kraftströmung proportional (201). Für eine Drahtlänge dx ist die Ladung $\gamma V dx$ und die elektrostatische Kraftströmung $4\pi\gamma V dx$. Nennt man c' den Coefficienten der Leitungsfähigkeit des umgebenden Mittels, dann ist demnach die Intensität des seitlichen Stromes $c' 4\pi\gamma V dx$. Da diese Intensität auch gleich ist dem Quotienten des Potentials durch den Widerstand des Mittels von der betrachteten Seitenfläche bis zu den Punkten, wo das Potential Null ist, ist der Widerstand für den die Länge dx des Drahtes umgebenden Teil des Mittels gleich $\frac{1}{4\pi c'\gamma dx}$, und der Widerstand ρ' für die Längeneinheit ist gleich $\frac{1}{4\pi c'\gamma}$.

Ist der stationäre Zustand hergestellt, dann muss die gesammte Elektricitätsströmung, die durch den Querschnitt S des Volumenelementes von der Länge dx hindurchgeht, gleich sein der Summe der Strömungen, die durch den gegenüberliegenden Querschnitt S' und durch die Seitenfläche austreten, woraus sich ergiebt

$$-cS\frac{dV}{dx} = -cS\left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}dx\right) + \frac{1}{\rho'}V dx$$

oder

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{cS\rho'}V.$$

Das Produkt cS stellt den reciproken Wert des Widerstandes ρ des Drahtes für die Längeneinheit dar; setzt man $\beta^2 = \frac{1}{cS\rho'} = \frac{\rho}{\rho'}$, so ergiebt sich

(7) $$\frac{d^2V}{dx^2} - \beta^2 V = 0.$$

Dies entspricht der Fourier'schen Gleichung für die Fortpflanzung der Wärme in einem cylindrischen Stabe. Das Integral dieser Gleichung kann auf die Form gebracht werden

$$V = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}.$$

Zur Bestimmung der Constanten A und B genügt die Kenntnis der Potentiale V_0 und V_1 in zwei Punkten P_0 und P_1, die in einer bestimmten Entfernung l von einander liegen. Für A und B bestehen dann die Bedingungen

$$A + B = V_0,$$
$$Ae^{\beta l} + Be^{-\beta l} = V_1,$$

und das Potential in einem Punkte P, der in der Entfernung x von P_0 und $l-x$ oder y von P_1 liegt, hat demnach den Betrag

$$(8) \qquad V = V_0 \frac{e^{\beta y} - e^{-\beta y}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} + V_1 \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}.$$

Liegt der Punkt P_1 an der Erde, so ist $V_1 = 0$, und es ergiebt sich

$$(9) \qquad V = V_0 \frac{e^{\beta y} - e^{-\beta y}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}.$$

Ist der Draht unendlich, so ist die Constante A Null, da im Unendlichen $V=0$ werden muss, und man erhält

$$V = V_0 e^{-\beta x}.$$

221. — Die Stromintensität in dem Drahte wird ausgedrückt durch

$$(10) \qquad I = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\rho\rho'}} \frac{V_0(e^{\beta y} + e^{-\beta y}) - V_1(e^{\beta x} + e^{-\beta x})}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}};$$

dieselbe wird, wenn der Punkt P_1 mit der Erde in Verbindung steht,

$$(11) \qquad I = \frac{V_0}{\sqrt{\rho\rho'}} \cdot \frac{e^{\beta y} + e^{-\beta y}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}},$$

und wenn der Draht unendlich ist,

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{\rho\rho'}} e^{-\beta x} = I_0 e^{-\beta x},$$

wenn man I_0 die Intensität am Anfange des Drahtes nennt.

222. Widerstand eines Leiters im Falle eines seitlichen Verlustes. — Nach Gleichung (11) hat der gesammte, dem elektrischen Strome vom Punkte P_0 bis zur Erde sich entgegenstellende Widerstand, wenn man die Verluste berücksichtigt, den Wert

$$R = \sqrt{\rho\rho'} \frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{e^{\beta y} + e^{-\beta y}}.$$

Wir betrachten als allgemeinere Aufgabe einen Draht, dessen verschiedene Punkte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ mit der Erde durch Leiter vom Widerstande $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots$ verbunden sind, nennen R_1 den gesammten Widerstand vom Punkte P_1 bis zur Erde, R_2 den Widerstand vom Punkte P_2 ab ..., endlich $r_1, r_2, r_3 \ldots$ die Widerstände der Drahtstücke $P_1P_2, P_2P_3 \ldots$ zwischen den einander folgenden Contactstellen. Dann ist die gesammte Leitungsfähigkeit vom Punkte P_1 ab gleich der Summe der Leitungsfähigkeiten der verschiedenen Wege, woraus man die Gleichung erhält

$$(12) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{r_1 + R_2}.$$

Man erhält eine Reihe von analogen Gleichungen

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{r_2 + R^3}$$

.

und schliesslich

$$(13) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\rho_1} + \cfrac{1}{r_2 + \cfrac{1}{\rho_1 + \cdots}} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\rho_n} + \cfrac{1}{r_n + R_{n+1}}}$$

Dies ist der Fall der telegraphischen Luftleitungen, wenn man die Ableitungen durch die Stangen in Rechnung ziehen will. Findet die Ableitung continuirlich durch die ganze Länge des Drahtes statt, ist R der Widerstand vom Punkte P ab, $R - dR$ der Widerstand von dem um dx entfernten Punkte P' ab und behalten die Coefficienten ρ und ρ' dieselbe Bedeutung wie oben, so geht die Gleichung über in

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{\rho'}{dx}} + \frac{1}{\rho dx + R - dR},$$

oder

$$-\frac{dR}{R^2 - \rho\rho'} = \frac{dx}{\rho'}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$(14) \qquad \frac{R - \sqrt{\rho\rho'}}{R + \sqrt{\rho\rho'}} = \frac{1}{C} e^{-2\beta x}.$$

Die Constante C wird durch die Grenzbedingungen bestimmt. Ist der Widerstand im äusseren Mittel von dem Ende P_1 des Drahtes ab gleich R_1, so erhält man, indem man $x = l$ setzt,

$$C = \frac{R_1 + \sqrt{\rho\rho'}}{R_1 - \sqrt{\rho\rho'}} e^{-2\beta l}.$$

2. Capitel.

Veränderlicher Zustand.

223. Anwendung der Fourier'schen Formeln. — Die Aufgabe über die Fortpflanzung der Elektricität in einem Leiter, so lange der stationäre Zustand noch nicht erreicht ist, beispielsweise in dem Falle der Entladung einer Batterie durch einen Draht, bietet grosse Schwierigkeiten.

Die in ein Volumenelement eintretende Elektricitätsströmung ist nicht Null, da die Ladung mit der Zeit veränderlich ist, aber man kann nicht a priori sagen, ob die innere Dichte variabel ist, oder vielmehr Null bleibt und der Zuwachs der Ladung nur auf der Oberfläche erfolgt.

Bei dem Fehlen ausreichender experimenteller Daten ist der zunächst liegende Gedanke der, die Analogie zwischen der Fortpflanzung der Wärme und der der Elektricität weiter zu verfolgen und die Anwendung der Fourier'schen Formeln auf den veränderlichen Zustand der Leiter zu versuchen. Hiermit nimmt man implicite an, dass die Elektricitätsströmung in jedem Punkte der elektrischen Kraft in diesem Punkte oder der Ableitung des Potentials aller wirksamen Massen proportional ist. Diese Voraussetzung erscheint ziemlich natürlich, wenn es wahr ist, dass die elektrischen Kräfte in der That in die Entfernung, und zwar augenblicklich wirken, wie man sich gern die allgemeine Attraction vorstellt; wenn sich dagegen die elektrischen Wirkungen unter Mitwirkung des umgebenden Mittels vermöge dessen, was wir *elektrische Elasticität* genannt haben, übertragen, dann muss man annehmen, dass der elektrische Spannungszustand (**99**, **126**) sich allmälig herstellt. Eine physikalische Wirkung dieser Art erfordert notwendig eine endliche Zeit, so kurz dieselbe auch sein mag. Diese Frage nach der Dauer, die in allen Aufgaben über das Gleichgewicht oder über den stationären Zustand keine Bedeutung hat, kann in den Erscheinungen des veränderlichen Zustandes eine hervorragende Bedeutung besitzen.

In andern Worten: man kann wohl annehmen, dass die elektrische Kraft sich mit einer ausserordentlich grossen Geschwindigkeit verbreitet, nicht aber mit einer unendlichen, oder auch, dass das Potential einer elektrischen Masse sich mit einer endlichen Geschwindigkeit verbreitet.

In diesem Falle ist es immer noch möglich, dass die Elektricitätsströmung in jedem Punkte der wirksamen elektrischen Kraft proportional ist,

aber diese Kraft hängt nicht mehr bloss von der Lage der wirksamen Massen ab, dieselbe ist auch von der Geschwindigkeit dieser Massen abhängig, und die Wirkungen können sehr verschieden sein, je nachdem die Geschwindigkeit der Verschiebung der wirksamen Massen von derselben Grössenordnung sind wie die Verbreitungsgeschwindigkeit des Potentials oder nicht.

Endlich werden wir bei Gelegenheit der elektrodynamischen Induktionserscheinungen sehen, dass Verschiebungen elektrischer Ströme und Intensitätsänderungen derselben neue elektromotorische Kräfte hervorrufen, die man in gewissen Fällen berechnen kann, und die die auf den veränderlichen Zustand bezüglichen Resultate wesentlich ändern können.

Die beiden eben angedeuteten Wirkungen sind vielleicht durch dieselbe Ursache hervorgerufen; wir werden für den Augenblick von denselben absehen.

Nach diesen Einschränkungen können wir jetzt die Fourier'schen Formeln anwenden. Immerhin müssen die Resultate, zu denen dieselben führen, um so mehr der Wahrheit nahe kommen, je langsamer die Aenderungen des veränderlichen Zustandes sind; in Wirklichkeit stellen diese Resultate in sehr angenäherter Weise die Fortpflanzung der Elektricität in den submarinen Kabeln dar und gelten mit voller Genauigkeit für die Versuche von Gaugain für die Fortpflanzung in Mitteln von grossem Widerstande wie Baumwollenfäden oder Oelsäulen.

224. Veränderlicher Zustand in einem cylindrischen Leiter. — Wir betrachten demnach in einem cylindrischen Leiter das Volumenelement von der Länge dx, welches zwischen den beiden unendlich nahen Querschnitten S und S' (Fig. 55) enthalten ist. Das Potential in einem Punkte P ist nicht mehr eine einfache Funktion von x, d. h. der Lage dieses Punktes, sondern ausserdem eine Funktion der Zeit t. Während der Zeit dt ist der Gewinn an Elektricität in diesem Volumenelemente gleich dem Ueberschusse der durch die Fläche S eintretenden über die durch S' austretende Strömung und über den Verlust durch die äussere Oberfläche, d. h. gleich

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx\,dt - \frac{1}{\rho'}V dx\,dt = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho'}V\right]dx\,dt.$$

Der Ladungszuwachs $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho'}V\right)dt$ für die Längeneinheit verursacht eine Potentialänderung dV oder $\frac{\partial V}{\partial t}dt$; man erhält demnach, wenn man annimmt, dass das Verhältnis der Ladung zum Potential wie in den Erscheinungen der statischen Elektricität oder des stationären Zustandes gleich der Capacität bleibt, d. h. dass die neue Ladung sich in ihrer Gesammtheit auf die Oberfläche begiebt,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho'}V = \gamma\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Setzt man $\alpha^2 = \gamma\rho$, so geht die Gleichung über in

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial t} - \beta^2 V = 0.$$

Kann man den Verlust durch die Oberfläche ausser Rechnung lassen, so ist der Coefficient $\beta^2 = 0$, und es bleibt

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Wir bemerken übrigens, dass man, wenn der Verlust nicht Null ist, setzen kann

$$V = U e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2} t} = U e^{-\frac{t}{\gamma\rho'}};$$

dann nimmt die Gleichung (1) die Form der Gleichung (2) an und geht über in

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

In beiden Fällen ist das Potential V eine Funktion von x und t, die mit wachsender Zeit eine blosse Funktion von x zu werden strebt.

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist von Fourier in mehreren Formen gegeben.

Betrachtet man einen Draht von der Länge l, der sich ursprünglich im neutralen Zustande befindet, von dem das eine Ende mit der Erde in Verbindung steht, und dessen anderes Ende plötzlich auf das Potential V_0 gebracht ist und nachher auf diesem elektrischen Niveau gehalten wird, so ist der allgemeine Wert des Potentials in der Entfernung x vom Anfange des Drahtes und zur Zeit t, von der Zeit der Herstellung des Contactes ab gezählt, gegeben durch den Ausdruck

$$(3) \qquad \frac{V}{V_0} = \frac{e^{\beta(l-x)} - e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} - 2\pi e^{-\frac{t}{\gamma\rho'}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{n^2\pi^2 + \beta^2 l^2} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

welcher, wenn der Verlust vernachlässigt werden kann, übergeht in

$$(4) \qquad \frac{V}{V^0} = \frac{l-x}{l} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n\pi} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

225. Dauer der relativen Fortpflanzung. — Die zweite Gleichung zeigt, dass, wenn kein seitlicher Verlust eintritt, das Verhältnis des Potentials in der Entfernung x zum Potential im Ursprunge für zwei verschiedene Drähte dasselbe ist in zwei Punkten, deren Entfernungen vom Ursprunge den Gesammtlängen der Drähte proportional sind, wenn das Verhältnis $\frac{t}{\alpha^2 l^2}$ für beide Drähte denselben Wert hat.

Die Zeit t, die nötig ist, damit das Potential in irgend einem Punkte, in der Mitte des Drahtes zum Beispiel, einem bestimmten Bruchteil seines Anfangs- oder Endwertes gleich werde, ist demnach $\alpha^2 l^2$ oder $\gamma \rho l^2$, d. h. dem Quadrate der Drahtlänge, der Capacität und dem Widerstande der Längeneinheit, proportional. Diese Bedingung liefert das, was man die *Dauer der relativen Fortpflanzung* der Elektricität nennen kann.

Für die Fortpflanzung der elektrischen Erscheinungen existirt demnach unter den eben angegebenen Bedingungen keine bestimmte Geschwindigkeit wie etwa für den Schall oder das Licht. Die scheinbare Geschwindigkeit, die man manchmal unter der Annahme gleichförmiger Fortpflanzung durch Messung der Zeit, die nötig ist, damit die am Anfange eines Drahtes erzeugte Elektricität in einer bestimmten Entfernung eine merkliche Wirkung hervorbringt, zu bestimmen versucht hat, hängt von charakteristischen Constanten des Drahtes und von der Empfindlichkeit der Organe ab, mittels deren man diese elektrischen Wirkungen sichtbar machte.

226. Unendlicher Draht. — Das allgemeine Fouriersche Integral lässt nur schwer numerische Anwendungen zu, aber man kann einfachere Bedingungen wählen, die mehreren thatsächlich beobachteten Erscheinungen entsprechen, und die uns die wichtigsten von W. Thomson erhaltenen Resultate wiedererkennen lassen.

Wir fassen einen isolirten Draht ins Auge, dessen Oberflächenverlust vernachlässigt werden kann, der sich Anfangs im neutralen Zustande befindet und eine unendliche oder wenigstens eine solche Länge hat, dass der Zustand in einem Punkte nicht merklich durch den des entfernteren Endes beeinflusst wird. Man stellt am Anfange des Drahtes das Potential V_0 her. Am Ende der Zeit t ist das Potential in der Entfernung x bestimmt durch die Gleichung

(2) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Für einen zweiten unter denselben Bedingungen wie der erste angeordneten Draht, dessen Natur durch einen andern Coefficienten α' bestimmt ist, erhält man ebenso

(5) $$\frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} - \alpha'^2 \frac{\partial V'}{\partial t'} = 0.$$

Setzen wir $x' = mx$, $t' = nt$, wo m und n Constanten sind, so können wir das Potential V' als Funktion der Variabeln x und t auffassen, und die Gleichung (5) geht über in

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} = \frac{\alpha'^2 m^2}{n} \frac{\partial V'}{\partial t}.$$

Wählt man die Coefficienten m und n so, dass

$$\alpha^2 = \frac{\alpha'^2 m^2}{n}$$

ist, d. h.

$$\frac{\alpha^2 x^2}{t} = \frac{\alpha'^2 x'^2}{t'},$$

dann befriedigen die Potentiale V und V' dieselbe Differentialgleichung (2) und dieselben Grenzbedingungen; sie stellen also dieselbe Funktion von x und t dar.

227. — So ändert sich für unendlich lange Drähte, was in der Praxis so langen Drähten gleichkommt, dass die Fortpflanzungsdauer einen merklichen Wert erhält, das Potential nicht, wenn das Verhältnis $\frac{\alpha^2 x^2}{t}$ denselben Wert behält; dasselbe ist demnach eine Funktion dieses Verhältnisses.

Hieraus ergiebt sich bereits die oben (**226**) aufgestellte Folgerung, dass die Zeit, die nötig ist, um in der Entfernung x ein bestimmtes Potential oder genauer einen bestimmten Bruchteil des im Ursprunge herrschenden Potentials hervorzurufen, dem Quadrat der Entfernung und dem für den Draht charakteristischen Coefficienten α^2 proportional ist.

Unter diesen Umständen enthält die Gleichung (2) thatsächlich nur eine unabhängige Variable, und wenn man setzt

$$\frac{\alpha^2 x^2}{4t} = z^2,$$

geht dieselbe über in

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + 2z \frac{dV}{dz} = 0;$$

hieraus findet man leicht

$$V = A \int_0^z e^{-z^2} dz + B.$$

Die Constanten A und B werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Für $z = 0$, d. h. $x = 0$ oder $t = \infty$, ist $V = V_0$; für $z = \infty$, d. h. $x = \infty$ oder $t = 0$, erhält man $V = 0$.

Es folgt dann

$$\frac{V}{V_0} = 1 - \frac{\int_0^z e^{-z^2} dz}{\int_0^\infty e^{-z^2} dz}.$$

Das in dieser Formel enthaltene Integral kann zwar nicht in geschlossener Form dargestellt werden, aber es kommt in einer grossen Anzahl von Aufgaben vor, beispielsweise in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und man hat für dasselbe Tabellen berechnet, so dass es in seinen Zahlenwerten wohl bekannt ist.

Zwischen den Grenzen 0 und ∞ insbesondere ist es gleich $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, woraus sich ergiebt

(6) $$\frac{V}{V_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz.$$

Die Curve A (Fig. 56) stellt die Werte des Verhältnisses der Potentiale

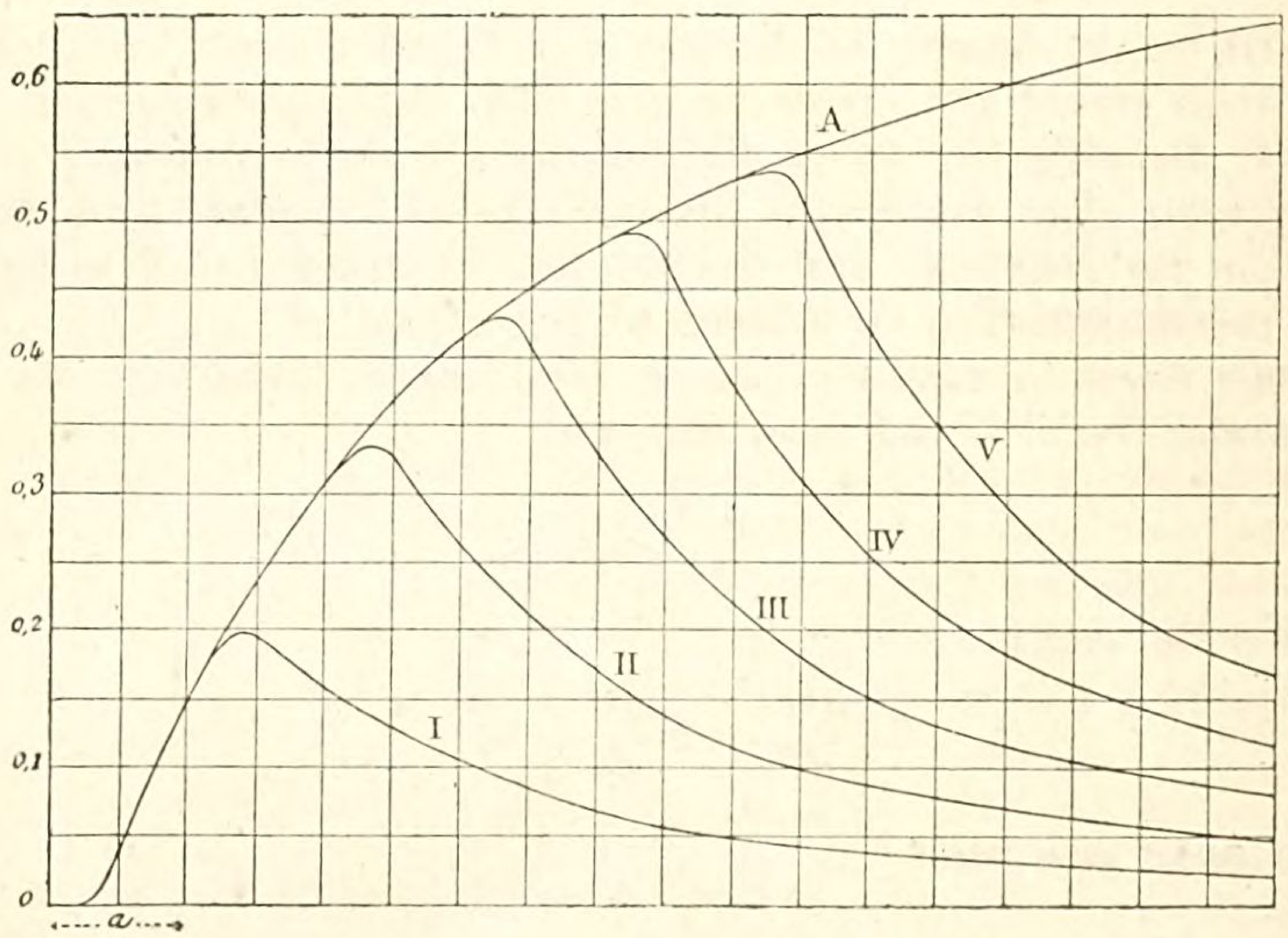


Fig. 56.

$\frac{V}{V_0}$ als Funktion von t dar, wenn man $a = \frac{\alpha^2 x^2}{4} = z^2 t$ wählt. Die Ordinate bleibt zunächst eine Zeit lang unmerklich in der Nähe des Ursprunges und fängt erst von dem Momente an einen merklichen Wert anzunehmen, wo man hat $t = \frac{a}{4}$. Die Curve hat dann zur Asymptote eine zur Achse der t parallele Linie, die um die Einheit von dieser Achse entfernt ist.

228. — Die Stromintensität in der Entfernung x wird ausgedrückt durch

$$I = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{V_0}{\rho}\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \frac{\alpha}{2\sqrt{t}};$$

ersetzt man z^2 durch $\frac{a}{t}$, so ergiebt sich

$$(7) \qquad I = \frac{V_0 \alpha}{\rho \sqrt{\pi t}} \sqrt{\frac{a}{t}}\, e^{-\frac{a}{t}}.$$

Diese Intensität ist eine Funktion der Zeit; dieselbe ist Null für $t = 0$ und für $t = \infty$, und wird ein Maximum, wenn $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$ ist, was $z = \frac{1}{2}$ ergiebt. Nennt man T die Zeit des Maximums, so erhält man demnach

$$T = 2a = \frac{\alpha^2 x^2}{2} = \frac{\gamma \rho}{2} x^2.$$

Die Curve A (Fig. 57) stellt die Werte des Ausdruckes $\sqrt{\frac{a}{t}}\, e^{-\frac{a}{t}}$ dar, welcher der Stromintensität proportional ist. Da die Zeit $2a$ des Maximums

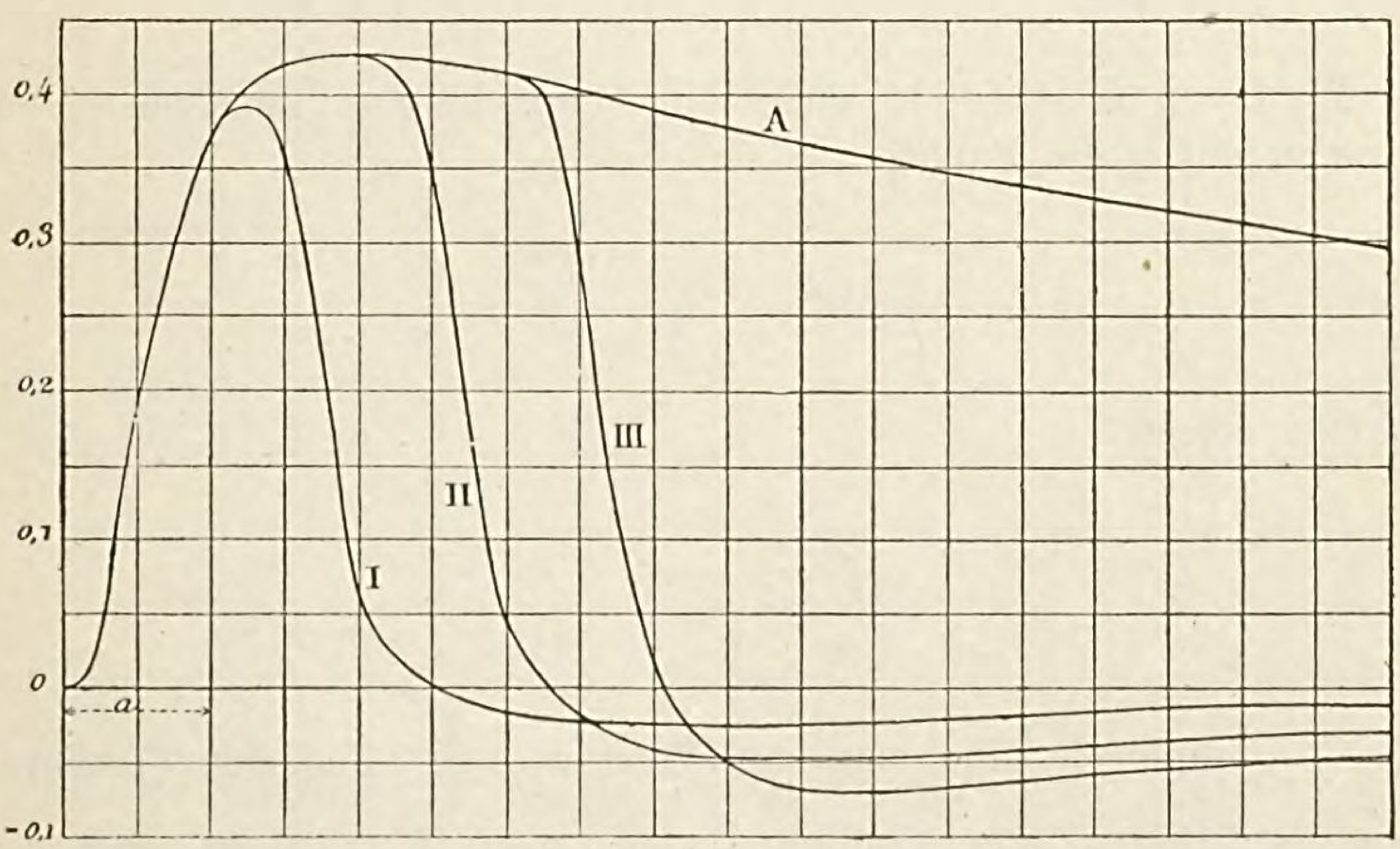


Fig. 57.

$\alpha^2 x^2$ proportional ist, sieht man, dass die Curve desto mehr gekrümmt ist, je grösser die Entfernung x des betrachteten Punktes vom Anfangspunkte ist.

229. Momentane Contacte. — Wir nehmen an, dass man am Anfange des Drahtes nur einen momentanen Contact mit einer Quelle von constantem Potential herstellt, d. h. dass dieses Ende nur während einer sehr kurzen Zeit τ auf das Potential V_0 gebracht und dann wieder mit der Erde verbunden wird.

Diesen Fall kann man auf den vorigen dadurch zurückführen, dass man sich den resultirenden Zustand entstanden denkt durch die Aufeinanderlagerung zweier Zustände, der eine rührt von einem im Ursprunge des Drahtes zu Beginn der Zeit hergestellten dauernden Potential V_0 her, der andere von einem nach Verlauf der Zeit τ hergestellten Potential $-V_0$.

In der That ist dann das dem Draht nach der Zeit τ im Ganzen mitgeteilte Potential Null, die beiden Potentiale $+V_0$ und $-V_0$ pflanzen sich dann in dem Drahte, jedes für sich fort, und der Wert des Potentials in der Entfernung x ist in Bezug auf jeden dieser Zustände dieselbe Funktion der Zeit, die seit der Herstellung des entsprechenden Potentials am Anfange des Drahtes verflossen ist; das resultirende Potential U ist demnach gleich $V(t) - V(t-\tau)$. Nimmt man die Zeit τ unendlich klein an, dann ergiebt sich

$$U = V(t) - V(t-\tau) = \tau \frac{\partial V}{\partial t} = \tau \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Hieraus findet man

$$\frac{U}{V_0} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \frac{z}{t} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \sqrt{a} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a}{t}} = \frac{\tau}{a} \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^3 e^{-z^2}.$$

Der Wert von U ist nicht mehr eine einfache Funktion von z^2. Bezeichnet man mit φ die Funktion

$$\varphi = \frac{z}{t} e^{-z^2} = \frac{ax}{2t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2x^2}{4t}},$$

so kann man setzen

(8) $$\frac{U}{V_0} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \varphi.$$

230. — Graphisch kann man den Wert von $\frac{U}{V_0}$ dadurch bestimmen, dass man die Differenz der Ordinaten der Curve A (Fig. 56) und einer andern von derselben Art aber gegen jene um die Grösse τ nach rechts verschobenen abgreift. Die Curven I, II, III, IV, V (Fig. 56) stellen das Resultat dieser Uebereinanderlagerung für Werte von τ dar, die bez. gleich a, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$ sind.

Man ersieht aus dieser Construktion und aus der Formel, dass die momentane Verbindung des Drahtendes mit einer Quelle von constantem Potential eine Art *elektrische Welle* hervorruft, die nach einem ziemlich complicirten Gesetze fortschreitet, und die sich in dem Maasse, als sie fortschreitet, zugleich verflacht.

In derselben Weise kann man auch die momentanen Contacten entsprechenden Intensitäten erhalten: die Curven I, II, III (Fig. 57) stellen das Gesetz der Intensitäten in einem Punkte dar für Berührungen von einer Dauer, die bez. gleich a, $2a$, $3a$ ist.

231. — Der Zeitpunkt T_1 des Potentialmaximums für die Welle, die von einem unendlich kurzen Contacte herrührt, ist durch die Bedingung bestimmt

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \text{ oder } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Da aber

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(z^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{\varphi}{t}$$

ist, tritt das Maximum ein für $2z^2 = 3$ oder

$$T_1 = \frac{2a}{3} = \frac{\alpha^2 x^2}{6} = \frac{\gamma\rho}{6}x^2 = \frac{T}{3}.$$

Die Zeit T_1 entspricht einem Wendepunkte der Curve A (Fig. 56), da die Bedingung $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, mit der $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$ gleichbedeutend ist; dieselbe ist

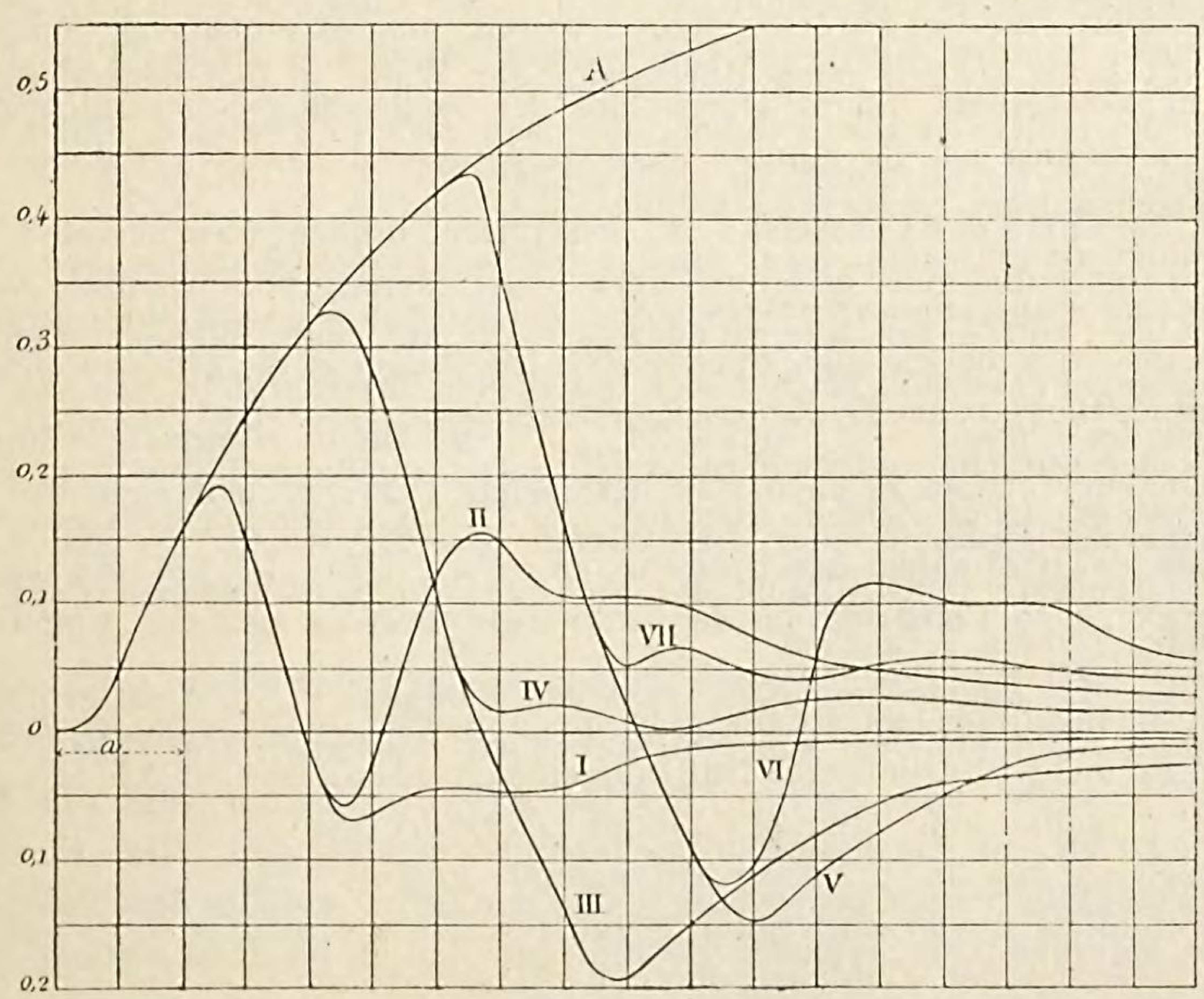


Fig. 58.

der dritte Teil der Zeit T, die nötig ist, um in diesem Punkte bei constantem Potentiale im Anfange des Drahtes das Intensitätsmaximum zu erhalten.

Die Zeit T_1 kann demnach als Ausdruck der *Fortpflanzungsdauer einer elektrischen Welle* aufgefasst werden.

232. — Man kann ebenso durch eine graphische Construktion oder durch Rechnung die Welle bestimmen, die von der abwechselnden Verbin-

dung des Drahtanfanges mit Quellen von den Potentialen V_0 und $-V_0$ während gleicher oder ungleicher Zeiten herrühren würde. Die Curven der Figur 58 entsprechen so den alternirenden Schliessungen, die man in folgender Tabelle zusammenfassen kann:

Curven	Dauer der Contacte		
	+	—	+
I	a	a	
II	a	a	a
III	$2a$	$2a$	
IV	$2a$	a	
V	$3a$	$2a$	
VI	$3a$	a	
VII	$3a$	$2a$	a

Bei richtiger Wahl der Dauer dieser einzelnen Contacte kann man also, wie man sieht, eine viel kürzere Welle erhalten, als bei einfachem Contacte. Der Draht kehrt schnell nach Durchgang der Welle in den neutralen Zustand zurück; dies ist die Aufgabe, die man sich in gewissen Fällen der telegraphischen Uebertragung zu stellen hat.

Um die Curve des Contactes τ zu construiren, braucht man nur die Ordinaten der Curve und einer anderen Curve $-A_\tau$, deren Anfangspunkte gegen einander um τ verschoben sind, zu addiren. Die auf einen folgenden Contact τ' von entgegengesetztem Zeichen sich beziehende Curve ergiebt sich aus den Ordinaten der Curven $-A_\tau$ und $+A_{\tau+\tau'}$. Die auf die Contacte τ und τ' von entgegengesetztem Zeichen sich beziehende Curve ergiebt sich also als die Summe der Ordinaten der drei Curven $A - 2A_\tau + A_{\tau+\tau'}$; man kann so die gesonderte Construktion der sich auf die verschiedenen Contacte beziehenden Curven vermeiden.

233. — Im allgemeinen Falle geht das Potential V_0 im Anfangspunkte des Drahtes nicht plötzlich von Null auf einen constanten Wert über; vielmehr ist dasselbe eine stetige Funktion $F(\theta)$ der Zeit θ, die von dem Augenblicke an, wo die Elektrisirung beginnt, gezählt wird. Das Element dU des Potentials in der Entfernung x und zur Zeit t, welches dem Potential V_0, das während der Zeitdauer $d\theta$ und zur Zeit θ im Drahtanfang hergestellt ist, ist gleich (**229**) $\frac{F(\theta)}{\sqrt{\pi}}\varphi(t-\theta)d\theta$. Ist die Gesammtdauer der Elektrisirung τ, so erhält man für das resultirende Potential

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau F(\theta)\varphi(t-\theta)d\theta.$$

Es ist wohl zu bemerken, dass dieser Ausdruck nur für Werte von t einen Sinn hat, die grösser sind als τ.

Aendert sich das Potential im Anfange periodisch nach einem einfachen Gesetze, wird es zum Beispiel wiedergegeben durch $V_0 \sin 2nt$, so ändert sich der definitive elektrische Zustand des Drahtes in jedem Punkte augenscheinlich nach derselben Periode. Das Potential in der Entfernung x kann dann ausgedrückt werden durch die Formel

$$V = V_0 A \sin(nt - bx),$$

in der b eine Constante und A eine Funktion von x ist. Setzt man dies in die Gleichung (2) ein, so findet man schliesslich

$$(9) \qquad V = V_0 e^{-\alpha x \sqrt{n}} \sin(2nt - x\alpha\sqrt{n}).$$

Eine bestimmte Phase des Potentials im Anfange pflanzt sich also den Draht entlang mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{2\sqrt{n}}{\alpha}$ fort. In diesem Falle kann man sagen, dass eine regelmässige Fortpflanzungsgeschwindigkeit existirt, aber diese Geschwindigkeit hängt von der Periode der elektrischen Oscillation ab; die Zeit, die nötig ist, eine bestimmte Länge zu durchlaufen, ist α proportional, nicht α^2, wie wir für die Dauer der relativen Fortpflanzung, die wir oben (**225**) betrachteten, gefunden haben.

Erfolgt die Elektrisirung im Anfange nach einem mehr oder weniger complicirten Gesetze, und ist der Ausdruck für das Anfangspotential in eine Reihe von einfachen periodischen Gliedern zerlegbar, so wird das Potential im Drahte durch eine Reihe entsprechender elementarer Wellen dargestellt; aber diese Wellen pflanzen sich dann mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort, und es entsteht eine Art von elektrischer Dispersion, die der Erscheinung der Dispersion des Lichtes in einem brechenden Mittel analog ist.

234. — Wir nehmen jetzt an, dass das Potential V_0 im Anfange des Drahtes abwechselnd entgegengesetzt gleiche, constante Werte während gleicher, sehr kleiner Zeiten τ erhält, und dass die Operation eine ungerade Anzahl, $2n+1$ Mal, wiederholt wird d. h.

$$\begin{array}{ll} +V_0 & \text{von } 0 \text{ bis } \tau, \\ -V_0 & \text{von } \tau \text{ bis } 2\tau, \\ +V_0 & \text{von } 2\tau \text{ bis } 3\tau, \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ +V_0 & \text{von } 2n\tau \text{ bis } (2n+1)\tau. \end{array}$$

Man erhält dann

$$\frac{U}{V_0} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \sum_0^{2n\tau} \varphi(t - \theta).$$

Die verschiedenen Werte der Funktion $\varphi(t-\theta)$ sind:

Für den 1. Contact $+\varphi(t-0) \;=+\varphi(t)$,
„ „ 2. „ $-\varphi(t-\tau) \;=-\varphi(t)+\tau\varphi'(t)$,
„ „ 3. „ $+\varphi(t-2\tau)=+\varphi(t)-2\tau\varphi'(t)$,
. . .
. . .
„ $(2n+1)$. „ $+\varphi(t-2n\tau)=+\varphi(t)-2n\tau\varphi'(t)$.

Addirt man alle diese Gleichungen, so ergiebt sich (231)

$$\sum_{0}^{2n\tau}\varphi(t-\theta)=\varphi(t)-n\tau\varphi'(t)=\varphi(t)\left[1-\frac{n\tau}{t}\left(z^2-\frac{3}{2}\right)\right],$$

und folglich

$$\frac{U}{V_0}=\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\varphi(t)\left[1-\frac{n\tau}{t}\left(z^2-\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\varphi(t)\left[1-\frac{n\tau}{a}z^2\left(z^2-\frac{3}{2}\right)\right].$$

Das Maximum des Wertes von U tritt in der Entfernung x zur Zeit T_n ein, die bestimmt ist durch die Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial t}=0,$$

woraus sich ergiebt

$$\left(\frac{2a}{3}-t\right)\left[1+\frac{3}{2}\frac{n\tau}{t}\left(\frac{2a}{3}-t\right)\right]=\frac{n\tau}{t}\left(\frac{4a}{3}-t\right).$$

Ersetzt man t in allen Gliedern, die τ als Faktor enthalten, durch den angenäherten Wert $\frac{2a}{3}$, der dem Maximum T_1 der ersten Welle entspricht, dann ergiebt sich

$$\frac{2a}{3}-T_n=n\tau,$$

oder endlich

$$T_n=T_1-n\tau.$$

Die Zeit, am Ende deren das Maximum eintritt, wird demnach in dem Maasse kleiner, als die Anzahl der Contacte grösser wird, die Wellen werden so verkürzt und die Dauer der Erscheinung ist demnach wesentlich kürzer.

Eine Reihe einer ungeraden Anzahl von abwechselnden, sehr kurzen Contacten von gleicher Dauer ruft demnach den Draht entlang eine Erschütterung in demselben Sinne hervor, aber von viel kürzerer Dauer als ein einziger Contact.

235. — Für einen Contact von unendlich kurzer Dauer τ ist das Potential in einem Punkte zur Zeit t

$$U=V_0\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{t}ze^{-z^2}.$$

Die Stromintensität hat den Betrag

$$I = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{V_0}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{2}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}(2z^2-1)e^{-z^2},$$

oder

$$(10) \qquad I = \frac{V_0}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{2a^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{a}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2\frac{a}{t}-1\right)e^{-\frac{a}{t}}.$$

Man zeigt leicht, dass das Maximum, welches durch die Bedingung $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$ bestimmt ist, eintritt für

$$z^2 = \frac{a}{t} = 3 \text{ oder für } t = \frac{a}{3}.$$

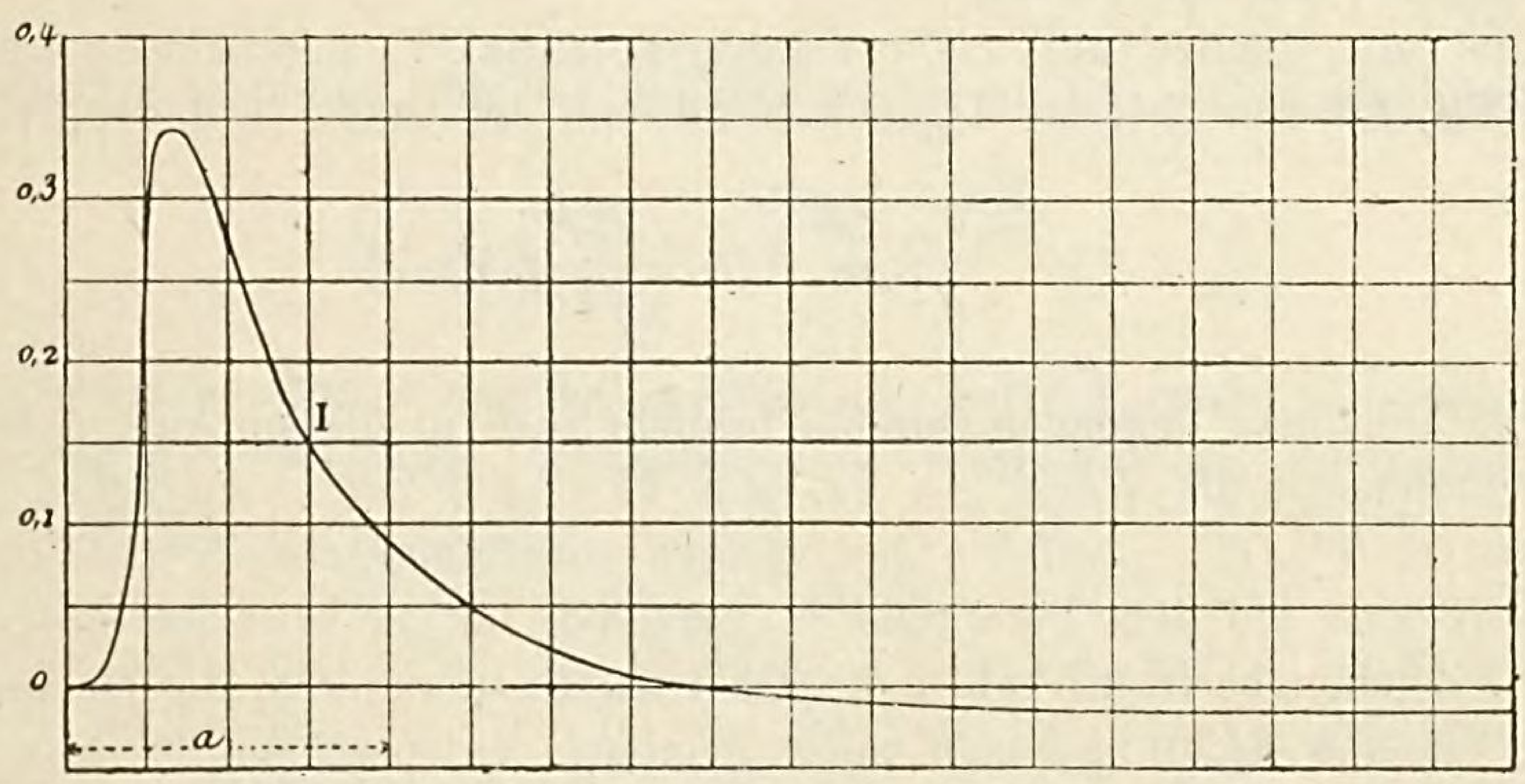


Fig. 59.

Die Curve I (Fig. 59) stellt die Werte des Ausdruckes

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2\frac{a}{t}-1\right)e^{-\frac{a}{t}}$$

dar, welcher der Stromintensität proportional ist.

236. Draht von endlicher Länge. — Um zu dem Falle eines Drahtes OE (Fig. 60) von begrenzter Länge, dessen Ende E mit der Erde leitend verbunden ist, überzugehen, betrachten wir einen unendlichen Draht $X'X$

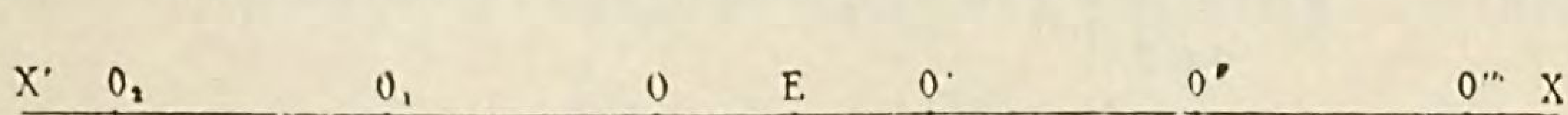


Fig. 60.

und nehmen auf diesem Drahte zwei Reihen von Quellen O_1, O_2 ... O', O'', O''' ... in gleichen Entfernungen $2l$ von einander an; die ersteren, O_1, O_2 ... seien identisch mit der gegebenen Quelle in O und die andern,

O', O'', O''' ... mögen die nämliche numerische Stärke, aber das entgegengesetzte Zeichen besitzen.

Da alle diese Quellen O und O', O_1 und O'' ... je zwei symmetrisch gegen den Punkt E liegen und das entgegengesetzte Zeichen besitzen, bleibt das Potential in E immer gleich Null. Ebenso sind, wenn alle Quellen angebracht sind, O_1 und O', O_2 und O'' ... paarweis gegen den Punkt O symmetrisch und von entgegengesetztem Zeichen. Das Potential in diesem Punkte hängt demnach nur von der dort befindlichen Quelle ab. Der Teil OE des unendlichen Drahtes befindet sich demnach in demselben Zustande, als wenn er allein vorhanden wäre.

Die Stromintensität im Punkte P_1, der auf dem Drahte OE in der Entfernung x vom Anfange O liegt, ist die algebraische Summe der Intensitäten, die durch alle auf dem unendlichen Drahte angenommenen Quellen hervorgerufen werden würden.

Sind alle Quellen auf das constante Potential V_0 gebracht, so erhält man (**228**) für den Teil der Intensität, die von der Quelle O herrührt,

$$i = \frac{V_0 \alpha}{\rho\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{4t}} = \frac{V_0 \alpha}{\rho\sqrt{\pi t}} f(x).$$

Für alle links liegenden Quellen braucht man in diesem Ausdrucke nur nach einander x die Werte $x + 2l$, $x + 4l$... $x + 2nl$... zu geben. Die Quellen O', O'', O''' ... würden den vorigen entgegengesetzte Ströme liefern, wenn sie sich auf dem Potentiale V_0 befänden, da sie aber das entgegengesetzte Zeichen besitzen, haben die Elektricitätsströmungen, die sie hervorrufen, dieselbe Richtung; man muss demnach entsprechend für x setzen: $2l - x$, $4l - x$... $2nl - x$..., woraus sich für die Intensität I ergiebt

$$I = \frac{V^0 \alpha}{\rho\sqrt{\pi t}} \Big[\ldots + f(4l + x) + f(2l + x) + f(x) + f(2l - x) + f(4l - x) + \ldots \Big].$$

Macht man $x = l$, d. h. betrachtet man die Erscheinung im Punkte E, an dem Ende des Drahtes, welches mit der Erde verbunden ist, so vereinfacht sich der Ausdruck, und man sieht unmittelbar, dass die Intensität doppelt so gross ist als die, welche alle Quellen der linken Seite geben würden. Man erhält also

$$I = \frac{2 V_0 \alpha}{\rho\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{\alpha^2 l^2}{4t}} + e^{-\frac{\alpha^2 (3l)^2}{4t}} + e^{-\frac{\alpha^2 (5l)^2}{4t}} + \cdots \right].$$

Setzt man $e^{-\frac{\alpha^2 l^2}{4t}} = v$, so ergiebt sich

$$(11) \qquad I = \frac{2 V_0 \alpha}{\rho\sqrt{\pi t}} \left[v + v^{3^2} + v^{5^2} + v^{7^2} + \cdots v^{(2n+1)^2} + \cdots \right].$$

Die Intensität ist zunächst Null, da v Null ist, wenn t der Null gleich ist; dieselbe wächst dann gegen die Grenze $\frac{V_0}{\rho l}$.

Die durch diese Reihe bestimmte Curve könnte leicht berechnet werden, da die Posten sehr schnell abnehmen, wenn v merklich von der Einheit verschieden ist.

237. — Indessen hat W. Thomson die Aufgabe mit Hilfe einer andern, leichter discutirbaren Reihe gelöst, die direkt aus der Fourier'schen Gleichung (4) abgeleitet werden kann.

Nach dieser Formel wird die Stromintensität in der Entfernung x vom Anfange ausgedrückt durch

$$I = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_0}{\rho l}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}t} \cos\frac{n\pi}{l}x\right].$$

Für das mit der Erde verbundene Drahtende ist $x = l$ und es folgt

$$[I]_{x=l} = \frac{V_0}{\rho l}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}t} \cos n\pi\right].$$

Giebt man dem n der Reihe nach die Werte 1, 2, 3..., dann nimmt der Cosinus abwechselnd die Beträge -1 und $+1$ an und indem man zur Abkürzung

$$u = e^{-\frac{\pi^2 t}{\alpha^2 l^2}},$$

setzt, so erhält man

$$(12) \qquad I = \frac{V_0}{\rho l}\left[1 - 2\left(u - u^4 + u^9 - \cdots \mp u^{n^2} \ldots\right)\right] = F(t).$$

Für sehr kleine Werte von t nähert sich u der Einheit, die in die Klammern eingeschlossene Reihe ist gleich $\frac{1}{2}$ und die Stromintensität Null. Je mehr die Zeit wächst, desto mehr nimmt u ab, die Reihe nähert sich der Null, und die Stromintensität wächst bis zum Grenzwerte $\frac{V_0}{\rho l}$. Die Reihe ist übrigens leicht zu berechnen: nach W. Thomson ist dieselbe nur unmerklich von ihrem Maximumswerte verschieden, bis u grösser als $\frac{3}{4}$ ist. Nennt man a' den Zeitpunkt, in welchem dieser Wert erreicht ist, so erhält man

$$\frac{3}{4} = e^{-\frac{\pi^2 a'}{\alpha^2 l^2}} \quad \text{oder} \quad a' = \frac{\alpha^2 l^2}{\pi^2}\, l_n\left(\frac{4}{3}\right).$$

Man kann dann setzen

$$u = e^{-\frac{\pi^2 a'}{\alpha^2 l^2}\frac{t}{a'}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{a'}}.$$

Die Curve A (Fig. 61) stellt die Stromintensität, die an dem mit der Erde verbundenen Ende des Drahtes besteht, wenn ein constantes Potential am andern Ende hergestellt ist, als Funktion der Zeit dar, wenn man die schliessliche Intensität als Einheit wählt.

238. Momentane Contacte. — Um die Intensität zu erhalten, die der Verbindung des Drahtes mit einer Quelle von constantem Potential V_0 während der Zeit τ entspricht, braucht man nur wie in dem Falle des unendlich langen Drahtes den Ausdruck

$$I_\tau = F(t) - F(t - \tau)$$

zu berechnen oder die Curve geometrisch zu construiren, deren Ordinate in jedem Punkte gleich der Differenz der Ordinaten der beiden Curven $F(t)$ und $F(t - \tau)$ ist.

Die Curven II, III, IV, V, VI, VII (Fig. 61) stellen so die Intensitäten dar, die von Contacten herrühren, deren Dauer bez. $2a'$, $3a'$, ... $7a'$ ist.

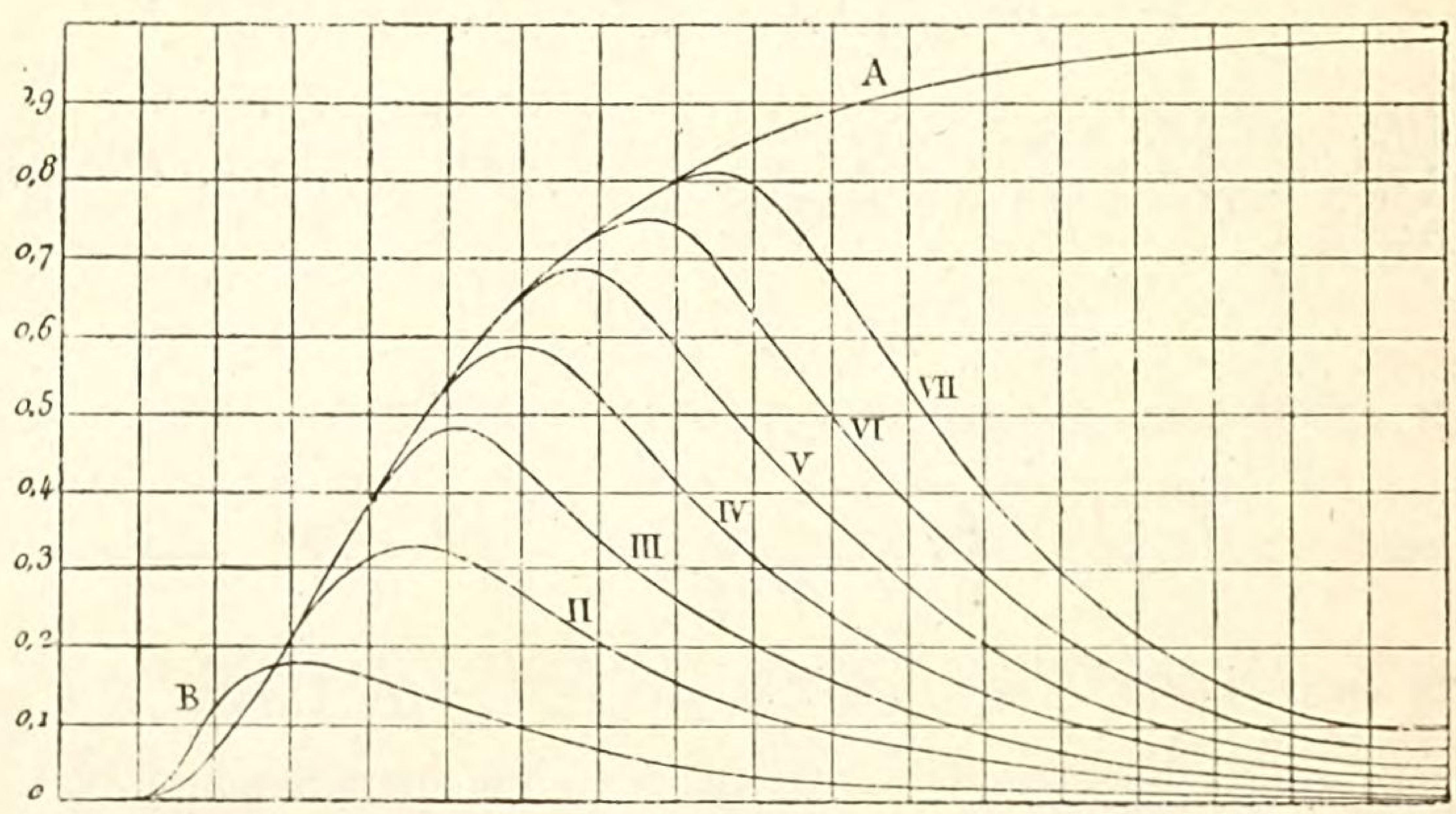


Fig. 61.

Die Erscheinung tritt auch in diesem Falle wie eine elektrische Welle oder ein plötzlicher Anstoss am Ende des Drahtes auf.

Ist die Dauer des Contactes unendlich klein, dann wird die Ankunftscurve der Intensität wiedergegeben durch die Gleichung

$$i = \tau \frac{dF}{dt} = \tau \frac{dF}{du} \frac{du}{dt},$$

woraus folgt

$$i = \tau \frac{2V_0}{\rho l} \cdot \frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} (u - 4u^4 + 9u^9 - \cdots \mp n^2 u^{n^2} \pm \cdots).$$

Diese Intensität wird durch die Curve B (Fig. 61) dargestellt. Dieselbe ist ein Maximum, wenn $\frac{di}{dt} = 0$ ist, d. h. wenn

$$u - 16u^4 + 81u^9 \cdots \mp n^4 u^{n^2} \cdots = 0$$

ist, aus welcher Gleichung mit grosser Annäherung folgt

$$u = \left(\frac{3}{4}\right)^3, \quad \text{oder } t = 3a'.$$

239. — Um schliesslich die Wellen bei ihrer Ankunft zu verkürzen und den Draht zu entlasten, kann man noch den Anfang des Drahtes abwechselnd gleiche oder ungleiche Zeiten hindurch auf entgegengesetzt gleiche Potentiale bringen, indem man denselben mit je einem der Pole einer Kette verbindet.

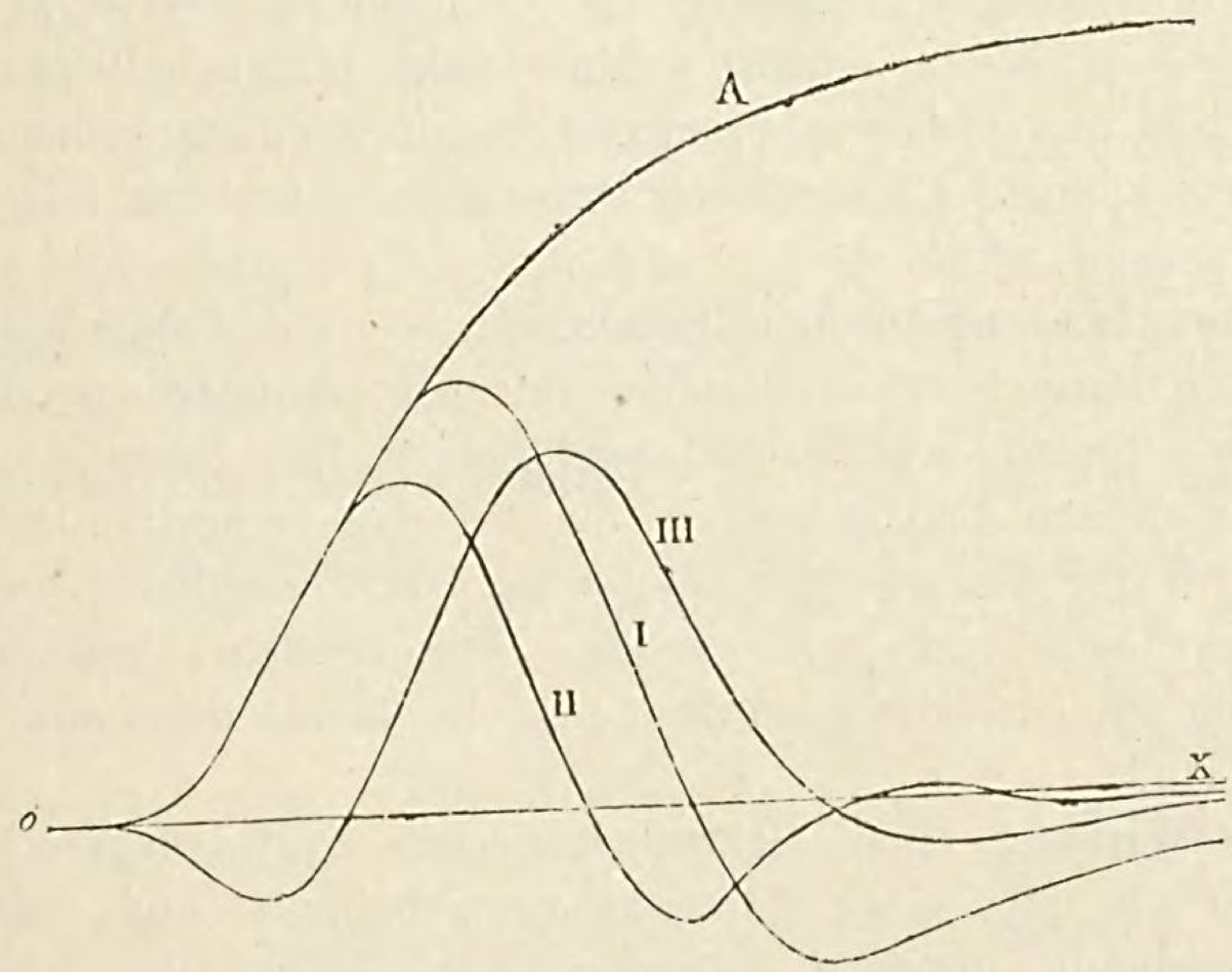


Fig. 62.

Die Curven I, II, III (Fig. 62) stellen folgende Ankunftswellen alternirender Contacte dar:

Curven	Dauer der Contacte			
	+	—	+	—
I	$4a'$	$4a'$		
II	$3a'$	$3a'$	a'	
III		a'	$4a'$	$2a'$.

Ohne für jetzt diese wichtige Frage weiter zu verfolgen, sieht man doch, welches die Natur der Aufgabe ist, welches die Methoden sind, von denen man Gebrauch machen kann, um die Uebertragung von Zeichen in den elektrischen Kabeln zu beschleunigen.

240. Anwendung der Condensatoren. — Wir fügen noch hinzu, dass man es in der Praxis sehr vorteilhaft befunden hat, das Kabel beständig

isolirt zu erhalten, indem man jedes Ende desselben nicht direkt mit der Batterie, sondern mit einem Condensator und diesen erst mit der Batterie verbindet. Die Batterie elektrisirt die eine Belegung des Condensators, der in der Abgangsstation aufgestellt ist, die andere Belegung, die mit dem Kabel verbunden ist, wird entgegengesetzt elektrisch, und eine Strömung von demselben Zeichen, wie die, welche die Kette geliefert hätte, fliesst auf die erste Belegung des in der Ankunftsstation befindlichen Condensators und inducirt die zweite Belegung dieses Condensators, die beispielsweise mit einem Elektrometer in Verbindung steht oder durch ein Galvanometer hindurch zur Erde geschaltet ist.

Ist der Contact am Anfange ein dauernder, so strebt das Elektrometer einer Maximumsablenkung zu; das Galvanometer als Intensitätsmesser liefert zunächst eine wachsende Ablenkung und kehrt dann auf Null zurück, so dass selbst für dauernden Contact die Erscheinung bereits in der Form einer elektrischen Welle auftritt. Man sieht hiernach leicht ein, dass momentane und abwechselnde, passend gewählte Contacte bedeutend kürzere Wellen liefern können, als wenn der Draht direkt durch die Ladungsbatterie elektrisch gemacht würde.

241. Fortpflanzung in den Dielektrica. — Die Folgerungen aus der Fourierschen Formel, wenn dieselbe auf den veränderlichen Zustand angewandt wird, finden, wie bereits angeführt ist, ihre Bestätigung: für die guten Leiter in den Erscheinungen, die bei den transatlantischen Kabeln auftreten, und für die mässigen Leiter in den Versuchen von Gaugain. Die Formel scheint demnach allgemein giltig zu sein, und man kam so dazu, dieselbe auf Dielektrica anzuwenden, die ja nie der Leitungsfähigkeit absolut bar sind.

Ein der Wirkung einer elektromotorischen Kraft ausgesetztes Dielektricum kann als Sitz einer Polarisationserscheinung und zugleich einer Leitungserscheinung aufgefasst werden, die den gewöhnlichen Gesetzen unterworfen ist.

Setzen wir das Dielektricum als isotrop voraus und ist μ die inductive Capacität, c der Coefficient der Leitungsfähigkeit desselben, so giebt die allgemeine Gleichung der Induction, wenn dieselbe auf ein Volumenelement dv angewandt wird, welches in einem Punkte liegt, dessen Dichte ρ ist,

$$\mu \Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

Andererseits ruft die durch $c\Delta V dv dt$ auszudrückende Ladungsänderung des Elementes in der Zeit dt eine entsprechende Vergrösserung der Dichte hervor, was die Gleichung ergiebt

$$c\Delta V = \frac{d\rho}{dt};$$

hieraus folgt

$$\Delta V = -\frac{4\pi\rho}{\mu} = \frac{1}{c}\frac{d\rho}{dt},$$

und folglich

$$\rho = Ae^{-\frac{4\pi c}{\mu}t} = Ae^{-\frac{t}{T}},$$

wenn man setzt $T = \frac{\mu}{4\pi c}$.

Diese Gleichung zeigt, dass die Dichte ρ continuirlich abnimmt, und dass folglich, wenn das Dielektricum durch irgend eine Ursache eine innere Ladung erhalten hat, es dieselbe nicht unbegrenzt behält: diese Ladung wird schliesslich eine reine Oberflächenladung sein, wie die eines guten Leiters, ein a priori klares Resultat.

242. Residuen der Condensatoren. — Die Erscheinungen der Absorption und der Ladungsresiduen, welche in den Dielektrica auftreten, können aber nicht als Wirkungen ihrer eigenen Leitungsfähigkeit aufgefasst werden. Wir wollen von diesem Gesichtspunkte aus die Erscheinungen, die bei der Ladung und Entladung eines Condensators auftreten, prüfen. C sei die Capacität des Condensators, R der Widerstand des zwischen seinen Belegungen befindlichen Dielektricums, E die Potentialdifferenz der beiden Belegungen zur Zeit t, r der Widerstand des äusseren Kreises, der die beiden Belegungen verbindet, E_0 die elektromotorische Kraft einer in den Kreis eingeschalteten Quelle. Der Zuwachs der Ladung CdE des Condensators in der Zeit dt ist gleich dem Ueberschuss der Elektricitätsströmung $\frac{E_0 - E}{r}dt$, die von der Quelle geliefert wird, über die Strömung $\frac{E}{R}dt$, welche das Dielektricum durchfliesst. Es folgt hieraus die Gleichung

$$\frac{E_0 - E}{r} - \frac{E}{R} = C\frac{dE}{dt}, \tag{13}$$

und folglich

$$E = E_0 \frac{R}{R + r}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right),$$

wenn man setzt $T_1 = \frac{CRr}{R + r}$.

Nehmen wir nun an, dass man im Augenblicke t_1 den Kreis unterbricht und den Apparat während der Zeit t_2 sich selbst überlässt, dann geht die Gleichung (13) über in

$$0 = \frac{E}{R} + C\frac{dE}{dt};$$

bezeichnet man mit E_1 die Potentialdifferenz, die zur Zeit t_1 zwischen den Belegungen bestanden hat, mit E_2 die, welche zur Zeit $t_1 + t_2$ besteht, und setzt man $T_2 = CR$, so erhält man

$$E_2 = E_1 e^{-\frac{t_2}{T_2}},$$

Nehmen wir schliesslich an, dass man den Condensator entladet, indem man die beiden Belegungen durch einen Leiter von schwachem Widerstande ρ verbindet, so erhält man die Gleichung

$$\frac{E}{\rho} + \frac{E}{R} = - C \frac{dE}{dt},$$

und am Ende einer Zeit t_3, d. h. im Zeitpunkte $t_1 + t_2 + t_3$

$$E_3 = E_2 e^{-\frac{t_3}{T_3}}, \quad \text{wenn} \quad T_3 = \frac{CR\rho}{R + \rho}.$$

Der Gesammtverlust des Condensators in der Zeit t_3 ist $C(E_2 - E_3)$; der Teil, welcher den äusseren Kreis durchfliesst und die Endladung Q ausmacht, ist gleich $C(E_2 - E_3) \frac{R}{R + \rho}$, was schliesslich ergiebt

$$Q = E_0 \frac{CR^2}{(R + r)(R + \rho)} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}}\right) e^{-\frac{t_2}{T_2}} \left(1 - e^{-\frac{t_3}{T_3}}\right).$$

Um eine vollständige Entladung zu erhalten, genügt es, $t_3 = \infty$ zu machen; man gelangt, wie man sieht, zu dieser vollständigen Entladung auf eine continuirliche Art und ohne die abwechselnden Entladungen, welche sonst bei den Condensatoren vorkommen.

Maxwell hat gezeigt, dass ein aus parallelen dielektrischen Schichten und selbst aus verschiedenen, in beliebiger Weise gemischten dielektrischen Elementen bestehendes System fähig ist, Ladungsresiduen zu liefern, auch wenn jedes einzelne jener Dielektrica dieser Fähigkeit bar ist. Aber der Mangel an Homogeneität scheint nicht der einzige Grund der Erscheinung zu sein, und der Versuch zeigt, dass die Existenz der Ladungsresiduen in einer grossen Anzahl von Fällen einer Art elastischen Deformation zugeschrieben werden muss, welche als Folge der Polarisation des Dielektricums aufgefasst werden muss. Denn es ist bemerkenswert, dass alle Einwirkungen, wie wiederholte Stösse, Erschütterungen, plötzliche und in entgegengesetzter Richtung erfolgende Temperaturänderungen, welche die Rückkehr eines Körpers, der einer dauernden elastischen Deformation ausgesetzt gewesen ist, in den normalen Zustand erleichtern, in gleicher Weise das Verschwinden der Ladungsresiduen und die Rückkehr in den natürlichen Zustand beschleunigen.

Die Fortpflanzung der Wärme liefert keine Erscheinungen, die man mit dem Ladungsresiduum der Dielektrica vergleichen kann, und in dieser Richtung scheint die sonst so grosse Analogie der beiden Erscheinungsklassen vollständig zu fehlen.

3. Capitel.

Energie der Ströme.

243. Entwicklung von Wärme. — Erfährt ein System elektrisirter Leiter irgend eine Aenderung ohne Dazwischentreten einer äusseren Kraft, so ist die elektrische Energie im zweiten Zustande notwendig kleiner als im ersten. Die bei der Umgestaltung verloren gegangene Energie kann in einer andern äquivalenten Form nutzbar werden, in einer mechanischen Arbeit, in dem Hub eines Gewichtes, im Zuwachs der lebendigen Kraft eines Systems, in einer Aenderung des physikalischen Zustandes, in einer chemischen Aktion, oder endlich in einer Wärmeentwicklung.

Für jede unendlich kleine Aenderung des betrachteten Systems ist der Energieverlust gleich der Summe der Produkte jeder einzelnen elektrischen Masse in die Differenz der Potentialwerte an den Punkten, die dieselbe vor und nach der Umformung einnimmt.

Wir betrachten zwei Punkte A und B, die bez. auf den Potentialen V_1 und V_2 gehalten werden, und nehmen auf den durch A und B gehenden Niveauflächen zwei correspondirende Flächenteile S_1 und S_2 an, die durch dieselbe Stromröhre ausgeschnitten werden. Die durch diese beiden Flächen gehende Elektricitätsmenge ist die nämliche; die durch den Strom in diesem Zwischenraume in der Zeiteinheit verlorene Energie ist das Produkt der fliessenden Elektricitätsmenge, d. h. der Intensität I des Stromes in das Potentialgefälle $V_1 - V_2$, wenn der Strom von A nach B geht, also in die elektromotorische Kraft, die zwischen diesen beiden Punkten vorhanden ist. Man erhält also als Maass der verlorenen Energie

$$W = I(V_1 - V_2) = IE.$$

Wir wollen es als experimentell festgestellte Thatsache annehmen, dass kein Teil dieser Energie dazu verwandt ist, die lebendige Kraft der elektrischen Massen zu ändern. Die Thatsache ist klar, wenn die Flächen S_1 und S_2 gleich sind, da dann die Geschwindigkeiten beim Eintritt in die Röhre und beim Austritt aus derselben die gleichen sind. Für den allgemeinen Fall haben wir bereits darauf hingewiesen, dass die Strömung in

jedem Punkte der Kraft parallel ist, und dass folglich keine Wirkung, die man der Trägheit der elektrischen Massen zuschreiben könnte, in den Erscheinungen des stationären Zustandes hervorzutreten scheint.

Wenn andererseits der Leiter in seiner Gesammtheit unbeweglich ist, und wenn endlich der Strom keine äussere mechanische Arbeit hervorbringt, ist die Energie notwendig in dem Leiter selbst nutzbar gemacht.

244. Joule'sches Gesetz. — Zwei Fälle können eintreten: entweder ist das Potentialgefälle zwischen den Punkten A und B continuirlich und folgt dem Ohm'schen Gesetze, oder in dem Zwischenraume zwischen diesen Punkten sind zwei benachbarte Flächen vorhanden, zwischen denen das Potential plötzlich abfällt, wo das Gefälle constant und von der Stromintensität unabhängig ist, wo also eine constante elektromotorische Kraft H besteht. Die Art, nach welcher die elektrische Energie den Leiter entlang verbraucht wird, hängt von dem Gesetze der Aenderung der Potentiale ab und ist nicht in beiden Fällen identisch. Immer, wenn die Potentialänderung stetig erfolgt, wird die Energie in stetiger Weise verbraucht; sie setzt sich dann in Wärmeenergie um und verursacht eine Wärmeentwicklung längs des Leiters. Dort, wo das Potential plötzlich abfällt, tritt eine plötzliche Energieänderung ein, die sich entweder in eine Wärmeerscheinung oder in eine andere gleichwertige physikalische Wirkung umsetzt.

Wir betrachten zunächst den ersten Fall und nehmen an, dass keine vom Strome unabhängige Potentialänderungen vorhanden sind. Ist R der Widerstand des Leiters zwischen den beiden Punkten A und B, so ergiebt das Ohm'sche Gesetz

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{E}{R}.$$

Der Ausdruck für die zwischen den beiden Punkten verbrauchte Energie ist demnach

$$W = IE = \frac{E^2}{R} = I^2 R.$$

Die auf dem Leiter in der Zeiteinheit entwickelte Wärmeenergie ist gleich dem Produkte aus dem Quadrate der Intensität des Stromes in den Widerstand des Leiters. Nennt man Q die Wärmemenge, wie man sie durch calorimetrische Prozesse messen kann, und J das mechanische Aequivalent der Wärme, so erhält man demnach

$$I^2 R = JQ.$$

Die Menge der entwickelten Wärme ist proportional dem Widerstande des Leiters und dem Quadrat der Stromintensität.

Das ist *das Joule'sche Gesetz.*

245. Beziehungen zwischen den Gesetzen von Ohm und von Joule. — Man kann zu diesem Resultate auch auf einem andern Wege gelangen:

Betrachten wir einen Leiter von der Capacität C, beispielsweise eine Batterie, die auf das Potential V elektrisirt ist, dann hat die potentielle Energie den Wert (89)

$$W = \frac{1}{2} MV = \frac{1}{2} CV^2.$$

Wir nehmen nun an, dass diese Batterie durch einen Draht von so grossem Widerstande mit der Erde verbunden wird, dass die Entladung eine merkliche Dauer hat. In der Zeit dt fliesst eine Elektricitätsmasse dM ab, und das Potential wird um dV kleiner, man erhält

$$dM = Idt = CdV,$$

und der Energieverlust in derselben Zeit ist

$$dW = CVdV = VdM = IVdt.$$

Das Ohm'sche Gesetz ist giltig, wenn die Stromintensität während der Zeit dt merklich constant bleibt; nach demselben ist

$$I = \frac{V}{R},$$

und man erhält durch Verbindung mit der letzten Gleichung

$$\frac{dW}{dt} = IV = I^2R = \frac{V^2}{R};$$

d. h. die in der Zeiteinheit aufgewandte Energie wird durch das Joule-sche Gesetz ausgedrückt.

Wir haben eben das Joule'sche Gesetz aus dem Princip von der Erhaltung der Energie und dem Ohm'schen Gesetze abgeleitet. Man könnte ebenso umgekehrt das Ohm'sche Gesetz aus demselben Princip in Verbindung mit dem Joule'schen Gesetze ableiten. Denn das Joule'sche Gesetz ergiebt

$$W = I^2R.$$

Andererseits ist

$$W = EI;$$

hieraus folgt

$$E = IR,$$

also das Ohm'sche Gesetz.

246. — Wir machen noch darauf aufmerksam, dass in einem zusammengesetzten Kreise, der keine örtlichen elektromotorischen Kräfte enthält, *die entwickelte Wärmemenge ein Minimum ist, wenn die Verteilung der Intensitäten dem Ohm'schen Gesetze folgt.*

Nehmen wir zum Beispiel an, dass zwischen den Punkten A und B mit den Potentialen V_1 und V_2 eine Reihe von leitenden Bogen (Fig. 52)

vorhanden ist; R sei der Widerstand eines solchen und I die sich aus dem Ohm'schen Gesetze ergebende Intensität, also so dass $IR = V_1 - V_2 = E$, und es werde ferner durch eine Aenderung des Zustandes die Intensität in diesem Leiter $I + i$.

Die gesammte in dem neuen Systeme entwickelte Wärmemenge wird ausgedrückt durch

$$\Sigma R(I+i)^2 = \Sigma RI^2 + 2\Sigma RIi + \Sigma Ri^2;$$

aber das Produkt RI ist für jeden Bogen eine Constante, und andererseits ist Σi notwendig Null, wenn der im Punkte A endigende Strom nicht geändert wird; die Wärmemenge reducirt sich also auf

$$\Sigma RI^2 + \Sigma IRi^2$$

und ist augenscheinlich ein Minimum für $i = 0$, d. h. wenn die Intensität sich auf alle Bogen nach dem Ohm'schen Gesetze verteilt.

247. Peltier'sches Phänomen. — Wir nehmen nunmehr an, dass zwischen zwei Punkten A und B, die stets auf denselben Potentialen V_1 und V_2 erhalten werden, der Wert des Potentials nicht proportional den Widerständen variirt, sondern in einem Punkte P zwischen zwei benachbarten Flächen einen plötzlichen Abfall $U_1 - U_2 = H$ erleidet, der von der Stromintensität unabhängig ist; diese Intensität wird nicht in derselben Weise wie im vorigen Falle ausgedrückt werden.

Nennt man R_1 und R_2 die Widerstände der beiden Teile AP und PB, so erhält man (**210**)

$$I = \frac{V_1 - U_1}{R_1} = \frac{U_2 - V_2}{R_2} = \frac{V_1 - V_2 - (U_1 - U_2)}{R_1 + R_2} = \frac{E - H}{R}.$$

Die gesammte zwischen den Punkten A und B aufgewandte Energie ist

$$W = I(V_1 - V_2) = IE,$$

woraus sich ergiebt

$$W = I(IR + H) = I^2R + IH.$$

Diese Energie besteht aus zwei Teilen: der eine ist dem Quadrat der Intensität proportional und erhitzt den Draht in seiner ganzen Länge; dieser Teil entspricht dem Joule'schen Gesetze; der andere ist dem Strome proportional und auf den Punkt P beschränkt. Dieser letztere Teil ist positiv, wenn der Abfall in Richtung des Stromes erfolgt, und negativ im entgegengesetzten Falle. Ist keine andere Arbeit als die den Temperaturänderungen entsprechende vorhanden, so setzt sich diese Energie im ersten Falle in eine Wärmeentwicklung in P um, in einen Wärmeverbrauch, also in eine Abkühlung, im anderen Falle. Dies ist die unter dem Namen des *Peltier'schen Phänomens* bekannte Erscheinung, die bei dem Contacte zweier Metalle eintritt.

Die lokale Energie IH kann ferner durch eine chemische Reaktion ersetzt werden, die Wärme verbraucht, wenn H positiv ist, und andererseits

Wärme entwickelt, wenn H negativ ist, so dass die Temperaturänderungen dann lediglich von der nach dem Joule'schen Gesetze entwickelten Wärme herrühren.

248. — Die Umkehrung der eben entwickelten Schlüsse ist klar. Wenn man in irgend einem Punkte P des Kreises eine Wärmeerscheinung oder eine chemische Wirkung findet, die der Stromintensität proportional ist, dann kann man schliessen, dass in diesem Punkte eine plötzliche Potentialänderung vorhanden ist, eine positive oder eine negative, je nach dem Zeichen der Arbeit, und dass diese Aenderung von dem Strome unabhängig ist. Aendert ferner die Arbeit ihr Zeichen mit dem Strome, so kann man daraus schliessen, dass die Potentialänderung eine feste und vom Strome unabhängige ist.

Wir fassen insbesondere diesen letzteren Fall ins Auge; r sei der Widerstand in dem Teile, in welchem der Abfall des Potentials zu Tage tritt, und wir nehmen an, dass in dem betrachteten Punkte nur Wärmeerscheinungen vorhanden sind. Die entwickelte Wärmemenge setzt sich aus zwei Teilen zusammen: der eine ist durch das Joule'sche Gesetz bestimmt, wird durch $I^2 r$ dargestellt und ist von der Stromrichtung unabhängig; der andere, der vom Peltier'schen Phänomen herrührt, hat den Wert IH und wechselt mit der Stromrichtung sein Zeichen. Fliesst der Strom in der einen Richtung, so ist die gesammte entwickelte Wärmemenge

$$IH\left(1 + I\frac{r}{H}\right),$$

fliesst derselbe in der entgegengesetzten Richtung, so ist dieselbe

$$-IH\left(1 - I\frac{r}{H}\right).$$

In dem Maasse, als man die Intensität abnehmen lässt, wird das Glied $I\frac{r}{H}$ kleiner, die Peltier'sche Erscheinung tritt um so mehr hervor, und die Umkehrung des Stromes verursacht immer mehr entgegengesetzt gleiche Wirkungen.

Eine Frage drängt sich bei dem Peltier'schen Phänomen auf. Die Wärmewirkung, die man während des Stromdurchganges an der Lötstelle zweier Metalle beobachtet, misst den plötzlichen Fall des Potentials, der in diesem Punkte vorhanden ist, und scheint folglich die elektromotorische Contactkraft zu messen, die zwischen denselben nach der Theorie von Volta vorhanden ist. Stimmt nun das so erhaltene Resultat mit dem, welches andere Prozesse liefern, die Anwendung der Elektrometer zum Beispiel, überein?

Der Versuch antwortet auf diese Frage negirend: die durch die beiden Prozesse erhaltenen Zahlen stimmen nicht nur nicht mit einander überein, die Körper sind nicht einmal in derselben Reihe angeordnet; die Zahlen der beiden Reihen sind nicht einmal von derselben Grössenordnung, sie

haben in einigen Fällen sogar das entgegengesetzte Zeichen. Es ist demnach sicher, dass man nicht in beiden Fällen dieselbe Erscheinung misst. Die plausibelste Erklärung für diesen Mangel an Uebereinstimmung ist nun die, dass man bei den elektrostatischen Messungen einer complexen Erscheinung gegenübersteht, in der die Natur des Mittels, welches sich notwendig zwischen den sich berührenden Metallen befindet, eine wichtige Rolle spielt.

249. Chemische Zersetzungen. — Immer wenn eine zusammengesetzte Flüssigkeit von einem Strome durchflossen wird, wird dieselbe zersetzt: das eine Element erscheint auf dem Leiter, welcher den Strom zuführt, das andere auf dem, welcher ihn ableitet. Faraday bezeichnete diese Erscheinung mit dem Namen *Elektrolyse*; er nennt *Elektrolyt* den der Zersetzung ausgesetzten Körper und *Elektroden* die beiden Leiter, die zum Ein- und Austritt des Stromes dienen, wobei die zuführende als die *positive*, die andere als die *negative* Elektrode bezeichnet wird.*)

Zwei Bedingungen sind für die Entstehung der Elektrolyse zu erfüllen: der Strom muss durch die Verbindung hindurchgehen, und letztere muss eine Flüssigkeit sein, wenigstens sich in weichem Zustande befinden. So zeigt das Glas in der Rotglut deutliche Zeichen der Zersetzung, da es dann zugleich leitend und weich geworden ist.

Es ist äusserst bemerkenswert, dass die Zersetzungsprodukte nur auf den Elektroden erscheinen. Clausius erklärt, indem er eine zuerst von Grotthuss aufgestellte Theorie weiter entwickelt, diese Erscheinung in geistvoller Weise. Für ihn befinden sich die Moleküle, aus denen der Körper besteht, in einem Zustande fortwährender Bewegung. Aber während bei den festen Körpern die Lagenänderungen der Moleküle begrenzt sind, können dieselben in den Flüssigkeiten ohne Grenze in beliebigen Richtungen erfolgen. So ist das Wasserstoffmolekül, welches einen Teil des Wassermoleküls bildet, nicht unveränderlich an das entsprechende Sauerstoffmolekül gebunden; es kann vielmehr, unaufhörlich im Wirbeln begriffen, jenes erste Sauerstoffmolekül verlassen, um sich mit einem Nachbarmolekül zu vereinigen und sich so mittels auf einander folgender Auswechslungen auf Entfernungen fortbewegen, die gegen den Radius der Wirkungssphäre unendlich gross sind. Im gewöhnlichen Zustande haben diese Bewegungen vollkommen beliebige Richtungen; der Durchgang der Elektricität würde die Folge haben, denselben eine bestimmte Tendenz zu geben, infolge deren die Wasserstoffmoleküle mit dem Strome nach der negativen Elektrode getrieben werden, die Sauerstoffmoleküle dagegen gegen den Strom sich nach der positiven Elektrode hin bewegen.

250. Erstes Gesetz von Faraday. — Die ersten Versuche über die Zersetzung des Wassers durch Elektricität scheinen von Trooswyk und

*) Faraday nennt *Anode* den Leiter, der den Strom zuführt, *Kathode* den, durch welchen derselbe austritt; er nennt *Jonen* die Elemente der Zersetzung. Das *Anion* entwickelt sich an der Anode, das *Kation* an der Kathode; die letzteren Bezeichnungen sind aber nicht, wie die ersteren, allgemein angenommen worden.

Dieman aus dem Jahre 1795 herzurühren. Diese Physiker wandten den Funken von Batterieen an, der zwischen zwei Drähten von Gold oder Platin übersprang. Der Versuch wurde im Jahre 1800 mit dem Strome einer galvanischen Kette von Carlisle und Nicholson wiederholt. Will man mit Funken operiren, dann ist es sehr vorteilhaft, die sog Wollastonschen Elektroden zu verwenden, die in einem Platindraht bestehen, der in ein Glasrohr so eingeschmolzen ist, dass nur der Querschnitt des Drahtes mit der Flüssigkeit in Berührung kommt. Wollaston, Faraday und Armstrong haben gezeigt, dass die Wirkung des Funkens mit der der Kette identisch ist. Welches auch die Entstehungsweise der Elektricität sein möge: *die Menge zersetzten Wassers ist proportional der Menge der hindurchgegangenen Elektricität.*

Dieses von Faraday ausgesprochene Gesetz ist specieller durch die elektromagnetische Messung der Ströme bestätigt worden; aber auch die direkte Bestimmung der Elektricität nach elektrostatischen Methoden ermöglicht einen sehr genauen Beweis des Satzes. In neueren Versuchen hat Warren de la Rue durch Wasser die Entladungen eines Condensators gehen lassen, der auf Potentiale in den Verhältnissen 1, 2, 3 geladen war, und hat sehr streng die Proportionalität der Elektricitätsmenge mit der Menge des zersetzten Wassers gezeigt. Diese Proportionalität lässt die Verwendung der Elektrolyte als Elektricitätsmesser zu; man nennt *Voltameter* einen Apparat, der so hergerichtet ist, dass das von der Wasserzersetzung herrührende Gas gesammelt und gemessen werden kann.

251. — Da die Arbeit der chemischen Zersetzung der Stromintensität proportional ist, so folgt aus der oben gemachten Bemerkung (**248**), dass irgendwo in dem Voltameter ein plötzlicher Fall H des Potentials vorhanden sein muss, der von der Intensität unabhängig ist. Die durch den Fall des Stromes in diesem Punkte verfügbar gewordene Energie ist zur Zersetzung des Wassers verwendet und kann in ihrem absoluten Werte berechnet werden.

Ist M die Elektricitätsmenge, die in einer bestimmten Zeit durch das Voltameter hindurchgeht, und P das Gewicht des zersetzten Wassers, so drückt der Quotient $\frac{P}{M}=p$, da diese beiden Grössen einander proportional sind, das Gewicht des durch die Elektricitätseinheit zersetzten Wassers aus. Bezeichnet man mit a die Verbindungswärme der Gewichtseinheit des Wassers bei constantem Drucke, so stellt JaP die zur Zersetzung eines Gewichtes P von Wasser nötige Energie dar. Da diese Energie durch den Stromfall geliefert wird, muss sein

$$W = MH = JaP;$$

hieraus findet man

$$H = \frac{JaP}{M} = Jap.$$

So besteht zwischen den beiden Elektroden eines Voltameters, welches von einem Strome durchflossen wird, ausser der Potentialdifferenz, die von

dem Widerstande des eingeschalteten flüssigen Leiters herrührt, ein plötzlicher Fall, dessen Sitz unbestimmt ist, der entweder ganz auf einer Elektrode entstehen kann oder teilweise auf beiden, und der numerisch durch die mechanische Arbeit ausgedrückt wird, welche der Energie entspricht, die von der Wassermenge verbraucht wird, die eine Elektricitätseinheit zersetzt.

252. Polarisation der Elektroden. — Durch welchen Mechanismus entsteht nun diese Potentialdifferenz? Es ist klar, dass vor dem Durchgange des Stromes die beiden Elektroden, wenn sie aus demselben Metall bestehen, beide zum Beispiel aus Platin, nach dem Volta'schen Gesetze dasselbe Potential besitzen, das wahrscheinlich von dem des Wassers verschieden ist; die dann an den einzelnen Elektroden vorhandenen plötzlichen, einander entgegengesetzten Aenderungen, würden im Voltameter eine Arbeit liefern, die augenscheinlich Null ist. Ist der Strom hergestellt, so sind die beiden Gefälle ungleich und ihre Differenz wird gleich H. Man wird demnach bei der Verfolgung des Gedankenganges von Volta zu der Annahme geführt, dass eine Aenderung der sich berührenden Flächen eingetreten ist. Die Ablagerung der Elemente des Elektrolyts auf den Elektroden giebt eine hinreichende Erklärung für diese Aenderung.

Denn eine Platte braucht nur als Elektrode gedient zu haben oder auch nur in ein Gas getaucht zu sein, so findet man, wenn man dieselbe in Gegenwart einer Platte derselben Art, die neu ist oder eben auf die Rotglut gebracht war, eine Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten.

Wir fassen insbesondere die Zersetzung des Wassers ins Auge. Die ersten Teile des Gases, die mit der Platinplatte in Berührung kommen, scheinen, wenn sie nicht gar mit derselben eine wirkliche Verbindung bilden, sich dort wenigstens in einem Zustande der Verdichtung abzulagern, in welchem das Gas bei Weitem nicht die potentielle Energie besitzt, die dem freien Zustande entspricht. Diese Erscheinung der Verdichtung der Gase muss namentlich zu Anfang eintreten, und dieselbe nimmt dann progressiv ab, bis die Dicke der Schicht so gross geworden ist, dass die neuen Bläschen keine Einwirkung seitens der Platte erfahren und sich frei entwickeln können.

Erst von diesem Augenblicke an erreicht die Arbeit der Zersetzung des Wassers ihren normalen Wert. Bis dahin war es nur die Differenz zwischen diesem Normalwerte und der Arbeit, die der eben besprochenen Verdichtung entspricht; der Versuch zeigt, dass diese Differenz am Anfang einen sehr kleinen Wert haben kann.

Die so von der Oberfläche der Platten erlittene Aenderung dürfte die Ursache der Erscheinung sein, die man *Polarisation der Elektroden* nennt, und die in der Entwicklung einer elektromotorischen Kraft zu Tage tritt, welche der entgegengesetzt ist, die den Strom hervorruft. Man begreift so, warum diese Polarisation nicht augenblicklich eintritt, warum dieselbe in stetiger Weise von Null bis zu einem Maximum wachsen kann, endlich, warum die Elektricitätsmenge, die nötig ist, um einen gegebenen Polarisations-

zustand herbeizuführen, von dem Zustande und den Dimensionen der Platte abhängt. Diese Menge nennt man oft die auf den betrachteten Zustand bezügliche *Capacität der Polarisation.*

Wählt man Elektroden von sehr ungleichen Oberflächen und lässt man in das Voltameter eine gemessene Elektricitätsmenge von gegebenem Potential eintreten, so kann man nach Wunsch die Polarisation der einen oder der andern der Elektroden erzeugen; die neueren Versuche von Blondlot zeigen, dass die Erscheinung demselben Gesetze folgt, welches auch die Richtung des Stromes sei, und dass für eine gegebene Elektrode und für ein gegebenes Elektrolyt die Capacität nicht von der Richtung der Polarisation abhängt.

253 Secundäre Ströme. — Ist einmal die Polarisation eingetreten, so entsteht, wenn man den ursprünglichen Strom unterbricht und die beiden Elektroden durch einen Leiter verbindet, infolge der elektromotorischen Kraft der Polarisation H ein Strom, der dem ursprünglichen Strome entgegengesetzt ist; aber dieser Strom nimmt schnell ab und verschwindet mehr oder weniger vollständig; man nennt denselben einen *secundären Strom.*

Man kann diese Erscheinung leicht erklären: verbindet man die beiden Elektroden durch einen Leiter, so verschwindet die Gasschicht allmählich unter Bildung von Wasser; die elektromotorische Kraft wird kleiner und verschwindet mit derselben; endlich ist es klar, dass die gesammte Elektricitätsmenge, die während der Dauer des secundären Stromes in Bewegung gesetzt ist, der gleich sein muss, die man für die Polarisation der Elektroden hat aufwenden müssen.

Es ist klar, dass dieser Strom constant bleiben müsste, wenn man die elektromotorische Kraft H constant erhalten könnte; es würde genügen, an der Oberfläche der Elektroden die Gasschicht zu unterhalten, die für die Egänzung der Polarisation nötig ist. Dies ist genau das, was in dem *Gaselement* von Grove stattfindet.

254. Auf einander folgende chemische Wirkungen eines Stromes. — Zweites Gesetz von Faraday. — Wir nehmen an, dass man in denselben Kreis mehrere Grove'sche Gaselemente in derselben Richtung nach einander und mehrere Voltameter eingeschaltet hat, n sei die Zahl der Elemente, n' die der Voltameter, R der Gesammtwiderstand des Kreises und I die Intensität des hindurchgehenden Stromes. In jeder Zeiteinheit ist die von der Gesammtheit der Elemente gelieferte Arbeit $nJapI$, die von den Voltametern verbrauchte ist $n'JapI$. Endlich wird eine Arbeitsmenge RI^2 nach dem Joule'schen Gesetze in dem Kreise in Wärme verwandelt. Wenn keine positive oder negative äussere Arbeit vorhanden ist, muss die Summe der positiven Arbeiten gleich der Summe der negativen Arbeiten sein, woraus sich ergiebt

$$nJapI = n'JapI + I^2R$$

oder

$$(n - n')\,Jap = IR = (n - n')\,H.$$

Das Produkt IR ist eine notwendig positive Grösse; der Strom kann demnach nur existiren, wenn man hat

$$n > n'.$$

Die Zahlen n und n' sind übrigens ganze Zahlen, wenn die Polarisation in allen Elementen ein Maximum ist; wäre in einem von ihnen die Polarisation unvollständig, so wäre die entsprechende elektromotorische Kraft nur ein Bruchteil von H, und n müsste dann als eine gebrochene Zahl aufgefasst werden. In allen Fällen ist die für die Existenz eines Stromes notwendige und hinreichende Bedingung die, dass n grösser ist als n'.

Ist der stationäre Zustand eingetreten, so wird unter der Voraussetzung, dass die Polarisation in den Elementen sowohl wie in den Voltametern eine vollständige ist, in jedem derselben während derselben Zeit die gleiche Arbeit geleistet, in den einen eine positive, in den andern eine negative. In andern Worten: *für jede Elektricitätseinheit, die durch das System hindurchgeht, wird in den Elementen ebenso viel Wasser erzeugt als in den Voltametern zersetzt wird.*

255. — Dieses zweite Faraday'sche Gesetz bleibt auch dann noch bestehen, wenn die Polarisation nicht in allen Punkten der betrachteten Kette eine vollkommene ist. Nehmen wir, um einen bestimmten Fall im Auge zu haben, an, dass in einem der Elemente die Dicke der Gasschichten unter ihren Grenzwert gefallen ist, dass zu einem gegebenen Zeitpunkt die elektromotorische Kraft nur einen Wert H' hat, der kleiner ist als H, dann entspricht der Uebergang einer Elektricitätseinheit in diesem Elemente nicht mehr derselben Arbeit wie in den andern, aber der Beziehung $H' = Ja'p$ wird immer noch genügt, wenn man mit a' die Wärme der Bildung der Gewichtseinheit Wasser aus dem Sauerstoff und dem Wasserstoff im Zustande der teilweisen Verbindung, in dem sie sich auf dem Platin befinden, bezeichnet, und das so geänderte Element bildet dieselbe Wassermenge wie alle andern.

Das Gesetz ist übrigens allgemein: *für jedes Elektrolyt ist das Gewicht der verbundenen oder zersetzten Elemente proportional der Elektricitätsmenge, die hindurchgeht,* gleichviel ob die Operation positiv oder negativ ist, ob dieselbe mit Polarisation der Elektroden, wie bei Zersetzung von Wasser oder Kupfersulfat an Platinelektroden, erfolgt, oder ob man die Polarisation vernachlässigen kann, wie bei der Elektrolyse des Kupfersulfats an zwei Kupferelektroden. Dieser Satz umfasst zugleich als Folgerung den, dass das Elektrolyt nie nach Art eines einfachen Leiters wirkt und keinen Bruchteil des Stromes ohne entsprechende Zersetzung hindurchlässt.

Bei der Elektrolyse des Kupfersulfats zwischen zwei Kupferplatten ist, wenn die beiden Platten sich in der That in demselben Zustande befinden, die elektromotorische Contactkraft zwischen dem Metall und der Flüssigkeit zu beiden Seiten dieselbe, und da genau ebenso viel Kupfer an der positiven Elektrode gelöst wird, als sich an der negativen niederschlägt, muss zwischen

der producirten und der verbrauchten Wärme Gleichheit bestehen. Jede Differenz in den Zuständen der beiden Platten würde dagegen in einer Wärmearbeit zu Tage treten.

256. — Wir müssen hier indessen eine wichtige Einschränkung in Bezug auf dieses Princip der Aequivalenz der chemischen Energie und der elektrischen Arbeit aussprechen. Man nimmt in der That hierbei an, dass an dem Punkte, wo die chemische Aktion vor sich geht, weder eine äussere Arbeit noch eine von den Widerständen unabhängige Wärmeänderung erfolgt. Wenn es sich nicht so verhält, dann müssen alle secundären Arbeiten, die physikalischen und die chemischen, zu welchen die Elektrolyse Gelegenheit giebt, in Rechnung gezogen werden.

Bei der Zersetzung des Wassers zum Beispiel ruft die Energie des Stromes zunächst die Trennung des Sauerstoffs und des Wasserstoffs hervor und dann die Arbeit, die nötig ist, damit die Gase ein bestimmtes Volumen bei dem vorhandenen äusseren Drucke einnehmen.

Rührt der Strom von einer Grove'schen Gaskette her, dann wird dieselbe Arbeit von jedem Elemente geleistet. Ausserdem ist die äussere Arbeit, so lange das Mariotte'sche Gesetz gilt, für dasselbe Gewicht zersetzten Wassers und folglich für denselben Aufwand an Elektricität immer dieselbe. In diesen Grenzen ist die Bedingung des Gleichgewichtes zwischen den Elementen und den Elektrolyten vom Drucke unabhängig.

Für sehr hohe Drucke ist das Mariotte'sche Gesetz weit von der Wahrheit entfernt; die eigene Verbindungswärme des Wasserstoffs und des Sauerstoffs ist ausserdem geändert, und man weiss, dass die Zersetzung durch die Kette dann die Anwendung viel grösserer elektromotorischer Kräfte erfordert. Die Wärme der Wasserbildung ist übrigens eine Funktion der Temperatur und die Bedingungen des Gleichgewichtes in einem Kreise können andere sein, wenn die Elemente und die Elektrolyte verschiedene Temperaturen haben.

Andererseits kann es vorkommen, dass gewisse Produkte der Zersetzung secundäre Einwirkungen erleiden, die von der Wirkung des Stromes unabhängig sind und eine Absorption oder eine Entwicklung von Wärme bedingen. Das schliessliche Resultat der Elektrolyse steht dann nicht mehr in einfacher Beziehung zur elektromotorischen Kraft, und diese kann dann nicht mehr aus der Verbindungswärme der Elemente, die in dem Zustande gemessen wird, in dem sie sich nach der elektrischen Operation befinden, berechnet werden.

257. Elektrochemische Aequivalente. — Sind $A, A', A'' \ldots$ verschiedene Elektrolyte, $p, p', p'' \ldots$ die Gewichte der durch die Elektricitätseinheit zersetzten Mengen jedes einzelnen, so nennt man diese Zahlen die *elektrochemischen Aequivalente* der verschiedenen Körper, und der Versuch zeigt, dass dieselben ihren gewöhnlichen chemischen Aequivalenten proportional sind.

Bezeichnet man mit $a, a', a'' \ldots$ die Verbindungswärme der Gewichtseinheit für jede der Verbindungen, wo die Elemente der Verbindung in dem

Zustande vorausgesetzt sind, in dem sie sich infolge der Einwirkung des Stromes befinden, d. h. ohne Berücksichtigung der secundären Wirkungen, so sind die Produkte ap, $a'p'$, $a''p''$... die Verbindungswärmen der Aequivalente. Mit Benutzung einer Schlussweise, die derjenigen analog ist, die wir für das Wasser durchgeführt haben, sieht man, dass die elektromotorischen Kräfte, die sich auf die verschiedenen Elektrolyte beziehen, durch die Gleichungen bestimmt sind

$$\begin{aligned} H &= Jap, \\ H' &= Ja'p', \\ H'' &= Ja''p'', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welche ergeben

$$\frac{H}{ap} = \frac{H'}{a'p'} = \frac{H''}{a''p''} = \cdots = J.$$

Es folgt, dass *die elektromotorische Kraft eines Elektrolytes dem mechanischen Aequivalent der Verbindungswärme seines elektrochemischen Aequivalents gleich ist.*

258. Gesetz von Ed. Becquerel. — Die Anwendung dieses Faradayschen Gesetzes bietet keine Schwierigkeit, so lange es sich um analoge chemische Verbindungen handelt. Ruft man durch ein und denselben Strom die Zersetzung von Wasser und einer Reihe von neutralen Sulfaten der Protoxyde zum Beispiel hervor, dann ist das elektrochemische Aequivalent eines jeden Metalles das Gewicht, welches bei der Entwicklung eines Gramm Wasserstoff niedergeschlagen wird; aber es kann ein Zweifel eintreten, wenn die Verbindungen nicht dieselbe Formel haben. Bei zwei neutralen Sulfaten, von denen das eine das Protoxyd, das andere das Sesquioxyd des Eisens ist, kann man sich fragen, ob dasselbe Gewicht an Eisen oder dasselbe Gewicht an Sauerstoff in den beiden Elektrolyten in Freiheit gesetzt wird. Ed. Becquerel hat gezeigt, dass *das Metalloïd dem Gesetze folgt:* folglich stehen die Gewichte des Eisens für die beiden Elektrolyte in dem Verhältnis von 3 zu 2. Ebenso verhält es sich mit den Salzen anderer Säuren, den Chloriden, Sulfiden etc.

259. Galvanische Elemente. — Wir betrachten jetzt einen Kreis, der aus verschiedenen Elektrolyten besteht, von denen die einen positive, die andern negative Wirkungen zeigen. Bezeichnet man mit a die Verbindungswärme der Gewichtseinheit für die Elemente der ersten Art, mit b diejenige für die der zweiten Art, mit R den Gesammtwiderstand des Kreises und mit I die Stromintensität, so erhält man

$$\Sigma JapI = \Sigma JbpI + I^2R,$$

oder

$$IR = J\,[\Sigma ap - \Sigma bp].$$

Da das Produkt IR, welches der in dem Kreise im Verhältnisse zu den Widerständen entwickelten Wärme entspricht, seinem Wesen nach positiv ist, kann ein Strom nur vorhanden sein, wenn

$$\Sigma ap > \Sigma bp.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt und sind alle Elektrolyte ursprünglich im neutralen Zustande, so beobachtet man zunächst im Augenblicke des Kreisschlusses einen Strom. Eine unvollständige Zersetzung polarisirt die Elektroden, und der Strom hört auf, sobald die Summe der elektromotorischen Polarisationskräfte den Wert Σap erreicht; das System verbleibt dann im Gleichgewichte. Dieser Fall tritt ein in einem aus einem Daniell'schen Elemente (**263**) und einem Voltameter bestehenden Kreise; die Ersetzung des Kupfers durch Zink im Daniell'schen Elemente liefert 24,2 Calorien, während die Zersetzung des Wassers deren 34,5 erfordert.

260. Depolarisirung durch Diffusion. — Es kann indessen vorkommen, dass man dann dennoch einen schwachen Strom findet. Dieser Strom rührt von folgender Ursache her: die Polarisation der Elektroden zerstreut sich allmählich infolge der Diffusion des Gases; man sieht ein, dass diese Diffusion mehr oder weniger schnell vor sich geht, je nach den Bedingungen des Versuches, und besonders je nach dem Betrage der Polarisation selbst und ihrer Abweichung von dem Maximum ihrer Stärke. Der unter diesen Umständen beobachtete Strom ist der, welcher nötig ist, um die von der Diffusion herrührenden Verluste wieder auszugleichen, und den Gleichgewichtszustand, der dem Maximum der Polarisation für die Bedingungen des Versuches entspricht, aufrecht zu erhalten. So erklären sich die verschiedenen Eigentümlichkeiten, welche die Erscheinungen der Polarisation zeigen.

Verbindet man mit einem Voltameter eine Quelle, deren elektromotorische Kraft nicht ausreicht, dauernd Gas zu entwickeln, so zeigt der Versuch, dass die elektromotorische Polarisationskraft mit der Intensität des dauernden Stromes, von dem eben die Rede gewesen ist, wächst, aber weniger schnell, dass für einen gegebenen Wert dieses Stromes die elektromotorische Polarisationskraft kleiner wird, wenn man die Oberfläche der Elektroden vergrössert, dass endlich die elektromotorische Kraft constant bleibt, wenn die Stromintensität und die Elektrodenfläche in demselben Verhältnisse wachsen.

261. Volta-Element. — Wenige Worte genügen jetzt, die Theorie der Kette vollständig auseinanderzusetzen. Das Volta-Element im engern Sinne besteht aus zwei Platten, einer Zink- und einer Kupferplatte, die in Wasser tauchen, welches durch Zusatz einer kleinen Menge Schwefelsäure oder irgend eines Salzes leitend gemacht ist; die Kupferplatte ist an eine Zinkplatte gelötet, die einen Teil des folgenden Elementes bildet. Zwischen den beiden identischen Grenzmetallen liegen demnach drei Contacte: Zink-Kupfer, Kupfer-Wasser und Wasser-Zink. Die elektromotorische Kraft kann demnach durch folgendes gebräuchliche Zeichen ausgedrückt werden:

$$E = Zn|Cu + Cu|Aq + Aq|Zn.$$

Volta nahm an, dass das Wasser nur die Rolle eines Leiters spielt; dann würde man erhalten

$$Cu|Aq + Aq|Zn = 0$$

und folglich

$$E = Zn|Cu$$

Nach dieser Auffassung würde die elektromotorische Kraft des Volta-Elements nur von dem Zink-Kupfer-Contact abhängen, und bei der Verbindung durch eine Wasserschicht würden diese beiden Metalle dasselbe Potential zeigen, wie wenn sie sich direkt berührten. Die Oberflächenänderung der Metalle infolge der Berührung mit Flüssigkeiten oder mit Gasen macht die genaue Bestätigung der Volta'schen Hypothese sehr schwierig.

Wie dem auch sein möge, diese Aenderung ist so rapide und führt in dem Werte der elektromotorischen Kraft solche Aenderungen herbei, dass man für die Praxis die elektromotorische Kraft des Volta-Elements als zum merklichen Teile von dem Mittel, welches den dritten Hauptteil bildet, abhängig betrachten muss.

Wird das Element durch einen Leiter vom Widerstande R geschlossen, so entsteht ein Strom, dessen Intensität zunächst durch die Beziehung bestimmt ist

$$I = \frac{E}{R};$$

aber das Wasser wird bald zersetzt, der Sauerstoff steigt stromaufwärts und oxydirt die Zinkplatte, der Wasserstoff geht stromabwärts und polarisirt die Kupferplatte; es entsteht infolge dessen eine elektromotorische Gegenkraft. Ist der stationäre Zustand eingetreten, so sind die elektromotorische Polarisationskraft E' und die Intensität I' durch die Gleichung verbunden

$$(E - E')\,I' = I'^2 R,$$

oder

$$I' = \frac{E - E'}{R}.$$

Lässt man das Element ruhen, so verschwindet die Polarisation infolge der Diffusion langsam. Schliesst man nach Verlauf einer gewissen Zeit den Kreis von Neuem, so erscheint der Strom anfangs wieder mit seiner ursprünglichen Intensität I, wenn man den Einfluss der Oxydschicht des Zinks ausser Acht lassen darf, um später nach Verlauf einer im Allgemeinen sehr kurzen Zeit, die allerdings auch ziemlich lang sein kann, wenn die Oberflächen der Elektroden sehr gross sind, und wenn der Widerstand des Kreises beträchtlich ist, wieder die Intensität I' anzunehmen. So lange das Element offen ist, ist die Potentialdifferenz an seinen Enden gleich E.

In einem geschlossenen Elemente ist die nutzbare elektromotorische Kraft nur $E - E'$. Es entsteht in jedem Elemente Zinkoxyd und Wasserstoff auf Kosten des Zinks und des Wassers. Da man annehmen kann, dass

der Sauerstoff bei seiner Wanderung vom Wasser zum Zink durch den Gaszustand hindurchgegangen ist, sieht man, dass die verwendbare Energie des Elementes dem Ueberschuss der Bildungswärme des Zinkoxydes über die des Wassers für dieselbe Gewichtsmenge Sauerstoff entspricht. Ist das Wasser angesäuert, so entspricht diese Differenz der Ersetzung des Sauerstoffs in der Schwefelsäure durch Zink; diese Differenz beträgt ungefähr 17,7 Calorien.

Die Wasserstoffschicht, die das Kupfer bedeckt, hat noch die Wirkung, den Widerstand des Elementes bedeutend zu vergrössern, was eine fernere Ursache der Schwächung des Stromes ist.

262. Nicht polarisirbare Elemente. — Mechanische Mittel, wie das Rühren der Flüssigkeit oder das Reiben der Kupferplatte mit einem von aussen eingeführten Körper, ermöglichen es, durch Beseitigung eines grossen Teiles des Gases den Widerstand und selbst die Polarisation bedeutend zu verkleinern. Aber man kann durch chemische Einwirkung die Gasschicht vollständig beseitigen und so *nicht polarisirbare Elemente* erhalten.

Eine Flüssigkeit, die einfach den Wasserstoff ohne Wärmewirkung lösen würde, würde bereits die elektromotorische Kraft um die ganze Arbeit vergrössern, die das Gas aufwenden muss, um ein bestimmtes Volumen bei dem vorhandenen äusseren Druck einzunehmen; aber wenn der Wasserstoff in eine neue chemische Verbindung eintritt, oder wenn man auch nur die Lösungswärme berücksichtigt, ist die elektromotorische Kraft gleich der algebraischen Summe der an den beiden Elektroden oder an den beiden Polen des Elementes producirten Energieen.

Dieser Art ist zum Beispiel das Joule'sche Element, in welchem die Kupferplatte mit einer Oxydschicht bedeckt ist, welche der Wasserstoff allmählich reducirt. Die elektromotorische Kraft ist gleich der Differenz der Oxydationswärme des Kupfers und des Zinks für dieselbe Gewichtsmenge Sauerstoff.

In andern Fällen enthält die Flüssigkeit die Lösung eines Salzes desjenigen Metalles, welches die positive Elektrode bildet, zum Beispiel eine Lösung von Cadmiumsulfat, in welche eine Zink- und eine Cadmiumplatte tauchen. Die Sulfatlösung unterliegt der Elektrolyse, sobald der Kreis geschlossen ist, und eine dem Gewichte des gelösten Zinks äquivalente Menge Cadmium schlägt sich auf der Cadmiumplatte nieder. Die elektromotorische Kraft entspricht der Wärme der Ersetzung des Cadmiums durch Zink in dem Sulfate, ungefähr 8,3 Calorieen.

Dieser Zustand dauert so lange fort, als das Gewicht des gelösten Zinksulfats nicht so gross ist, dass es selbst an der Elektrolyse Teil nimmt. Von diesem Zeitpunkte an tritt die Polarisation des Elementes ein.

Als Funktion der elektromotorischen Contactkräfte kann die elektromotorische Kraft dieses Elementes durch folgende Symbole ausgedrückt werden:

$$E = Zn|Cd + Cd|CdO.SO_3 + CdO.SO_3|Zn.$$

263. Element mit zwei Flüssigkeiten. — In dem *Daniell'schen Elemente*, das zuerst von Becquerel zusammengestellt ist, wendet man zwei Flüssigkeiten an: eine concentrirte Lösung von Kupfersulfat um die Kupferplatte und eine Lösung von Zinksulfat um die Zinkplatte. Die beiden Flüssigkeiten sind durch eine Membran wie Leder, oder durch eine poröse Thonzelle getrennt, um die Mischung der Lösungen zu verhindern, ohne doch die Leitungsfähigkeit zu unterbrechen.

Die elektromotorische Kraft ist dann

$$D = Zn|Cu + Cu|CuO.SO_3 + CuO.SO_3|ZnO.SO_3 + ZnO.SO_3|Zn.$$

Während die Zinkplatte gelöst wird, schlägt sich das von der Elektrolyse des Kupfersulfats herrührende Kupfer auf der Kupferplatte nieder. Die elektromotorische Kraft entspricht der Differenz der Bildungswärme des Zinksulfats und des Kupfersulfats, d. h. der Wärme der Ersetzung des Kupfers durch das Zink in dem Sulfate, also 24,2 Calorieen.

Dieses Element zeigt eine bemerkenswerte Constanz, und in einem solchen ändert sich die elektromotorische Kraft infolge von Temperaturänderungen am wenigsten.

In dem *Grove'schen Elemente* ist das Kupfer durch Platin ersetzt: der Wasserstoff wird durch Salpetersäure absorbirt und bildet Stickstoffverbindungen von einem niedrigeren Oxydationsgrade, das Zink befindet sich in einer Lösung von Schwefelsäure oder Zinksulfat. Ersetzt man das Platin durch Kohle, so erhält man das *Bunsen'sche Element*.

Die verwendbare Energie in den Grove'schen und Bunsen'schen Elementen entspricht einer Wärmemenge von ungefähr 47 Calorieen, diese besitzen demnach eine elektromotorische Kraft, die nahezu doppelt so gross ist als die der Daniell'schen Elemente; die Flüssigkeiten haben ausserdem einen bedeutend geringeren Widerstand. Man wendet dieselben auch mit Vorliebe immer dann an, wenn man sehr starke Ströme braucht; aber die Flüssigkeiten ändern sich schnell, der Widerstand wird grösser, die elektromotorische Kraft kleiner, und der Strom wird dann sofort schwächer.

264. Elektrostatische Erscheinungen in den Säulen. — Der Name *Säule*, mit dem man gewöhnlich eine Verbindung mehrerer mit einander vereinigter Elemente bezeichnet, rührt von der zuerst von Volta erdachten Form her. Die Volta'sche Säule besteht aus einer Reihe von Kupfer- und Zinkplatten, die in derselben Reihenfolge über einander geschichtet sind, wobei die einzelnen Paare durch angefeuchtete Tuchlappen von einander getrennt sind.

Ein Element besteht aus der Gesammtheit der Körper, die zwischen zwei Zinkplatten vorhanden sind, also aus Kupfer, Wasser und Zink. Man kann sich vorstellen, dass jede Zinkplatte mit je einer Hälfte zwei einander folgenden Elementen angehört.

Beginnt die Säule am unteren Ende mit einer Kupferplatte und endigt sie oben mit einer Zinkplatte, so sieht man, dass die erste Kupferplatte

nicht wirksam ist. Ist die Potentialdifferenz für jedes Element gleich e, so wächst das Potential von unten nach oben, und wenn n Elemente vorhanden sind, dann ist die elektromotorische Kraft E der Kette

$$E = en.$$

265. Nicht isolirte Säule. — Wird die Säule an ihrem unteren Ende mittels eines Leiters, dessen Einfluss vernachlässigt werden kann, mit der Erde verbunden, so erhält das obere Ende A ein Potential $V_a = E = ne$, welches der Anzahl der Elemente proportional ist. Man zeigt dies leicht, entweder mit einem Elektrometer oder durch Messung der einem Condensator mitgeteilten Ladungen.

266. Isolirte Säule. — Ist die Säule, von der wir voraussetzen, dass sie aus identischen und gleich weit von einander entfernten Elementen besteht, überhaupt nicht mit der Erde in Verbindung gebracht, oder wenigstens schon so lange nicht, dass sie ihr Gleichgewicht hat erhalten können, so muss die Gesammtladung Null sein, und die Verteilung der Potentiale muss gegen die Mitte symmetrisch sein.

Man erhält demnach für die Enden A und B oder die beiden Pole

$$V_a + V_b = 0,$$

$$V_a - V_b = E,$$

und folglich

$$V_a = -V_b = \frac{E}{2}.$$

Nehmen wir jetzt an, dass man der Säule ausserdem eine Ladung M' zuführt, so verteilt sich dieselbe, wie sie es auf einem gewöhnlichen Leiter von derselben Form thun würde, und ruft im Innern ein constantes Potential V' hervor, so dass man, wenn man P die Capacität der Kette nennt, erhält

$$V' = \frac{M'}{P}.$$

Da das Potential V' sich in jedem Punkte zu dem ursprünglichen Potential addirt, stört es nicht das Gesetz der Contacte. Man erhält so am oberen Ende A

$$V_a = \frac{E}{2} + V' = \frac{ne}{2} + V',$$

und auf dem mten Elemente, von unten gezählt,

$$V_m = \left(m - \frac{n}{2}\right)e + V'.$$

Wir nehmen jetzt an, dass man das mte Element einer isolirten Säule, deren Gesammtladung Null ist, mit einem Leiter von der Capacität C in

Verbindung bringt. Dieser Leiter erhält dann eine Ladung M; es folgt daraus für die ganze Kette ein Fall V des Potentials, so dass, wenn man mit V_m das neue Potential des betrachteten Elementes bezeichnet, erhalten wird

$$M = CV_m = PV$$

und daher

$$V_a = \frac{E}{2} - V = \frac{E}{2} - \frac{C}{P} V_m = \frac{ne}{2} - \frac{C}{P} V_m.$$

Ausserdem ist

$$V_a - V_m = (n - m)e.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen das Zwischenpotential V_m, so ergiebt sich

$$V_a = e\,\frac{\frac{P}{C}\cdot\frac{n}{2} + n - m}{1 + \frac{P}{C}}.$$

Steht das mte Element mit der Erde in Verbindung, so erhält man augenscheinlich

$$V_a = e\,(n - m).$$

Man könnte in derselben Weise die Verteilung der Potentiale auf einer beliebigen Säule, gleichviel ob dieselbe symmetrisch ist oder nicht, bestimmen. In dem letzteren Falle liegt der neutrale Punkt der isolirten, ungeladenen Säule nicht mehr in der Mitte.

267. Darstellung der Potentiale im Innern der Säule. — Wir stellen die Säule durch eine Gerade so dar, dass jeder Längenteil dem Widerstande des Teiles, den er darstellt, proportional ist, und errichten in jedem Punkte eine Ordinate, die dem Potentiale dieses Punktes proportional ist. Handelt es sich um Voltaelemente, so wächst das Potential bei jedem Zink-Kupfer-Contacte um eine constante Grösse; die Curve wird an den entsprechenden Punkten eine plötzliche und stets dieselbe Aenderung der Ordinate zeigen. Ist die Säule offen, so bleibt das Potential in derselben von einem Contact bis zum nächsten constant, die die Potentiale darstellende Curve besteht aus einer Reihe gleich weit von einander entfernter Sprossen, gleich Stufen einer Treppe. Die Linie des Potentials Null geht durch die Mitte, wenn die Kette isolirt geblieben ist, oder durch irgend einen andern Punkt, wenn dieselbe mit einer Leiter von bestimmter Capacität oder mit der Erde verbunden ist.

Für die geschlossene Säule können drei Fälle eintreten:

1. Der Leiter zwischen den Polen hat einen Widerstand, der gegen den der Säule vernachlässigt werden kann. Die beiden Pole haben merklich dasselbe Potential und jeder Contact ruft dieselbe Potentialdifferenz hervor;

aber von einem Contact zum nächsten tritt ein fortschreitender Fall ein, der überall genau gleich ist. Nennt man n die Anzahl der Elemente und r den Widerstand jedes einzelnen, so ergiebt das Ohm'sche Gesetz

$$I = \frac{ne}{nr} = \frac{e}{r};$$

die Intensität ist dieselbe wie bei einem Element.

2. Der Widerstand der Säule kann gegen den des äusseren Leiters vernachlässigt werden. Die Potentialänderung ist dann im Innern der Säule nahezu dieselbe, als wenn sie offen wäre. Ausserhalb ist das Potentialgefälle ein continuirliches, und wenn R der Widerstand des äusseren Leiters ist, dann ist die Stromintensität

$$I = \frac{E}{R} = \frac{ne}{R};$$

dieselbe ist demnach der Anzahl der Elemente proportional.

3. Ist schliesslich der Widerstand des äusseren Leiters von derselben Grössenordnung wie der der Säule, dann steigt das Potential stets bei jedem Contacte um eine constante Grösse und sinkt in continuirlicher Weise, aber um eine geringere Menge, von einem Contact zum nächsten; die Potentialdifferenz der beiden Pole hat einen endlichen Wert, der kleiner ist als in dem Falle der isolirten Säule, aber um so grösser ist, je grösser der äussere Widerstand ist, und die Stromintensität wird nach dem Ohm'schen Gesetze ausgedrückt durch

$$I = \frac{E}{R + nr}.$$

268. Säule, die in ein leitendes Mittel taucht. — Wir haben bis jetzt angenommen, dass kein Elektricitätsverlust an der Seitenfläche der Säule eintritt. Es kann aber vorkommen, dass dieser Verlust nicht ausser Rechnung gelassen werden darf. Wir nehmen an, dass eine Volta'sche Säule, die aus unendlich dünnen Platten besteht, in ein leitendes Mittel taucht und dass die Elektricität gleichzeitig durch die Seitenwände und durch die Endflächen fliesst; dies wäre der Fall bei einer Säule, die in Wasser taucht, wenn man von der Polarisation absieht. ε sei die elektromotorische Kraft der Kette für die Längeneinheit, ρ der innere und ρ' der äussere Widerstand für die Längeneinheit (**220**).

Die Elektricitätsströmung ist auch jetzt noch in dem grössten Teile eines jeden Normalschnittes der Kette den Achsen parallel, und ein Teil entweicht in jedem Punkte seitlich, so dass die Niveauflächen Ebenen sind, die mit der Seitenfläche zusammenlaufen, wie in Fig. 55.

Zwischen zwei unendlich nahen Punkten P und P', deren Potentiale V und V' sind, genügt die Intensität I des inneren Stromes der Gleichung

$$V' = V + \varepsilon dx - I\rho dx.$$

Die Intensität in jedem Punkte ist demnach durch die Gleichung gegeben

$$(1)\qquad I = \frac{1}{\rho}\left(\varepsilon - \frac{dV}{dx}\right).$$

Wir nehmen jetzt an, der stationäre Zustand sei eingetreten, und betrachten zwei einander folgende Schnitte. Die Elektricitätsströmung I, die durch den ersten geht, ist gleich der Summe der Strömung I', die den zweiten durchfliesst, und der Strömung i, die durch die Seitenfläche entweicht, woraus sich ergiebt

$$I = I' + i$$

oder

$$i = I - I' = -dI$$

Da man aber hat

$$i = \frac{1}{\frac{\rho'}{dx}} V = \frac{Vdx}{\rho'},$$

so folgt nach Gleichung (1)

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{\rho'} V.$$

Setzen wir $\beta^2 = \frac{\rho}{\rho'}$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \beta^2 V = 0,$$

wie für den stationären Zustand eines Drahtes mit Oberflächenverlust (**220**). Um die Constanten des Integrals

$$V = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$$

zu bestimmen, nehmen wir an, dass man die Längen von der Mitte der Kette aus zählt, und dass, da Alles symmetrisch ist, das Potential Null ist für $x = 0$; es folgt

$$V = A(e^{\beta x} - e^{-\beta x}).$$

Nennt man $\pm V_1$ das Potential an den Enden der Säule und l ihre Länge, so ergiebt sich

$$V = V_1 \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\frac{\beta l}{2}} - e^{-\frac{\beta l}{2}}}.$$

269. — Die Stromintensität in der Säule und die des seitlichen Stromes i haben die Werte

$$I = \frac{1}{\rho}\left(\varepsilon - \frac{dV}{dx}\right) = \frac{1}{\rho}\left[\varepsilon - \frac{V_1\beta}{e^{\frac{\beta l}{2}} - e^{-\frac{\beta l}{2}}}\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)\right],$$

$$i = \frac{V}{\rho'}dx = \frac{1}{\rho'}\frac{V_1}{e^{\frac{\beta l}{2}} - e^{-\frac{\beta l}{2}}}\left(e^{\beta x} - e^{-\beta x}\right)dx.$$

Um das Potential $\pm V_1$ an den Endflächen zu bestimmen, muss man die Intensität I_1 des Stromes auswerten, der sich durch jede derselben ergiesst.

Man erhält dann, wenn man wieder R_1 den Widerstand des umgebenden Mittels von jenen Endflächen ab nennt,

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{1}{\rho}\left[\varepsilon - \frac{V_1\beta}{e^{\frac{\beta l}{2}} - e^{-\frac{\beta l}{2}}}\left(e^{\frac{\beta l}{2}} + e^{-\frac{\beta l}{2}}\right)\right],$$

woraus sich ergiebt

$$\text{(4)}\qquad \frac{V_1}{e^{\frac{\beta l}{2}} - e^{-\frac{\beta l}{2}}} = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\rho}{R_1} + \beta\right)e^{\frac{\beta l}{2}} - \left(\frac{\rho}{R_1} - \beta\right)e^{-\frac{\beta l}{2}}},$$

$$\text{(5)}\qquad I = \frac{\varepsilon}{\rho}\left\{1 - \frac{\beta}{\left(\frac{R_1}{\rho} + \beta\right)e^{\frac{\beta l}{2}} - \left(\frac{R_1}{\rho} - \beta\right)e^{-\frac{\beta l}{2}}}\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)\right\}.$$

Ist das äussere Mittel isolirend, also $\rho' = \infty$ und $\beta = 0$, dann erscheint die rechte Seite des Ausdrucks für I in unbestimmter Form, aber man findet schliesslich die einfache Formel

$$I = \frac{l\varepsilon}{\rho l + 2R_1} = \frac{E}{\rho l + 2R_1}.$$

Der Gesammtwiderstand der Säule und des Mittels vom Punkte P ab ist noch gegeben (**222**) durch den Ausdruck

$$\frac{R - \sqrt{\rho\rho'}}{R + \sqrt{\rho\rho'}} = \frac{1}{C_1}e^{-2\beta x}.$$

Man kann die Constante C_1 durch die Bedingung bestimmen, dass dieser Widerstand gleich R_1 wird für $x = \frac{l}{2}$, woraus sich ergiebt

$$C_1 = \frac{R + \sqrt{\rho\rho'}}{R_1 - \sqrt{\rho\rho'}}e^{-\beta l}.$$

270. Elektrocapillare Erscheinungen. — Die zuletzt angeführten Versuche haben gezeigt, dass jede Veränderung der Contactfläche zweier Körper eine Aenderung der elektromotorischen Kraft herbeiführt. Dieses Gesetz kann als ein allgemeines angesehen werden, und man muss a priori annehmen, dass eine Beziehung besteht zwischen den elektromotorischen Contactkräften zweier Körper und jeder andern von dem Zustande der Oberflächen abhängigen Eigenschaft.

Wendet man zum Beispiel eine Quecksilberfläche als negative Elektrode zur Wasserzersetzung an, so wird das Quecksilber polarisirt, d. h. die Potentialdifferenz des Contactes der beiden Flüssigkeiten wird immer grösser mit der äusseren elektromotorischen Kraft, bis die Entwicklung von Gasblasen beginnt. Die capillaren Eigenschaften des Quecksilbers, also die Oberflächenspannung, hängen lediglich von dem Zustande der Oberfläche ab und müssen sich folglich mit der Polarisation ändern.

Die Versuche von Lippmann haben gezeigt, dass es sich in der That so verhält. Die capillare Spannung des mit dem angesäuerten Wasser in Contact befindlichen Quecksilbers wächst zunächst mit der elektromotorischen Polarisationskraft, bis diese 0,9 der elektromotorischen Kraft eines Daniellschen Elements erreicht, und wird dann kleiner in dem Verhältnisse, als die Polarisation grösser wird.

Die Theorie und der Versuch zeigen, dass auch das Umgekehrte richtig ist. Wenn man durch irgend einen mechanischen Prozess die Form der Oberfläche des Quecksilbers ändert und damit die Oberflächenspannung an der Berührungsstelle der beiden Flüssigkeiten sich verändern lässt, dann ändert sich zugleich auch die Potentialdifferenz; während der Formveränderung ändert sich das Potential in der Weise, dass die ihm entsprechende Oberflächenspannung sich der hervorgerufenen Bewegung zu widersetzen strebt.

4. Capitel.

Thermoelektrische Ströme.

271. Entdeckung von Seebeck. — Wir haben gesehen, dass ein geschlossener Kreis, der aus mehreren Metallen von derselben Temperatur besteht, keine Veranlassung zu einem Strome geben kann; aber dieses Gesetz ist nicht mehr wahr, wenn die verschiedenen Punkte des Kreises, namentlich die Lötstellen der Metalle nicht mehr dieselbe Temperatur haben. Der Kreis wird dann von einem Strome durchflossen, den man thermoelektrischen Strom nennt.

Diese wichtige Entdeckung verdankt man Seebeck (1821).

In einem Kreise, der aus einem Wismuthstück besteht, dessen Enden durch einen Kupferstab verbunden sind, geht der Strom vom Wismuth zum Kupfer durch die warme Lötstelle hindurch; man nennt das Kupfer negativ gegen Wismuth. In einem Elemente Antimon-Kupfer ist der Strom ein umgekehrter, derselbe geht vom Kupfer zum Antimon durch die heisse Lötstelle; das Antimon ist gegen Kupfer negativ.

Es liegt nahe, anzunehmen, dass die Metalle sich von diesem neuen Gesichtspunkte aus in eine regelmässige Reihe ordnen lassen, und dass das gegen das Kupfer negative Antimon um so mehr negativ ist gegen Wismuth. Der Versuch bestätigt dies auch, und die elektromotorische Kraft für dieselben Temperaturen der Lötstellen erweist sich grösser in dem Elemente Wismuth-Antimon als in den beiden Elementen Wismuth-Kupfer oder Kupfer-Antimon.

Die elektromotorische Kraft eines thermoelektrischen Elementes kann man finden, indem man den Kreis ausserhalb der Lötstellen durchbricht und die Potentialdifferenz der beiden so isolirten Stücke bestimmt.

In einem geschlossenen Kreise, der aus einem homogenen Metall besteht, ist es unmöglich, durch Temperaturänderungen einen Strom hervorzurufen, welches auch im Uebrigen Form und Querschnitt des Leiters in der Nähe der erhitzten Punkte sein mögen. Dagegen kann man wohl einen Strom erzeugen, wenn das Metall einen dauernden oder vorübergehenden Mangel an Symmetrie in Bezug auf seine physikalischen Eigenschaften zu beiden Seiten der erhitzten Punkte zeigt.

272. Gesetze der thermoelektrischen Ströme. — Ohne die Versuche zu besprechen, welche diese Eigenschaften klar legten, und die dazu gedient haben, die Gesetze der Erscheinung festzustellen, beschränken wir uns darauf, diese Gesetze selbst kurz vorzuführen.

I. Volta'sches Gesetz. — *In einem metallischen Kreise, dessen sämmtliche Punkte dieselbe Temperatur besitzen, ist, aus wie verschiedenartigen Metallen derselbe auch bestehen mag, nie ein Strom vorhanden.*

Denn die algebraische Summe aller elektromotorischen Contactkräfte ist dann notwendig Null, da die Metalle dem Spannungsgesetze unterworfen sind (**189**).

II. Gesetz von Magnus. — *In einem homogenen Kreise ist nie ein dauernder Strom vorhanden, welches auch die Form des Leiters und die Temperaturänderungen sein mögen, die zwischen den verschiedenen Punkten des Kreises existiren.*

Dieses Gesetz schliesst als Folgerung das ein, dass einerseits die Art, wie man die Temperatur von einem Punkte zu einem andern ändert, keine Potentialdifferenz zwischen diesen beiden Punkten bestimmt, dass andrerseits, wenn eine solche vorhanden ist, dieselbe nur von den Temperaturen selbst und in keiner Weise von dem Aenderungsgesetze derselben abhängt.

Denn der Temperaturabfall kann von dem wärmeren Punkte des Kreises bis zum kälteren in zwei Fällen gleich gross sein, während die Aenderungen der Temperatur nach von einander vollkommen unabhängigen Gesetzen erfolgen. Sind nun Potentialdifferenzen in dem Kreise vorhanden und beträgt ihre Gesammtsumme Null, so muss demnach zwischen den beiden Temperaturen t und t' in den beiden Teilen, in welche der Kreis durch die beiden betrachteten Punkte geteilt ist, die Potentialänderung dieselbe sein, welches auch der Abstand der beiden Punkte P und P' sein möge, zwischen denen der Temperaturfall vorhanden ist.

Aus dem Gesetze von Magnus folgt, *dass die elektromotorische Kraft nur von der Temperatur der beiden Lötstellen und keineswegs von der Temperaturverteilung in den dieselben trennenden Leitern abhängt;* denn die Potentialdifferenz an den beiden Enden eines homogenen Leiters hängt nur von der Temperatur dieser Endstellen ab.

Wir wollen durch $E_t^{t'}(AB)$ die elektromotorische Kraft der beiden Metalle A und B darstellen, wenn die Lötstellen die Temperaturen t und t' besitzen, wobei der Strom von A nach B durch die heissere Lötstelle von der Temperatur t' gehen soll. Diese elektromotorische Kraft ist eine Funktion der beiden Temperaturen t und t'.

III. Gesetz der successiven Temperaturen (Becquerel). — *Für ein gegebenes Element ist die auf zwei beliebige Temperaturen t und t' zweier Lötstellen bezügliche elektromotorische Kraft gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte, die den Temperaturen t und θ einerseits und θ und t' andererseits entsprechen, wo θ eine zwischen den beiden ersteren liegende Temperatur ist.*

Dieses Gesetz kann ausgedrückt werden durch

$$E_t^{t'} = E_t^{0} + E_0^{t'}.$$

Wir wissen schon, dass die elektromotorische Kraft nur von den Temperaturen der Lötstellen abhängt; das letzte Gesetz zeigt, dass die elektromotorische Kraft durch die Differenz zweier Ausdrücke dargestellt werden kann, von denen der erste nur die Temperatur t, der zweite nur die Temperatur t' enthält, wobei diese beiden Ausdrücke die Werte derselben Funktion der Temperatur sind.

Man kann demnach setzen

$$E_t^{t'} = F(t') - F(t).$$

IV. Gesetz der Zwischenmetalle (Becquerel). — *Wenn zwei Metalle A und B in einem Kreise durch ein oder mehrere Zwischenmetalle getrennt sind, während alle Lötstellen auf derselben Temperatur t gehalten werden, dann ist die elektromotorische Kraft dieselbe, als wenn die beiden Metalle direkt verbunden wären und die Lötstelle auf dieselbe Temperatur t gebracht wäre.*

Das Gesetz der Zwischenmetalle kann durch die Gleichung ausgedrückt werden

$$E_t^{t'}(AB) = E_t^{t'}(AC) + E_t^{t'}(CB).$$

Denn wenn zwei Metalle A und B an der heissen Lötstelle durch ein Zwischenmetall C verbunden sind, kann man nach dem Gesetze von Magnus sich vorstellen, dass ein Punkt P dieses dritten Metalles die niedrigere Temperatur t besitzt, und ebenso an der kalten Lötstelle ein Metallstück C einschieben, welches auf der Temperatur dieser Lötstelle gehalten wird. Man erhält dann in dem Kreise zwischen denselben Temperaturgrenzen die beiden Elemente AC und CB; die resultirende elektromotorische Kraft ist die, welche direct zwischen den Metallen A und B wirksam werden würde.

Dieses Gesetz hat eine grosse praktische Wichtigkeit: dasselbe zeigt, dass das Lötmittel, welches zur Verbindung der beiden Metalle dient, keinen Einfluss auf die Erscheinungen übt, die zwischen ihnen auftreten.

V. Umkehrerscheinungen. — Für gewisse thermoelektrische Elemente wird die Stromintensität stetig grösser, wenn man die Temperatur der heissen Lötstelle steigert, während die der kalten Lötstelle unverändert bleibt. Das Element heisst ein solches von *gleichmässigem Gang,* wenn die elektromotorische Kraft der Temperaturdifferenz der beiden Lötstellen proportional ansteigt.

In den meisten Fällen aber wird die elektromotorische Kraft des Elementes, nachdem sie ein Maximum erreicht hat, Null und ändert dann ihr Zeichen.

Es tritt demnach von einer bestimmten Temperatur an eine *Umkehrung* des Stromes ein, und die Intensität wird dann stetig grösser, ohne eine

neue Einbiegung zu erleiden. Diese Erscheinung ist von Cumming im Jahre 1823 entdeckt worden.

Gaugain hat gefunden, dass die Umkehrtemperatur von der Temperatur der kalten Lötstelle abhängt, und dass *für ein gegebenes Element das Mittel der Temperaturen der beiden Lötstellen im Augenblicke der Umkehr constant und stets gleich der Temperatur ist, welche der heissen Lötstelle zukommt, wenn bei gleichbleibender Temperatur der kalten die Intensität ihren grössten Betrag erreicht.*

273. Graphische Darstellung der Erscheinungen. — Gaugain stellt in einer bemerkenswerten Arbeit über die thermoelektrischen Erscheinungen den Gang derselben durch eine Zeichnung dar, die leicht die eben behandelten Gesetze zur Anschauung bringt. Als Abscisse nimmt er die Temperaturdifferenz $t - t_0$ der beiden Lötstellen (unter der Voraussetzung, dass die kalte Lötstelle eine constante Temperatur von 20° besitzt) und als Ordinate errichtet es in jedem Punkte ein Lot, welches der entsprechenden elektromotorischen Kraft proportional ist.

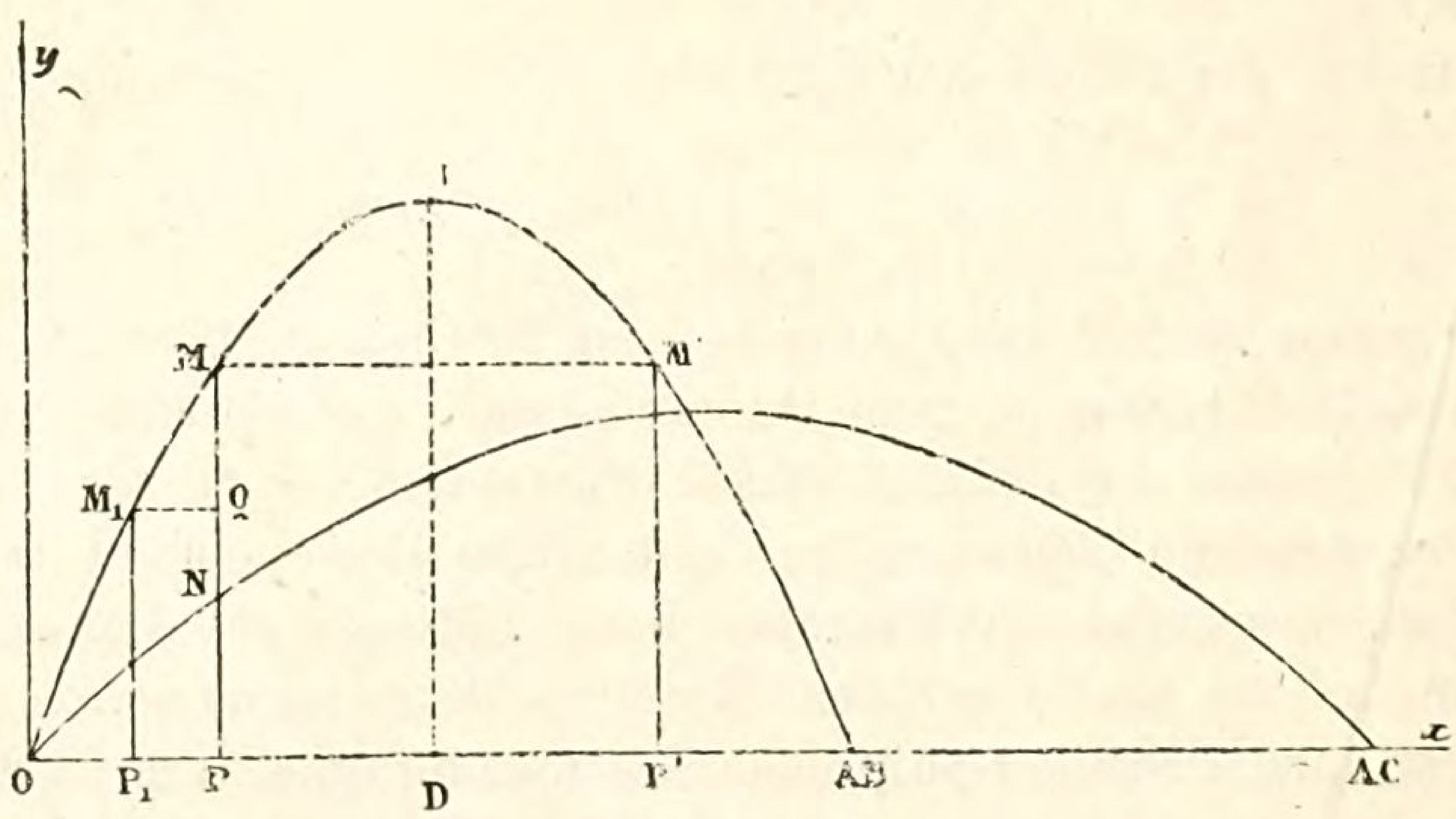


Fig. 63.

Man bemerkt an diesen Curven (Fig. 63) folgende Eigenschaften:

1. Sie sind symmetrisch gegen die Maximumsordinate, was das auf die Umkehrtemperatur bezügliche Gesetz bestätigt; denn man findet, wenn man t_m diese Maximumstemperatur und t_i die Umkehrtemperatur nennt,

$$t_m = \frac{t_0 + t_i}{2}.$$

Diese Curven sind von Gaugain als die Zweige von Hyperbeln mit verticaler Achse berechnet, aber man kann dieselben auch durch Parabeln ersetzen; die Differenzen der nach beiden Curvenarten für dasselbe Element berechneten Ordinaten sind von der Ordnung der Beobachtungsfehler; beide stellen die Versuche gleich gut dar. Die Theorie zeigt, wie wir weiter

sehen werden, dass die Curve, welche die elektromotorischen Kräfte als Funktion der Temperatur darstellt, in der That eine Parabel sein muss.

2. Legt man durch einen Punkt M_1, welcher der Temperatur t_1 entspricht, eine Horizontale, so stellen die von dieser Geraden aus gemessenen Ordinaten die auf die Temperatur t_1 der kalten Lötstelle bezüglichen elektromotorischen Kräfte dar. Das Gesetz der successiven Temperaturen zeigt sich so bestätigt, da man erhält

$$MP = MQ + QP = MQ + M_1P_1,$$

das heisst

$$E_{t_0}^{t} = E_{t_0}^{t_1} + E_{t_1}^{t}.$$

Die Umkehrtemperatur entspricht dem Punkte, wo die neue Abscissenachse die Curve schneidet. Stellt OP die Temperatur der kalten Lötstelle dar, dann ist OP' die der Umkehr; man sieht, dass dieselbe von der Temperatur der kalten Lötstelle abhängt.

3. Wenn zwei Curven AB und AC die elektromotorischen Kräfte für Elemente darstellen, die aus einem Metall A bestehen, welches bez. mit den beiden Metallen B und C verbunden ist, dann stellt die Differenz MN der Ordinaten der beiden Curven die elektromotorische Kraft des aus den beiden Metallen B und C bestehenden Elementes dar. Die Beziehung $MP = PN + NM$ ist demnach mit der Gleichung

$$E(AB) = E(AC) + E(CB)$$

gleichwertig, welche das Gesetz der Zwischenmetalle darstellt.

274. Folgerungen aus dem Volta'schen Princip. — Sieht man von der Erscheinung der Umkehr ab, so kann man die eben aufgestellten Gesetze als Folgerungen aus dem Volta'schen Princip auffassen, dass nämlich *an der Berührungsstelle zweier Metalle eine elektromotorische Kraft vorhanden ist, und dass diese elektromotorische Kraft eine Funktion der Temperatur ist.*

Nach dieser Anschauungsweise ist die elektromotorische Kraft eines Elementes die algebraische Summe der beiden einander entgegengesetzten elektromotorischen Kräfte, die bez. an den beiden Lötstellen vorhanden sind.

Wir wollen durch das Symbol $\frac{A|B}{t}$ die elektromotorische Berührungskraft H der beiden Metalle A und B bei der Temperatur t darstellen, dann erhalten wir

$$E_{t_1}^{t_2}(AB) = \frac{B|A}{t_2} - \frac{B|A}{t_1} = H_2 - H_1.$$

Ist I die Intensität des Stromes, der durch den Kreis fliesst, dessen Gesammtwiderstand R ist, so wird der heissen Lötstelle die Arbeit IH_2 entnommen, der kalten Lötstelle die Arbeit IH_1 zugeführt; die Differenz dieser

Arbeiten ist in Wärmeenergie umgesetzt, die sich längs des Kreises nach dem Joule'schen Gesetze entwickelt, und man erhält demnach

$$IH_2 = IH_1 + I^2R,$$

oder

$$I = \frac{H_2 - H_1}{R}.$$

Das System kann demnach wie eine thermische Maschine aufgefasst werden, deren Wärmequelle eine durch die Gleichung $IQ_2 = IH_2$ gegebene Wärmemenge liefert, und deren Condensator eine kleinere Menge Q_1 verbraucht, die ebenso durch die Gleichung $IQ_1 = IH_1$ bestimmt ist, während die Differenz dieser beiden Mengen zur Erwärmung des Kreises verwandt wird, woraus sich ergiebt

$$I(Q_2 - Q_1) = I^2R.$$

Das Gesetz von Magnus ist zugleich in der Annahme enthalten, dass nur an den Lötstellen eine elektromotorische Kraft vorhanden ist.

Das Gesetz der successiven Temperaturen folgt aus der Identität

$$E_{t_1}^{t_2}(AB) = \frac{B|A}{t_2} - \frac{B|A}{0} + \frac{B|A}{0} - \frac{B|A}{t_1} = E_0^{t_2} + E_{t_1}^0.$$

Endlich ist das Gesetz der Zwischenmetalle gleichfalls klar, denn man erhält nach der Definition

$$E_{t_1}^{t_2}(AC) + E_{t_1}^{t_2}(CB) = \frac{C|A}{t_2} - \frac{C|A}{t_1} + \frac{B|C}{t_2} - \frac{B|C}{t_1}.$$

Andererseits ergiebt das Volta'sche Spannungsgesetz für jede Temperatur

$$\frac{B|C}{t} + \frac{C|A}{t} = \frac{B|A}{t};$$

die letzte Gleichung geht demnach über in

$$E_{t_1}^{t_2}(AC) + E_{t_1}^{t_2}(CB) = \frac{B|A}{t_2} - \frac{B|A}{t_1} = E_{t_1}^{t_2}(AB).$$

275. Folgerungen aus der Umkehr des Stromes. — Immerhin reicht das Volta'sche Princip, welches auf den Contact von Körpern von differenter Natur beschränkt ist, nicht aus, um die Erscheinungen der Umkehr zu erklären.

Denn fassen wir einen aus zwei Metallen A und B zusammengesetzten Kreis in's Auge, so müsste man, um von der Umkehr mit Hilfe der blossen Contactwirkungen Rechenschaft zu geben, annehmen, dass die Potentialdifferenz H_2 an der heissen Lötstelle anfangs mit der Temperatur wächst,

durch ein Maximum geht, dann abnimmt und für die Umkehrtemperatur der Potentialdifferenz H_2 der kalten Lötstelle gleich wird; von da ab würde der Wert von H_2 beständig abnehmen. Dann müsste, sobald der Strom sein Zeichen gewechselt hat, das Spiel der elektrischen Kräfte an der heissen Lötstelle eine Entwicklung von Wärme, an der kalten Lötstelle eine Absorption erzeugen, abgesehen von der Erwärmung des Kreises vermöge des Joule'schen Gesetzes. Stellt man sich nun vor, dass die Ursachen der Abkühlung des Kreises durch Strahlung so weit abgeschwächt sind, dass der Kreis seine Temperatur nicht merklich ändert, wenn man die Wärmequelle fortlässt, so würde der blosse Durchgang des Stromes genügen, die Temperatur der heissen Lötstelle nicht bloss aufrecht zu erhalten, sondern sie sogar zu heben und die der kalten Lötstelle zu erniedrigen, was zum Resultat haben würde, dass der Strom sich ohne Grenze verstärken würde. Man hätte so einen metallischen Kreis hergestellt, der die besondere Eigenschaft besässe, Wärme von kälteren Punkten auf wärmere überzuführen ohne irgend welchen Aufwand von Energie. Wenn die Unmöglichkeit dieser Aufgabe auch nicht so selbstverständlich ist wie die des perpetuum mobile, so ist doch ein solches Resultat mit dem allgemeinen Gang der Wärmeerscheinungen unvereinbar; dasselbe steht übrigens in direktem Widerspruch zum Carnot'schen Princip.

Würden die thermoelektrischen Ströme nur von den elektromotorischen Contactkräften der Lötstellen herrühren, so würde das Carnot'sche Princip erfordern, dass alle Elemente einen gleichförmigen Gang besitzen.

Denn nehmen wir an, dass eine thermoelektrische Kette, die zwischen den Temperaturen t_1 und t_2 funktionirt, mit einem Elektrolyt verbunden wird, dessen elektromotorische Zersetzungskraft E ist, so erhält man die Beziehung

$$IH_2 - IH_1 = I^2R + IE,$$

oder

$$I(Q_2 - Q_1) = I^2R + IE.$$

Ist die Stromintensität I sehr klein, der Widerstand R aber ein mittlerer, so kann man von dem Gliede I^2R absehen, die elektromotorische Gegenkraft E ist wenig kleiner als $H_2 - H_1$ und der Ueberschuss der von der heissen Quelle gelieferten Wärme wird zur Erzeugung der äusseren Arbeit IE verwendet. Nehmen wir an, dass man durch irgend ein Mittel E bis zu einem Werte E' wachsen lässt, der sehr wenig grösser als $H_2 - H_1$ ist, dann wird der Strom sein Zeichen wechseln; ist der absolute Wert der Intensität derselbe geblieben, so werden auch jetzt noch dieselben Wärmemengen an jeder Lötstelle in's Spiel gebracht, aber in entgegengesetzten Richtungen, und das Elektrolyt wird diesmal Wärme erzeugen, statt solche zu absorbiren. In dem Falle eines sehr schwachen Stromes verhält sich demnach die thermoelektrische Kette wie eine umkehrbare thermische Maschine, und man kann auf dieselbe das Carnot'sche Princip anwenden. Sind T_1 und T_2 die

absoluten Temperaturen der Lötstellen, so müssen die je nach der Wirkungsweise der Maschine von den beiden Quellen gelieferten oder absorbirten Wärmemengen Q_1 und Q_2 den absoluten Temperaturen T_1 und T_2 proportional sein, und man muss erhalten

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1},$$

oder

$$\frac{H_2}{T_2} = \frac{H_1}{T_1} = A,$$

wo A eine Constante ist.

Es würde hieraus folgen

$$\frac{H_2 - H_1}{T_2 - T_1} = \frac{E_{t_1}^{t_2}}{T_2 - T_1} = A,$$

und folglich

$$E_{t_1}^{t_2} = A(T_2 - T_1).$$

Die elektromotorische Kraft müsste demnach für alle Elemente der Temperaturdifferenz der beiden Lötstellen proportional sein; alle Elemente würden einen gleichmässigen Gang haben, und insbesondere dürfte die Umkehrerscheinung des Stromes nie eintreten.

276. Theorie von Sir W. Thomson. — Das Volta'sche Princip kann demnach nicht zur vollständigen Erklärung der thermoelektrischen Erscheinungen ausreichen; man muss die Existenz anderer elektromotorischer Kräfte als die infolge des Contactes annehmen, die im Stande sind, wie diese umkehrbare Wärmeerscheinungen zu liefern.

Die kleinsten Aenderungen im physikalischen Zustande der Metalle, wie Härtung, Tordirung, Dehnung etc., ändern deren elektrische Eigenschaften; es liegt demnach nahe, das Volta'sche Princip zu verallgemeinern und anzunehmen, dass der Contact zwischen zwei Teilen desselben Metalles von verschiedenen Temperaturen ebenfalls eine Potentialdifferenz veranlasst.

Die elektromotorische Kraft, die von den Temperaturänderungen herrührt, ist Null in einem homogenen Drahte (Gesetz von Magnus), weil das Gesammtgefälle des Potentials zu beiden Seiten des Maximums denselben Wert hat; aber diese Compensirung hört zu beiden Seiten der Lötstelle zweier verschiedener Metalle auf, und man muss die stetige Potentialänderung, welche die Temperaturänderungen längs der Leiter bedingen, in Rechnung ziehen.

Um einen bestimmten Fall im Auge zu haben, betrachten wir ein Element Kupfer-Eisen zum Beispiel, welches zwischen den Temperaturen t_1 und t_2 funktionirt; H_1 und H_2 (Fig. 64) seien die elektromotorischen Contactkräfte bei diesen beiden Temperaturen; wir nehmen ausserdem an, dass längs des Kupfers *Cu* infolge der Temperaturerhöhung von t_1 bis t_2

das Potential um eine Grösse c gewachsen ist, die von der Stromintensität unabhängig ist, dass umgekehrt auf dem Eisen *Fe* für denselben Temperaturunterschied eine Erniedrigung f des Potentials eintritt; das Potential in der Nähe der heissen Lötstelle hat sich demnach um die Grösse $f + c = h$ gehoben, und die elektromotorische Kraft des Elementes ist jetzt

$$E = H_2 + h - H_1.$$

Wir haben hierbei implicite die Annahme gemacht, dass die Temperatur t_2 unterhalb der Umkehrtemperatur liegt. Der Strom geht vom Kupfer zum

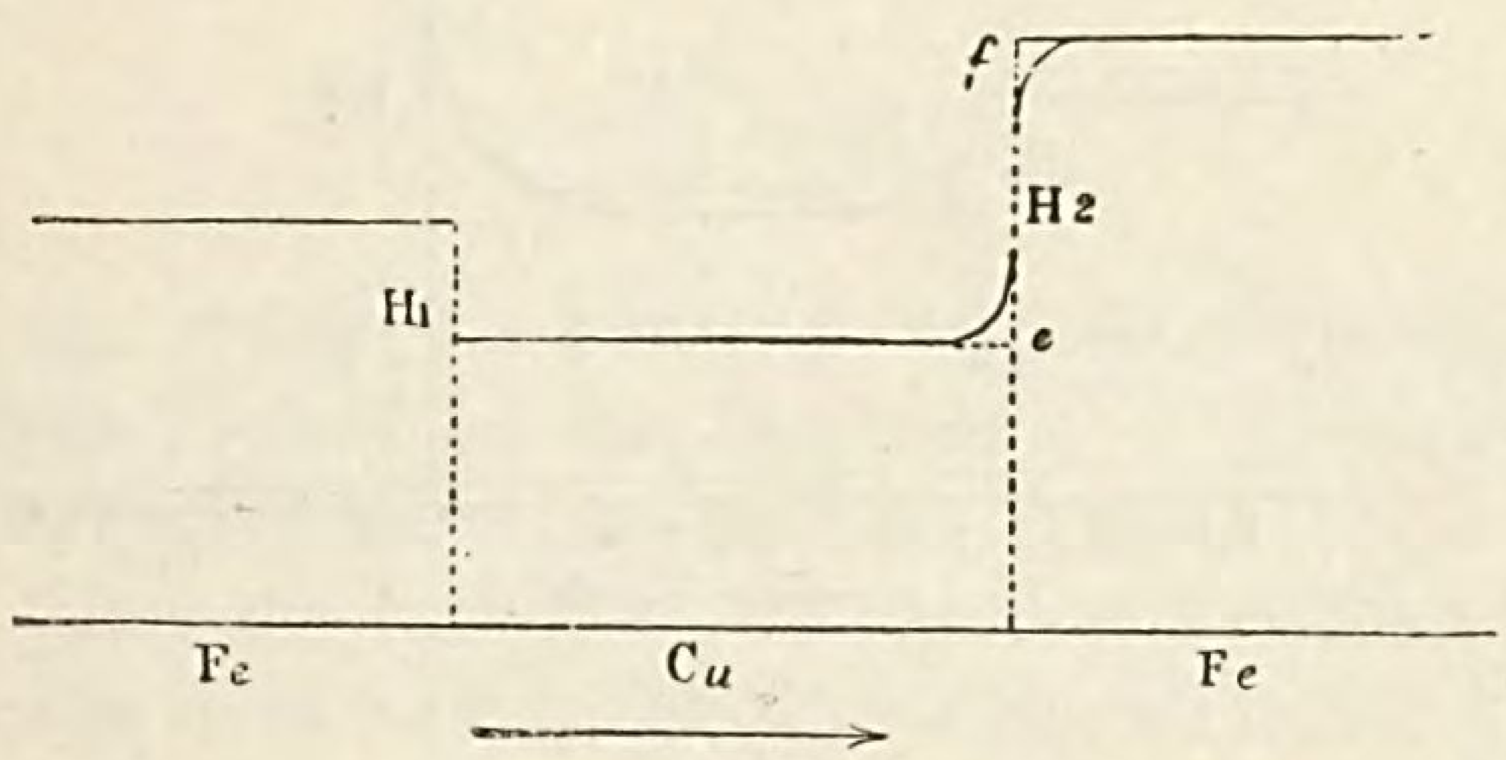


Fig. 64.

Eisen durch die heisse Lötstelle; die an der heissen Lötstelle wie in den dieser benachbarten Punkten absorbirte Wärmeenergie ist gleich $(H_2 + h)\, I$ und die an der kalten Lötstelle ausgegebene ist $H_1 I$.

Bleibt die niedrigere Temperatur t_1 fest, so wird die elektromotorische Kraft des Elementes so lange grösser, als die Summe $H_2 + h$ wächst, d. h. so lange

$$\frac{dH_2}{dt} + \frac{dh}{dt} > 0$$

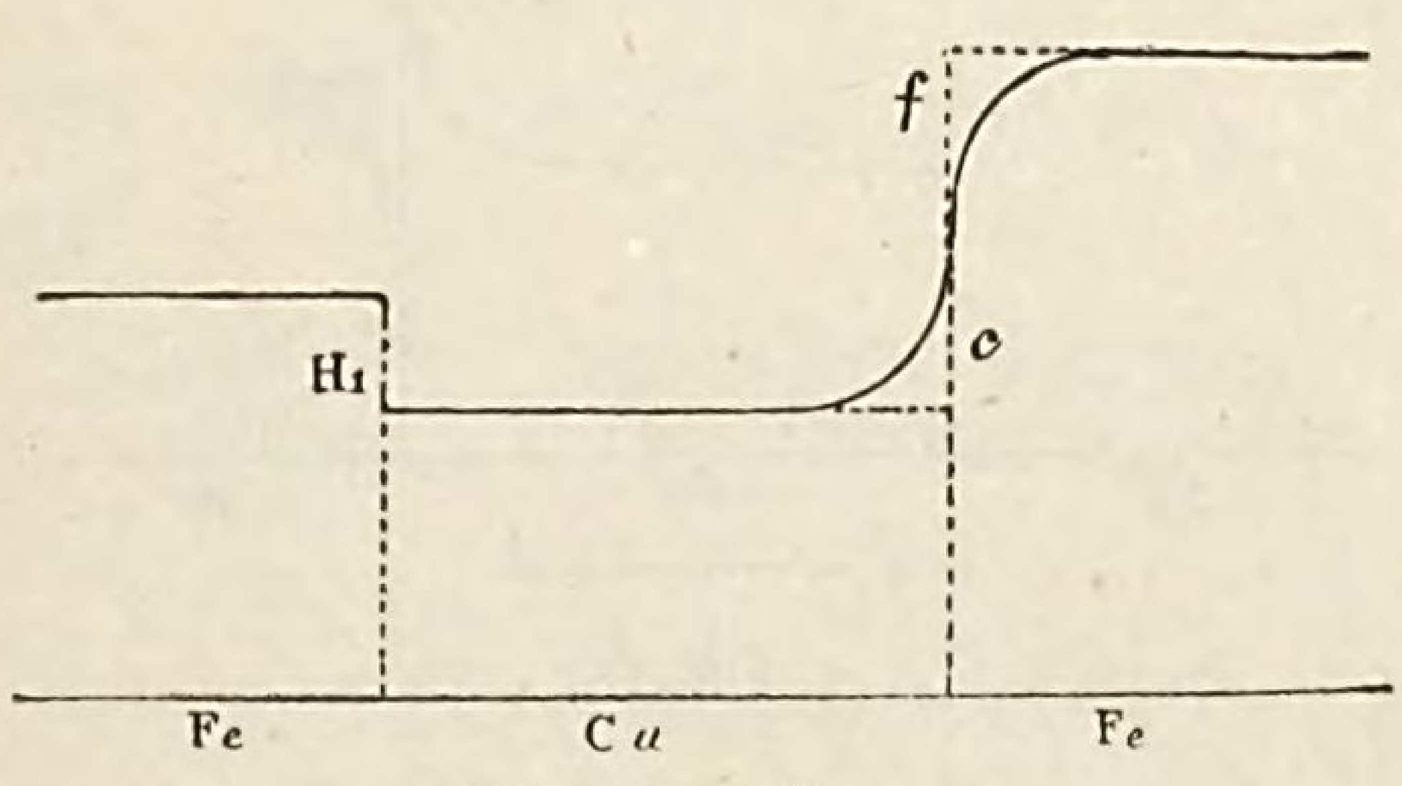


Fig. 65.

ist, und das Maximum tritt augenscheinlich bei der Temperatur t_m ein, welche durch die Gleichung gegeben ist

$$\frac{dH_2}{dt} + \frac{dh}{dt} = 0.$$

Wir werden sehen, dass dann H_2 Null ist und später negativ wird. Die Potentialdifferenz in der Nähe der Lötstelle rührt dann allein von den Temperaturänderungen auf den beiden Metallen her (Fig. 65).

Wächst die Temperatur weiter, so ändert H_2 das Zeichen; das vorher gegen das Kupfer positiv gewesene Eisen wird negativ; die Verteilung des Potentials wird durch Figur 66 wiedergegeben, und es entwickelt sich an beiden Lötstellen Wärme.

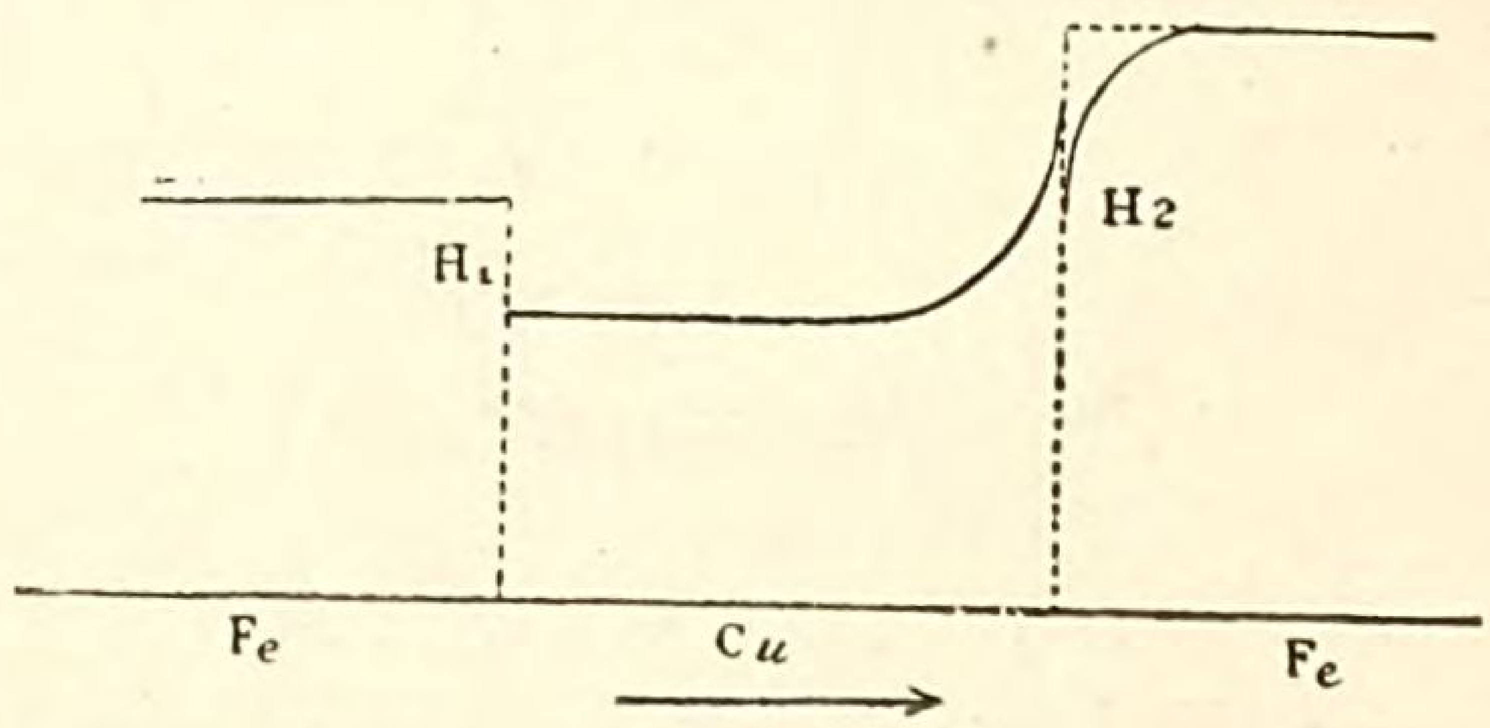


Fig. 66.

Die Umkehr tritt ein, wenn

$$H_2 + h = H_1$$

ist. Für eine höhere Temperatur an der heissen Lötstelle wechselt die elektromotorische Kraft das Zeichen, und man erhält

$$H_2 + h < H_1.$$

In diesem Falle, der durch Figur 67 dargestellt wird, absorbirt der Strom

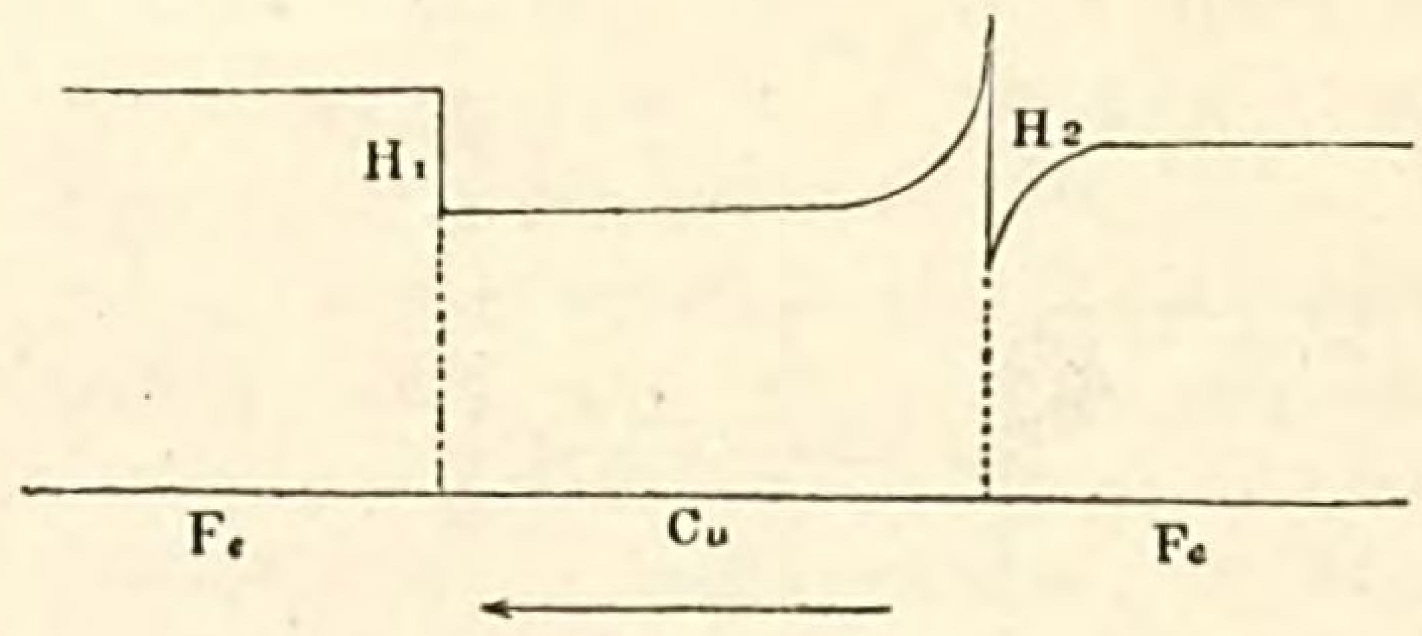


Fig. 67.

an beiden Lötstellen Wärmeenergie, IH_2 an der heissen, IH_1 an der kalten Lötstelle, und eine Menge Ih wird an den Stellen frei, wo die Temperatur veränderlich ist.

Dies ist der allgemeine Gang der Theorie von Sir W. Thomson, deren mathematische Consequenzen wir jetzt auseinandersetzen wollen. Wir nennen *Thomson'sche Wirkung* die von Temperaturänderungen herrührenden Potentialdifferenzen, die ja die Grundlage dieser Theorie bilden.

277. Thermoelektrische Kräfte. — Wir haben gesehen, dass nach dem Gesetze der successiven Temperaturen die elektromotorische Kraft eines Elementes die Differenz der Werte einer und derselben Funktion der Temperaturen der beiden Lötstellen ist. Sind diese Temperaturen t und $t + dt$ einander unendlich nahe, so ist die elektromotorische Kraft auch unendlich klein und wird ausgedrückt durch

$$dE = F(t + dt) - F(t) = \frac{dF}{dt}\,dt;$$

man kann also setzen

$$\frac{dE}{dt} = \varphi(t). \tag{1}$$

W. Thomson nennt die Funktion $\varphi(t)$ *die thermoelektrische Kraft der beiden betrachteten Metalle bei der Temperatur* t. Diese Funktion ist nichts anderes als der Winkelcoefficient der Tangente der Gaugain'schen Curven. Man leitet aus derselben die elektromotorische Kraft des Elementes für die Temperaturen t_1 und t_2 der Lötstellen ab durch die Formel

$$E_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\,dt.$$

278. — Die Funktion φ besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft, welche es ermöglicht, die thermoelektrischen Erscheinungen in sehr einfacher Weise auszudrücken.

Die thermoelektrische Kraft zweier Metalle A und B bei der Temperatur t ist gleich der Differenz der thermoelektrischen Kräfte derselben Metalle A und B gegen irgend ein drittes Metall C.

Denn das Gesetz der Zwischenmetalle liefert die Gleichung

$$E(AC) = E(AB) + E(BC).$$

Man findet hieraus

$$\frac{dE(AC)}{dt} = \frac{dE(AB)}{dt} + \frac{dE(BC)}{dt},$$

oder

$$\varphi(AC) = \varphi(AB) + \varphi(BC)$$

und folglich

$$\varphi(AB) = \varphi(AC) - \varphi(BC).$$

Kennt man demnach die thermoelektrische Kraft der verschiedenen Metalle gegen ein Vergleichsmetall X, so ist es leicht, die thermoelektrische Kraft zweier beliebiger Metalle abzuleiten durch die Formel

$$\varphi(AB) = \varphi(AX) - \varphi(BX). \tag{2}$$

Ist AX (Fig. 68) die Curve, welche den Wert von φ als Funktion von t für die beiden Metalle A und X darstellt, BX die analoge Curve für die beiden Metalle B und X, so erhält man vermöge der Gleichung (2)

$$\varphi(AB) = MP - NP = MN.$$

279. — Die elektromotorische Kraft des Elementes AB zwischen den Temperaturen t_1 und t wird ausgedrückt durch

$$E_{t_1}^{t}(AB) = \int_{t_1}^{t} \varphi(t)\,dt = \int_{t_1}^{t} MN\,.\,dt,$$

also gleich der Fläche M_1MNN_1; dieselbe wird also durch die Fläche des von den Curven AX und BX und den den Temperaturen t_1 und t entsprechenden Ordinaten begrenzten Vierecks ausgedrückt.

Lässt man, während die kalte Lötstelle auf der constanten Temperatur t_1 bleibt, die Temperatur t der heissen Lötstelle wachsen, dann wächst die

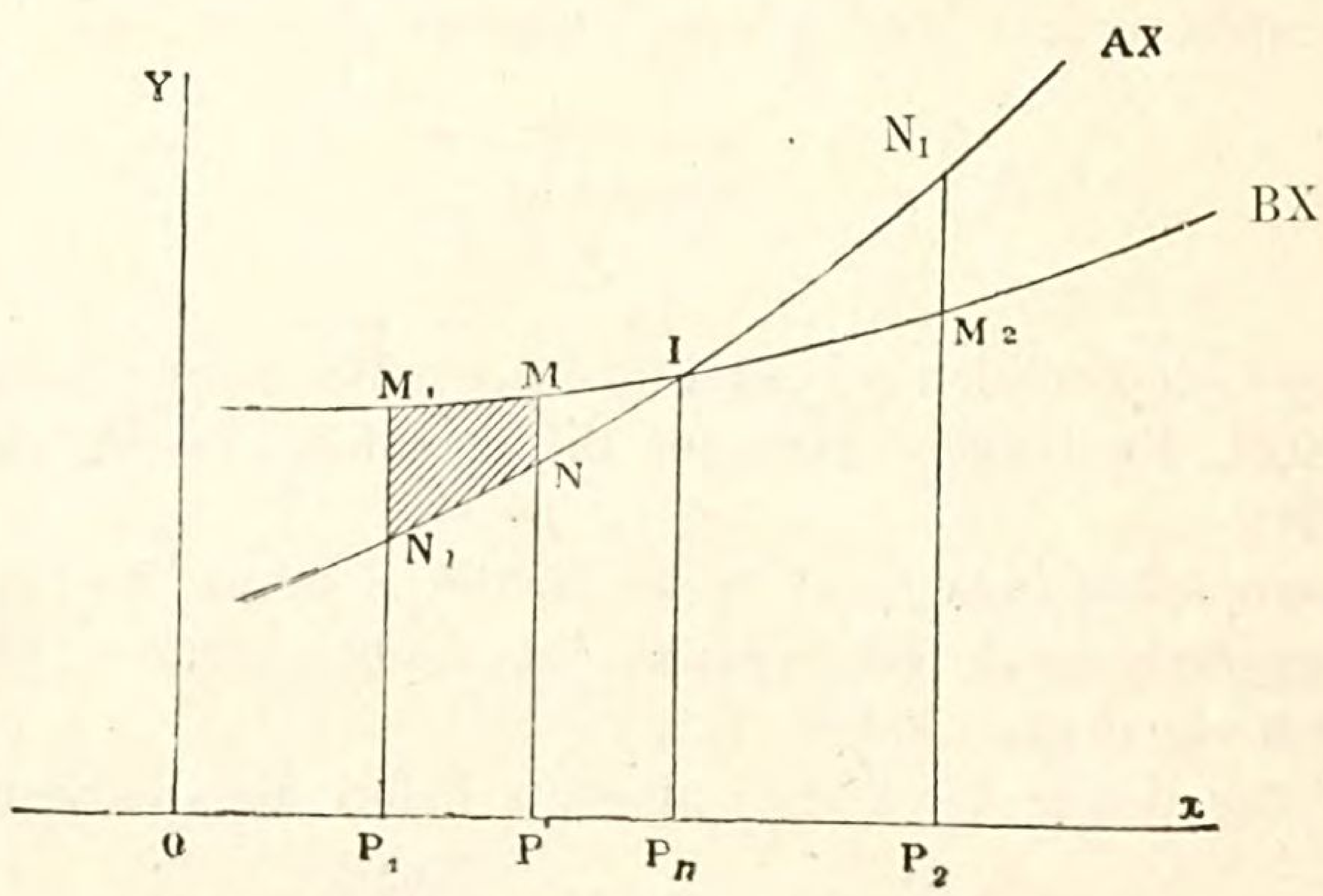


Fig. 68.

elektromotorische Kraft wie die entsprechende Fläche, bis diese Temperatur den Wert t_n erreicht, der dem Schnittpunkt I der beiden Curven entspricht.

Bei dieser Temperatur t_n ist die thermoelektrische Kraft der beiden Metalle A und B Null; man nennt dieselbe den *neutralen Punkt.* Uebersteigt die Temperatur die des neutralen Punktes, so nimmt die elektromotorische Kraft ab; dieselbe wird jetzt nur durch die Differenz der beiden Dreiecksflächen dargestellt, die ihren Scheitel in I haben; sie wird zugleich mit der Intensität Null für die Temperatur t_2, für welche man erhält

$$\Delta M_2IN_2 = \Delta M_1IN_1.$$

Sobald schliesslich die Temperatur der heissen Lötstelle t_2 übersteigt, wird die elektromotorische Kraft negativ, und es tritt eine Umkehr des

Stromes ein. Die Umkehrtemperatur hängt demnach von der Temperatur der kalten Lötstelle ab.

280. — Die Resultate werden sehr einfach, wenn die Curven AX und BX Geraden sind. Die Figur M_1MNN_1 ist dann ein Trapez, dessen Fläche den Betrag hat

$$P_1P \cdot \frac{M_1N_1 + MN}{2} = (t - t_1)\frac{\varphi(t_1) + \varphi(t)}{2} = (t - t_1)\varphi\left(\frac{t + t_1}{2}\right).$$

Nun ist aber, da φ eine lineare Funktion ist,

$$\frac{\varphi\dfrac{t + t_1}{2}}{t_n - \dfrac{t_1 + t}{2}} = \frac{\varphi(t)}{t_n - t} = \text{const} = a,$$

und folglich

$$E_{t_1}^t(AB) = a(t - t_1)\left[t_n - \frac{t_1 + t}{2}\right].$$

Dieser Ausdruck stimmt mit den Versuchen von Gaugain (**272**) überein.

Wären die Geraden AX und BX parallel, so erhielte man

$$E_{t_1}^t(AB) = A(t - t_1),$$

und das Element besässe einen gleichförmigen Gang.

281. Specifische Elektricitätswärme. — Wir nehmen jetzt an, dass die Potentialänderungen, von denen die elektromotorische Kraft herrührt, zweierlei Art seien: plötzliche Aenderungen wie die aus dem Volta'schen Princip herrührenden und stetige Aenderungen, die mit den Temperaturänderungen verbunden sind, und die wie die ersteren im Stande sind, umkehrbare Wärmeerscheinungen zu liefern. Es ist klar, dass wenn wir mit H die Aenderungen der ersten Art und mit $\int dh$ die Summe der continuirlichen Aenderungen bezeichnen, die zwischen zwei Punkten A und B eines Leiters existiren, die gesammte elektromotorische Kraft den Wert hat

$$E = \Sigma H + \Sigma \int dh.$$

Nach dem Gesetze von Magnus hängen die Aenderungen der zweiten Art zwischen zwei Punkten M und M' desselben Metalles nur von den Temperaturen t und t' und in keiner Weise von dem Zwischenwiderstande ab. Man kann demnach setzen

$$dh = f(t)dt = \sigma dt.$$

Ist die Stromintensität so schwach, dass man die nach dem Joule'schen Gesetze eintretende Erwärmung des Kreises ausser Acht lassen kann, so ist die in der Zeiteinheit in dem Teile des Leiters, in dem die betrachtete Potentialänderung h eintritt, unter dem Einflusse eines Stromes von der Intensität I entwickelte oder absorbirte Wärme augenscheinlich

$$Idh = If(t)\,dt = I\sigma dt.$$

Die Grösse σ ist die Potentialänderung und folglich die Wärmearbeit, die für die Stromeinheit einer der Einheit gleichen Temperaturänderung entspricht; es ist dies eine für die Natur des Leiters charakteristische Funktion, die sich für jeden Leiter mit der Temperatur ändert. W. Thomson hat diese neue physikalische Grösse mit dem Namen der *specifischen Elektricitätswärme* belegt.

282. Elektromotorische Kraft eines thermoelektrischen Elementes. — Nachdem dies vorausgeschickt ist, fassen wir einen aus einer beliebigen Anzahl von Metallen $A_1, A_2 \ldots A_n$ bestehenden Kreis (Fig. 69) ins Auge.

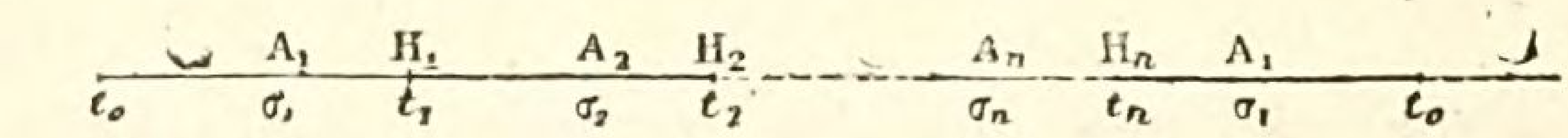


Fig. 69.

Sind $H_1, H_2 \ldots H_n$ die plötzlichen den elektromotorischen Contactkräften entsprechenden Aenderungen, $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ die specifischen Elektricitätswärmen der Metalle $A_1, A_2 \ldots A_n$, endlich $t_1, t_2 \ldots t_n$ die Temperaturen der Lötstellen und t_0 die constante Temperatur des äusseren Drahtes, so wird die elektromotorische Kraft des Kreises ausgedrückt durch

$$E = H_1 + H_2 + \cdots H_n + \int_{t_0}^{t_1} \sigma_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_2 dt + \cdots \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_n dt + \int_{t_n}^{t_0} \sigma_1 dt,$$

oder, wenn man das erste und letzte Integral zusammenfasst,

$$(3) \qquad E = \Sigma H + \int_{t_n}^{t_1} \sigma_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_2 dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_n dt.$$

Besteht der Kreis nur aus zwei Metallen A und A', so haben die elektromotorischen Contactkräfte allgemein entgegengesetztes Zeichen. Führt man ihre Zeichen in die Formel ein, so erhält man

$$(4) \qquad E = H_2 - H_1 + \int_{t_1}^{t_2} (\sigma' - \sigma)\, dt.$$

Ist die Temperaturdifferenz der beiden Lötstellen unendlich klein, also $t_2 - t_1 = dt$, so geht die Gleichung über in

$$(5) \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} + \sigma' - \sigma = \varphi_t(AA').$$

Wir haben gesehen, dass für einen hinlänglich schwachen Strom der Kreis als eine umkehrbare thermische Maschine aufgefasst werden kann, der Carnot'sche Satz ist demnach anwendbar, und die algebraische Summe der Quotienten. die man erhält, wenn man die Menge der in einem Punkte absorbirten Wärme durch die zugehörige absolute Temperatur dividirt, ist gleich Null.

Nennen wir T_2 und T_1 die absoluten Temperaturen, zwischen denen das Element funktionirt, und T die absolute Temperatur irgend eines Punktes des Leiters, so ist an der heissen Lötstelle die Wärmearbeit $H_2 I$, an der kalten Lötstelle $H_1 I$, und auf einem Leiterelement, dessen Endpunkte die Temperaturen T und $T + dT$ besitzen, ist diese Arbeit $I\sigma dT$. Man erhält demnach, wenn man den gemeinsamen Faktor I fortlässt, die Gleichung

$$(6) \qquad \frac{H_2}{T_2} - \frac{H_1}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\sigma' - \sigma}{T} dT = 0.$$

Ist die Differenz $T_2 - T_1$ unendlich klein und gleich dT, so kann man setzen

$$(7) \qquad \frac{d}{dT}\left(\frac{H}{T}\right) + \frac{\sigma' - \sigma}{T} = 0$$

oder

$$\frac{1}{T}\frac{dH}{dT} - \frac{H}{T^2} + \frac{\sigma' - \sigma}{T} = 0,$$

und endlich

$$\frac{H}{T} = \frac{dH}{dT} + \sigma' - \sigma.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nach Gleichung (5) nichts anderes als die thermoelektrische Kraft $\varphi(t)$ der beiden Metalle; es ergiebt sich demnach

$$(8) \qquad H = T\varphi(t).$$

Demnach ist die elektromotorische Contactkraft zweier Metalle, und folglich auch das Peltier'sche Phänomen, bei irgend einer Temperatur gleich dem Produkt der absoluten Temperatur in die thermoelektrische Kraft derselben bei der gleichen Temperatur.

Man schliesst aus derselben Gleichung

$$\frac{dE}{dt} = \varphi(t) = \frac{H}{T}$$

und folglich

(9) $$E = \int_{T_1}^{T_2} \varphi dt = \int_{T_1}^{T_2} \frac{H}{T} dT.$$

283. — Die Discussion dieser Formel führt auf verschiedene bereits früher (**276**) besprochene Fälle. Ist T_n die dem neutralen Punkte entsprechende Temperatur, so erhält man, da für diesen Punkt die thermoelektrische Kraft Null ist,

$$\varphi(t_n) = 0 \text{ und } H_n = 0.$$

So lange die Temperatur T_2 der heissen Lötstelle unterhalb T_n liegt, ist die Funktion H_2 positiv, und der Strom kühlt die heisse Lötstelle ab.

Ist $T_2 = T_n$, so ist die Wärmewirkung an der heissen Lötstelle Null. Liegt die Temperatur T_2 zwischen der Maximumstemperatur T_n und der Umkehrtemperatur T_i, so ist H_2 negativ; der Strom erwärmt gleichzeitig die kalte und die heisse Lötstelle.

Befindet sich endlich die heisse Lötstelle auf einer Temperatur, die höher ist als die Umkehrtemperatur, dann kühlt der Strom beide Lötstellen ab.

Nach W. Thomson und in Uebereinstimmung mit den Versuchen von Gaugain kann die elektromotorische Kraft eines Elementes empirisch durch die Formel dargestellt werden (**280**)

$$E = a(T - T_1)\left[T_n - \frac{1}{2}(T + T_1)\right].$$

Hieraus folgt für eine unendlich kleine Differenz dT zwischen den Temperaturen der beiden Lötstellen

$$\frac{dE}{dT} = a(T_n - T)$$

und folglich

$$H = aT(T_n - T).$$

Die elektromotorische Kraft des Elementes und die elektromotorische Contactkraft zwischen den beiden Metallen, als Funktion der Temperatur ausgedrückt, werden demnach beide durch Parabeln dargestellt.

284. Hypothese von Tait. — Tait gelangte durch die Annahme, dass die für jedes Metall charakteristische Elektricitätswärme σ der absoluten Temperatur proportional ist, zu demselben Resultat. Man würde dann, in-

dem man mit k und k' für jedes Metall constante Coefficienten bezeichnet, erhalten

$$\sigma = kT,\ \sigma' = k'T.$$

Die Gleichung (7) geht in diesem Falle über in

$$\frac{d\left(\frac{H}{T}\right)}{dT} + (k' - k) = 0,$$

hieraus findet man

$$\frac{H}{T} + (k' - k)T + C = 0.$$

Andererseits ist für den neutralen Punkt $H_n = 0$, oder

$$(k' - k)\,T_n + C = 0,$$

was schliesslich, wenn man $k' - k = a$ setzt und die absoluten Temperaturen durch die gewöhnlichen Temperaturen ersetzt, ergiebt

$$H = (k' - k)\,T(T_n - T) = aT(t_n - t),$$

$$E = \int_{T_1}^{T_2} \frac{H}{T} dT = (k' - k)\,(T_2 - T_1)\left[T_n - \frac{T_1 + T_2}{2}\right],$$

$$= a(t_2 - t_1)\left(t_n - \frac{t_1 + t_2}{2}\right).$$

Man findet so die empirischen Formeln von W. Thomson und von Gaugain wieder.

Die thermoelektrische Kraft zweier Metalle ist dann

$$\varphi(t) = \frac{dE}{dt} = \frac{H}{T} = a(t_n - t);$$

dieselbe wird demnach als Funktion der Temperatur durch eine Gerade dargestellt.

Nehmen wir an, dass man die thermoelektrischen Kräfte in Bezug auf ein Metall bestimmt, für welches k gleich Null ist, was nach den Versuchen von Le Roux für das Blei der Fall zu sein scheint, so geht die Gleichung über in

$$\frac{dE}{dt} = \varphi(t) = k'(T_n - T).$$

Die Geraden, welche die thermoelektrischen Kräfte der verschiedenen Metalle darstellen, sind gegen die Achse der Temperaturen ungleich geneigt; jede Gerade schneidet diese Achse in dem Punkte, welcher der Temperatur

des bez. neutralen Punktes gegenüber dem Vergleichsmetalle entspricht, und ihre Neigung gegen die Achse ist die specifische Elektricitätswärme, die jedem der Metalle entspricht.

285. Elektrischer Transport von Wärme. — Es war wichtig, die Annahme, welche die Grundlage dieser Theorie bildet, experimentell zu bestätigen, also die Existenz von Potentialänderungen nachzuweisen, die von Temperaturänderungen herrühren. Die von Sir W. Thomson hierfür angewandte Methode bestand darin, festzustellen, dass infolge eines Stromdurchganges umkehrbare Wärmeerscheinungen eintreten, welche dem Peltier'schen Phänomen analog sind.

Wir betrachten beispielsweise ein Eisenstück, dessen mittlerer Teil AA' (Fig. 70) auf der constanten Temperatur T erhalten wird, während die Enden B und B' auf 0° gehalten werden.

Die Temperaturverteilung wird durch die Curven $BDD'B'$ dargestellt; so lange ein Strom nicht hindurchgeht, ist die Verteilung augenscheinlich symmetrisch und wird durch die Curven BPD und $D'P'B'$ veranschaulicht.

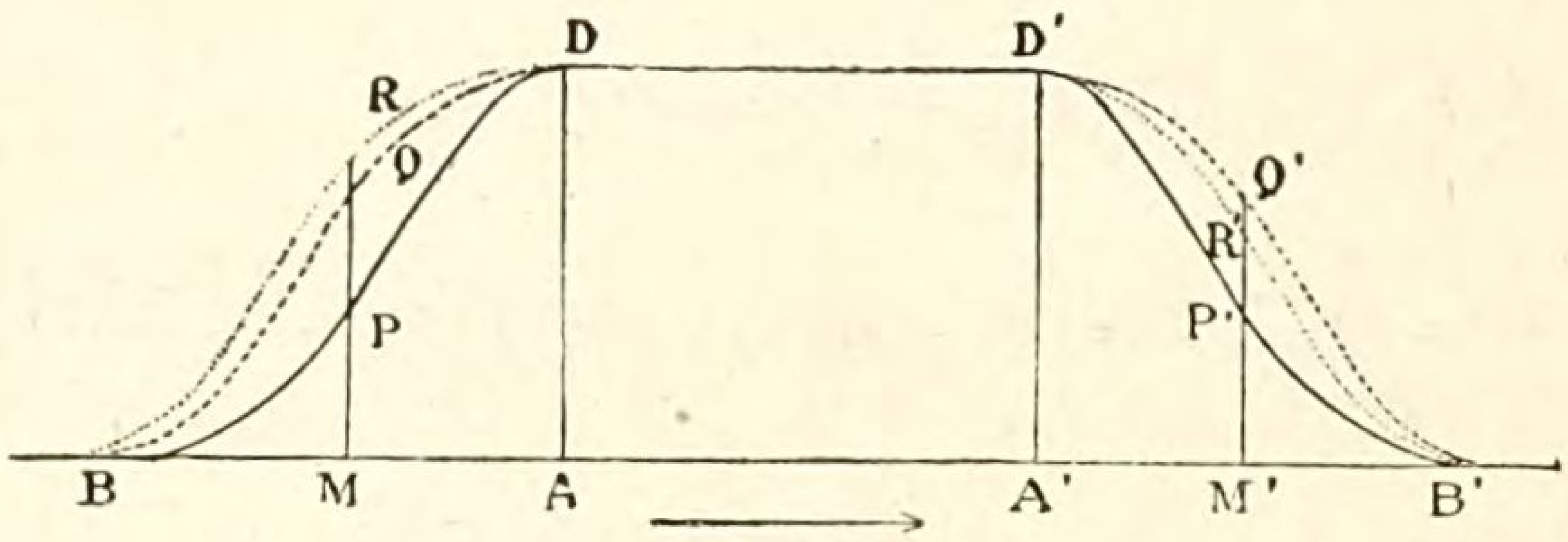


Fig. 70.

Der Durchgang des Stromes ruft in jedem Punkte zwei Wirkungen hervor: 1. eine durch das Joule'sche Gesetz bestimmte Erwärmung; 2. eine Entwicklung oder eine Absorption von Wärme, die von dem festen Potentialgefälle herrühren, welches der Temperaturdifferenz zweier benachbarter Punkte entspricht.

Berücksichtigt man nur das Joule'sche Gesetz, so ist die Temperaturverteilung immer noch symmetrisch und kann durch die Linien BQD und $D'Q'B'$ wiedergegeben werden, die in unserer Zeichnung gestrichelt sind.

Die zweite Wirkung ist mit der Stromrichtung umkehrbar. Geht der Strom in Richtung des Pfeiles von links nach rechts, so entsteht beispielsweise eine fernere Erwärmung in dem vorderen Teile des Drahtes BA, wo die Temperaturen wachsen, und eine Abkühlung in dem hinteren Teile $A'B'$, wo die Temperaturen fallen. Die Temperaturverteilung ist dann unsymmetrisch und kann durch die punktirten Curven BRD und $D'R'B'$ wiedergegeben werden.

In zwei symmetrisch liegenden Punkten M und M' entspricht die Differenz der schliesslichen Temperaturen t und t' genau dem Thomson'schen Effect. Da die Erwärmung in dem Teile, der vor dem mittleren Teile AA'

liegt, wo die Temperatur ein Maximum ist, grösser ist, findet demnach eine Art von *elektrischem Wärmetransport* in der dem Strome entgegengesetzten Richtung statt, und dieser Transport ist der Stromintensität proportional.

W. Thomson hat so festgestellt, dass für das Eisen der elektrische Wärmetransport *negativ* ist, d. h. in der dem Strome entgegengesetzten Richtung erfolgt, und dass der Transport *positiv* aber viel schwächer ist für das Kupfer.

Le Roux hat dieselben Beobachtungen auf eine grosse Anzahl von Metallen ausgedehnt; er hat bestätigt gefunden, dass die Wirkung der Stromintensität proportional ist, und hat gefunden, dass dieselbe für das Blei Null ist, so dass in dieser Hinsicht das Blei merklich neutral ist.

286. Charakter des Peltier'schen Phänomens. — Wir können jetzt näher auf das Peltier'sche Phänomen eingehen.

Die elektromotorische Contactkraft zwischen zwei Metallen wird nach der Theorie von W. Thomson durch die allgemeine Formel

$$H = T\frac{dE}{dT}$$

gegeben.

Besitzt das Element gleichmässigen Gang, so erhält man für die beiden Temperaturen T_1 und T

$$E = A(T - T_1),$$

und es folgt

$$H = AT.$$

Die elektromotorische Contactkraft zwischen den beiden Metallen ist dann der absoluten Temperatur proportional, und die Peltier'sche Erscheinung muss demselben Gesetze folgen. Bei den Temperaturen 25° und 100° zum Beispiel würde man erhalten

$$\frac{H_{100}}{H_{25}} = \frac{273 + 100}{273 + 25} = 1 + \frac{75}{298} = 1 + \frac{1}{4}.$$

Nach den Versuchen von Le Roux entspricht das Wismuth-Kupfer-Element genau dieser Bedingung.

Ein Strom, der durch eine Lötstelle geht, erhitzt dieselbe bei seinem Durchgange in der einen Richtung, und kühlt sie ab bei seinem Durchgange in der entgegengesetzten Richtung. Ed. Becquerel hat gezeigt, dass die Richtung, für welche eine Abkühlung eintritt, die desjenigen Stromes ist, den die künstliche Erwärmung derselben Lötstelle hervorrufen würde. Geht ein thermoelektrischer Strom durch einen Kreis, so suchen demnach die in den Lötstellen durch den Strom selbst verursachten Temperaturänderungen denselben zu schwächen, und man kann sagen, dass dieselben die Wirkung haben, eine elektromotorische Kraft zu entwickeln,

die derjenigen entgegengesetzt ist, die den Strom hervorruft. Dies ist eine notwendige Erscheinung: wäre dieselbe nicht vorhanden, so würde ein zufälliger Strom in einem metallischen Kreise zwischen den Lötstellen eine Temperaturdifferenz hervorrufen, die immer weiter stiege, und der Strom würde sich von selbst unbegrenzt aufrecht erhalten.

In einem Kreise von zwei Metallen, dessen heisse Lötstelle eine Temperatur besitzt, die niedriger ist als die des neutralen Punktes, wächst die elektromotorische Kraft mit der Temperatur, die Peltier'sche Wirkung sucht also die Temperatur dieser Lötstelle zu erniedrigen. Oberhalb des neutralen Punktes dagegen wird die elektromotorische Kraft kleiner, wenn die Temperatur steigt, und die Peltier'sche Wirkung muss demnach die Temperatur der heissen Lötstelle zu erhöhen suchen.

Die Peltier'sche Wirkung an der heissen Lötstelle hat demnach verschiedenes Zeichen, je nachdem die Temperatur dieser Lötstelle unterhalb oder oberhalb derjenigen des neutralen Punktes liegt; es folgt daraus, dass die elektromotorische Contactkraft H im neutralen Punkte ihr Zeichen hat wechseln müssen. Gerade durch eine analoge Schlussweise hat W. Thomson zuerst diese Eigenschaft des neutralen Punktes nachgewiesen und auf die notwendige Existenz von elektromotorischen Kräften in einem homogenen Leiter bei veränderlichen Temperaturen geschlossen.

Dritter Teil.

Magnetismus.

1. Capitel.

Einleitung.

287. Magnete. — Man nennt seit dem frühesten Altertum *Magnetsteine* gewisse Mineralien, welche die Eigenschaft besitzen, Eisenfeilicht anzuziehen; sie bestehen aus Eisenoxyd, für welches die chemische Formel ist $Fe_3 O_4$. Die verschiedenen Punkte eines Magneten zeigen diese anziehenden Eigenschaften nicht in gleichem Grade: das Feilicht begiebt sich mit Vorliebe auf gewisse Punkte der Oberfläche und bleibt in Form von Büscheln an denselben haften.

Diese Erscheinungen haben eine in die Augen fallende Aehnlichkeit mit denen der statischen Elektricität. Immerhin ist die Analogie keine vollkommene, und die nähere Beobachtung entdeckt wesentliche Unterschiede: so wirkt der Magnetstein nicht auf alle Körper ohne Unterschied; das angezogene Eisenfeilicht wird nach der Berührung nicht wieder abgestossen und besitzt, sobald es einmal abgelöst ist, keine neue Eigenschaft etc. Bei jedem Schritte werden wir im Verlauf dieser Untersuchung Analogieen und Verschiedenheiten dieser Art zwischen den beiden Klassen von Erscheinungen zu entdecken haben.

Durch blosses Streichen mit dem Magnetstein kann man, ohne diesem etwas von seinen ursprünglichen Eigenschaften zu nehmen, den Stahl magnetisch machen, d. h. ihm die Eigenschaft mitteilen, Eisen anzuziehen. Da die künstlich magnetisirten Stahlstücke eine regelmässigere Form haben als die Magnetsteine, sind dieselben für das Studium bequemer; der Versuch zeigt, dass die Erscheinungen in beiden Fällen genau derselben Natur sind.

288. Natürliche und künstliche, permanente und temporäre Magnete. — Man nennt allgemein einen *Magnet* jeden Körper, der die Eigenschaft hat Eisenfeilicht anzuziehen. Die *natürlichen* Magnete sind Magnetsteine, die man in der Natur vorfindet; die *künstlichen* Magnete sind Stücke aus Stahl oder mehr oder weniger reinen Eisensorten, denen man analoge Eigenschaften beigebracht hat.

Unter den künstlichen Magneten behalten die einen diese neue Eigenschaft noch, wenn man die Ursache, welche dieselbe hervorgerufen hat,

beseitigt; dies sind die *permanenten* Magnete. Gehärteter Stahl ist der Körper, der sich am besten zur Herstellung permanenter Magnete eignet, und man wendet denselben gewöhnlich in der Form länglicher, runder oder platter, Stäbe an.

Verschiedene Arten von Schmiede- und Gusseisen können ebenfalls kräftig durch Magnetsteine und künstliche Magnete magnetisirt werden, dieselben verlieren aber den grössten Teil ihrer bezüglichen Eigenschaften, sobald die magnetisirende Ursache entfernt ist. Man erhält so *temporäre* Magnete, und man nennt magnetisches *Residuum* oder *remanenten Magnetismus* die relativ schwache Magnetisirung, die dauernd oder wenigstens einige Zeit auf den Körpern verbleibt, denen man temporären Magnetismus mitgeteilt hat.

289. Magnetische und diamagnetische Körper. — Bis zum vorigen Jahrhundert war das Eisen der einzige Körper, dessen Anziehung durch Magnete man kannte; man bemerkte später, dass gewisse Metalle, wie Nickel und Kobalt, deren chemische Analogieen mit dem Eisen so bemerkenswert sind, dieselben Eigenschaften in geringerem Grade besitzen. Endlich fand man mit Hilfe sehr kräftiger Magnete, dass eine sehr grosse Zahl von Körpern ebenfalls von Magneten angezogen werden, dass aber die Wirkungen, die sie erleiden, unvergleichlich schwächer sind. Man hat alle die Körper, welche angezogen werden können, *magnetisch* genannt, und den Namen *Magnetismus* sowohl der Gesammtheit der Erscheinungen, welche die Magnete zeigen, als der Ursache dieser Erscheinungen beigelegt.

Im Jahre 1778 fand Brugmanns, dass ein Stück Wismuth von einem Magnete abgestossen wird. Die Wichtigkeit dieser Beobachtung wurde nicht beachtet, bis Faraday bei einer grösseren Zahl von Körpern dieselben Eigenschaften entdeckte. Infolge der besonderen Form, in der er den Versuch anstellte, bezeichnete Faraday die Körper, welche von den Magneten abgestossen werden, als *diamagnetisch*.

Im Allgemeinen kann man sagen, dass alle Naturkörper mehr oder weniger gegen die Einwirkung der Magnete empfindlich sind. Man hat dieselben in zwei Gruppen geteilt: die *magnetischen*, *paramagnetischen* oder *positiven* Körper, welche wie das Eisen angezogen werden; die *diamagnetischen* oder *negativen* Körper, die wie das Wismuth von den Magneten abgestossen werden.

290. Verteilung des Magnetismus in den Magneten. — Pole. — Man kann einen regelmässig magnetisirten Stab erhalten, eine Nadel zum Beispiel, wenn man dieselbe wiederholt und stets in derselben Richtung an einem natürlichen Magnetstein oder an demselben Ende irgend eines künstlichen Magneten reibt.

Taucht man eine derartige Nadel in Eisenfeilicht, so heften sich die Feilspähne besonders an die Enden der Nadel bis auf eine gewisse Entfernung von denselben und hängen an einander, so dass sie mehr oder weniger volle Büschel bilden.

Die magnetischen Wirkungen scheinen demnach an den Enden der regelmässig geformten Magnete concentrirt zu sein. Wir werden diese Enden *Pole* des Magnets nennen, behalten uns aber vor, später diesen Ausdruck mit grösserer Präcision zu definiren.

291. Zwei Arten von Magnetismus. — Die beiden Enden oder Pole des Magnets zeigen nicht genau dieselben Eigenschaften: denn jeder in einer Horizontalebene bewegliche Magnet nimmt eine im Raume feste Richtung an. Diese Richtung ist ungefähr eine nord-südliche. Ein aus dieser Richtung entfernter Magnet kehrt wieder in dieselbe zurück, sobald man ihn sich selbst überlässt, und immer dasselbe Ende ist es, welches nach Norden zeigt. Man nennt so *Nordpol* eines Magnets das Ende, welches nach dem geographischen Norden, und *Südpol* dasjenige, welches nach Süden zeigt. Man kann demnach ein für alle Mal diese Pole auf den dauernden Magneten, die man verwendet, bezeichnen.

292. Gesetze der magnetischen Wirkungen. — Die Magnete wirken auf einander ein. Der Nordpol eines Magnets, der in die Nähe des Nordpoles eines andern, beweglichen Magnets gebracht wird, stosst denselben ab, zieht dagegen den Südpol an. Ebenso stossen sich die Südpole zweier Magnete gegenseitig ab. Die Erscheinungen sind demnach denen der elektrischen Wirkungen analog: *Zwei gleichnamige Pole stossen einander ab, zwei ungleichnamige Pole ziehen einander an.*

Zwischen zwei benachbarten Magneten bestehen demnach vier Wirkungen, zwei abstossende zwischen den gleichnamigen und zwei anziehende zwischen den ungleichnamigen Polen. Haben die Magnete eine gegen die Querdimensionen grosse Länge und sind dieselben in einer gegen diese Dimensionen grossen Entfernung von einander aufgestellt, so kann man die Wirkung eines jeden Endes als von einem Punkte ausgehend auffassen. Die Einwirkung der beiden Magnete auf einander besteht dann aus vier Kräften, die in den Richtungen der Geraden wirken, welche je zwei Wirkungscentren oder die Pole der beiden Magnete verbinden, und es ist nicht möglich, in den Versuchen dieselben mit voller Strenge auf eine kleinere Zahl zu reduciren.

Immerhin hat Coulomb, indem er die Pole zweier sehr langer Magnete in solchen Abständen und solcher gegenseitiger Lage auf einander wirken liess, dass die Wirkungen der beiden andern Pole als unmerklich betrachtet werden konnten, durch den Versuch beweisen können, dass *die Anziehungs- und Abstossungswirkungen, die zwischen zwei Polen bestehen, im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates ihres Abstandes stehen.*

Man muss indessen bemerken, dass nichts die Existenz dieser Elementarkräfte beweist. Der Versuch zeigt allerdings, dass die Wirkung der wahrscheinlich sehr complexen Systeme, welche die Magnete ausmachen, auf Anziehungs- oder Abstossungskräfte zurückgeführt werden können, die in dieser Weise längs der die Pole verbindenden Geraden gerichtet sind; da aber ein Pol nie getrennt von seinem Gegenpol existiren kann, ist die direkte Ein-

wirkung zweier Pole auf einander eine blosse Conception des Geistes, die zweifellos vorteilhaft ist für die Darstellung und die Berechnung der Erscheinungen, die aber keine durch die Erfahrung nachgewiesene Wirklichkeit besitzt. Wenn andere Anschauungen über die Natur der elementaren Wirkungen zu denselben Folgerungen für die messbaren Erscheinungen führen, wenn man beispielsweise die ganze Anschauung einer Fernwirkung aufgiebt, so muss man diese neuen Anschauungen für ebenso berechtigt wie die ersten halten.

293. Magnetische Massen. — Die Wirkung zweier Pole in gegebenem Abstande hängt von der besonderen Kraft eines jeden der Magnete ab. Die Erfahrung zeigt, dass die auf die Pole zweier Magnete unter denselben sonstigen Verhältnissen von irgend einem Systeme ausgeübten Wirkungen in constantem Verhältnisse zu einander stehen; man kann dieses Verhältnis als das der magnetischen Massen der beiden Pole auffassen. Aus dieser Erklärung folgt, dass die Wirkung irgend eines Systems auf einen Pol, dessen magnetischer Masse proportional ist; folglich ist die Wirkung zweier Pole auf einander jeder Masse einzeln proportional, d. h. dem Produkte der magnetischen Massen.

Bezeichnet man diese Massen mit m und m', dann wird die Wirkung f der beiden Pole in dem Abstande d demnach ausgedrückt durch

$$f = \varphi \frac{mm'}{d^2},$$

wo φ ein Coefficient ist, der von der Wahl der Masseneinheit abhängt. Damit dieser Coefficient sich auf Eins reducirt, braucht man nur *als magnetische Masseneinheit die Masse eines Poles zu wählen, die auf einen gleichen Pol in der Einheit des Abstandes wirkend eine der Krafteinheit gleiche Abstossung ausübt.* Man erhält dann

$$f = \frac{mm'}{d^2},$$

und die Wirkung ist eine abstossende oder anziehende, je nachdem die Pole gleichnamig oder ungleichnamig sind.

Sind zwei Pole von den Massen m und m' mit einander verbunden, so ist die Wirkung des so gebildeten Systems auf einen dritten Pol von der Masse M, der sich in einer gegen den Abstand der beiden verbundenen Pole von einander grossen Entfernung d befindet, gleich

$$\frac{mM}{d^2} + \frac{m'M}{d^2} = \frac{M(m + m')}{d^2};$$

dieselbe ist der Summe $m + m'$ der beiden Massen proportional, wenn die Pole gleichnamig sind, und der Differenz $m - m'$, wenn dieselben ungleichnamig sind. Die magnetischen Massen addiren sich demnach in der Art algebraischer Grössen, und man kann dieselben wie die elektrischen

Massen mit den Zeichen + und — versehen; wir wollen der magnetischen Masse eines Nordpols das Zeichen + und der eines Südpols das Zeichen — geben.

Die Wirkung der beiden Pole, die durch die Formel $f = \frac{mm'}{d^2}$ ausgedrückt wird, ist demnach positiv im Falle der Abstossung, da die Massen dasselbe Zeichen besitzen, und negativ im Falle einer Anziehung.

Da das Gesetz der elementaren Wirkungen dasselbe ist wie das für die elektrischen Erscheinungen, kann man alle auf das elektrische Potential bezüglichen Sätze anwenden, wenigstens so weit diese sich auf feste Massen beziehen, und wenn man für den Augenblick von den Erscheinungen auf Leitern absieht. Insbesondere können die Vorstellungen von den Kraftlinien, den Kraftröhren und Kraftströmungen unmittelbar auf den Magnetismus übertragen werden.

294. Magnetisches Feld. — Ein *magnetisches Feld* ist ein Raum, in welchem die magnetischen Kräfte zu Tage treten. Die *Richtung* und die *Intensität* des Feldes in einem Punkte sind die Richtung und die Intensität der Kraft, die auf eine positive in diesem Punkte befindlich gedachte Masseneinheit wirkt.

295. Definition der Pole. — Magnetische Achse eines Magnets. — Wir haben im Vorhergehenden angenommen, dass die Wirkungen eines Magnets sich auf die zweier an dessen Enden gelegener magnetischer Centra reduciren; diese Annahme ist nur in dem Falle, und auch dann nur annähernd richtig, wenn man es mit langen, cylindrischen Magneten zu thun hat, die sich in einem gegen ihre Querdimensionen grossen Abstande von einander befinden. In Wirklichkeit sind die magnetischen Eigenschaften in der ganzen Ausdehnung des Magnets bemerkbar und zeigen nur ein sehr deutliches Maximum in der Nähe der Enden desselben. Man erkennt dies leicht aus der Art, wie das Feilicht an dem Magneten haftet. Man muss demnach annehmen, dass in dem Magnete eine Reihe von teils positiven, teils negativen magnetischen Massen vorhanden sind, die nach einem bestimmten Gesetze verteilt sind, und deren Gesammtheit die magnetische Gesammtmasse ausmacht.

Dies vorausgeschickt, kann man in genauerer Weise definiren, was man die Pole eines Magnets nennt.

Wir nehmen an, dass der Magnet sich in einem gleichförmigen magnetischen Felde befindet. Die Wirkungen, die das Feld auf die verschiedenen Punkte ausübt, sind unter einander parallel und für jedes Volumenelement der in demselben befindlichen Masse proportional. Alle die, welche auf die positiven Massen wirken, haben dieselbe Richtung; sie haben eine Resultante, die ihrer Summe gleich und ihrer Richtung parallel ist und im Mittelpunkt der Masse oder im Schwerpunkte der positiven Massen angreift. Ebenso verhält es sich mit den negativen Massen, auf die das Feld Wirkungen ausübt, die den vorigen parallel, aber entgegengesetzt gerichtet sind.

Der Magnet ist demnach der Wirkung zweier paralleler, entgegengesetzt gerichteter Kräfte ausgesetzt, von denen die eine im Schwerpunkte der positiven, die andere im Schwerpunkte der negativen Massen angreift. Diese beiden Angriffspunkte sind die *Pole* des Magnets; man nennt *magnetische Achse* des Magnets die Linie, welche die beiden Pole verbindet, und die *Richtung* der magnetischen Achse wird vom negativen nach dem positiven Pole hin gemessen.

Der Magnet befindet sich augenscheinlich im stabilen Gleichgewichte, wenn seine magnetische Achse der Richtung des Feldes parallel und gleich gerichtet ist; das Gleichgewicht ist dagegen labil, wenn diese beiden Richtungen zwar parallel, aber entgegengesetzt sind.

296. Die magnetische Masse eines Magnets ist Null. — Der Raum in der Nähe der Erde kann als ein gleichförmiges magnetisches Feld aufgefasst werden.

Denn der Versuch zeigt, dass in einem gegen die Dimensionen der gebräuchlichen Magnete grossen, aber gegen den Erdradius kleinen Raume alle Magnete, wenn sie allein der Einwirkung der Erde ausgesetzt sind, dieselbe Richtung anzunehmen suchen.

Coulomb hat ausserdem gezeigt, dass die Wirkung der Erde auf jeden Magnetstab eine rein richtende ist, dass dieselbe weder eine verticale, noch eine horizontale Componente besitzt: sie hat keine verticale Componente, denn das Gewicht eines Stahlstabes ist vor und nach der Magnetisirung genau dasselbe; die horizontale Componente ist ebenfalls Null, denn kein in einer Horizontalebene beweglich gemachter Magnet zeigt das Streben, eine Fortbewegung anzunehmen. *Die beiden entgegengesetzt gerichteten, in den beiden Polen angreifenden Kräfte sind demnach gleich und reduciren sich auf ein Kräftepaar.* Hieraus ergiebt sich die wichtige Folgerung, dass in jedem Magnete die Summe der positiven Massen gleich der Summe der negativen Massen ist oder in andern Worten, dass *die Gesammtsumme der magnetischen Massen Null* ist. Man erhält demnach stets $\Sigma m = 0$.

In dieser Hinsicht ist der Zustand eines Magnets mit dem vergleichbar, den ein Dielektricum oder ein isolirt gehaltener Leiter durch Influenz annimmt.

297. Magnetische Momente. — Ist m der absolute Wert der Masse eines jeden Poles und l der Abstand der beiden Pole, so nennt man *magnetisches Moment* M des Magnets das Produkt ml der Masse in diesen Abstand.

Man kann einen Magnet durch eine Gerade OA (Fig. 71) darstellen, deren Richtung die der magnetischen Achse und deren Länge der numerische Wert des magnetischen Momentes M ist.

Diese Art der Darstellung kommt darauf zurück, dass man alle Pole als identisch annimmt, beispielsweise ihre Massen als der Einheit gleich und als so auf der magnetischen Achse angeordnet auffasst, dass ihr Abstand dem magnetischen Momente des betrachteten Magnets proportional ist.

Befindet sich ein System von mehreren mit einander fest verbundenen Magneten in einem gleichförmigen Felde, so beschränkt sich die Wirkung des Feldes auf jeden einzelnen Magnet auf ein Kräftepaar; man kann demnach, um die Gesammtwirkung zu bestimmen, alle Magnete parallel zu ihrer Richtung verschieben, beispielsweise so, dass alle negativen Pole über einander liegen.

Betrachten wir zwei Magnete, die durch die Geraden OA und OA' (Fig. 71) dargestellt werden, und ist G die Mitte der Geraden AA', also der Schwerpunkt der beiden der Einheit gleichen Massen, die in A und A' liegen, so ist das System mit einem einzigen Magnete gleichwertig, dessen Länge gleich OG und dessen Massen gleich 2 wären, oder mit einem Magnete von doppelter Länge OB mit den Massen gleich 1. Der resultirende Magnet wird demnach durch die Diagonale des über den Seiten OA und OA' construirten Parallelogramms dargestellt.

Die magnetischen Momente setzen sich demnach wie Kräfte zusammen. Für ein beliebiges System von mit einander verbundenen Magneten wird das resultirende Moment durch die Gerade dargestellt, die das Polygon

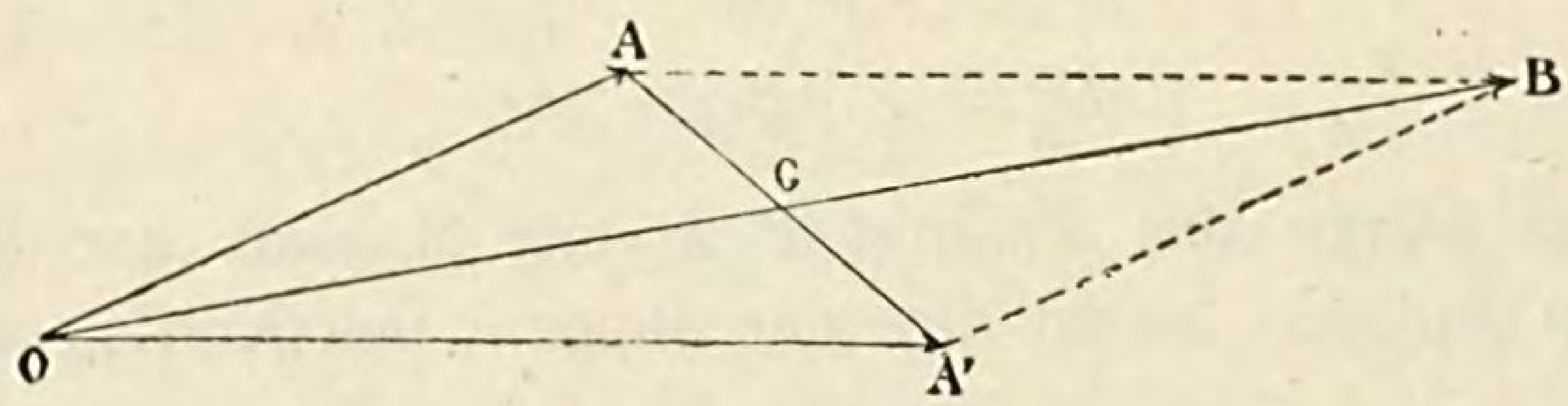


Fig. 71.

schliesst, welches man erhält, wenn man die Momente aller Magnete mit ihren Enden an einander setzt.

Da die Projection dieser Linie auf irgend eine Achse gleich der Summe der Projectionen aller andern ist, so sieht man, dass *die magnetische Achse irgend eines Systems die Gerade ist, auf welcher die Summe der Projectionen der Partialmomente der das System bildenden Magnete ein Maximum ist.*

Ebenso kann man einen Magnet durch eine beliebige Anzahl von Magneten ersetzen, deren resultirendes magnetisches Moment dem Momente des gegebenen Magnets gleich ist, beispielsweise durch die drei Projectionen dieses magnetischen Momentes auf drei rechtwinklige Achsen.

Sind zwei magnetische Systeme sehr weit von einander entfernt, so ist ihre Einwirkung auf einander gleich dem der resultirenden Magnete; denn jedes der Systeme kann als in einem gleichförmigen von dem andern hervorgerufenen Felde gelegen aufgefasst werden.

298. Einwirkung eines gleichförmigen Feldes auf einen Magnet. — Fasst man einen Magnet vom Moment $M = ml$ ins Auge, der in einem gleichförmigen Felde liegt, dessen Intensität F mit der Achse des Magnets den Winkel θ bildet, so ist das von der Wirkung des Feldes erzeugte Drehungsmoment des Paares gleich $Fml \sin\theta$ oder $FM \sin\theta$. Dies ist das Drehungsmoment des

Kräftepaares, welches den Magnet um eine Gerade zu drehen streben würde, die senkrecht zur magnetischen Achse und zur Kraft des Feldes steht.

Ist der Magnet um irgend eine Achse drehbar, dann hängt das Kräftepaar der Drehung nur von den Projectionen M_1 und F_1 des magnetischen Moments und der Intensität des Feldes auf eine zur Achse senkrechte Ebene ab, da die Projectionen auf die Achse ohne Einfluss sind. Nennt man θ_1 den Winkel zwischen den Richtungen von M_1 und F_1, so ist das Moment des Paares gleich $F_1 M_1 \sin \theta_1$.

Bezeichnen wir allgemein bez. mit a, b, c und α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Richtungen von F und M mit drei rechtwinkligen Achsen bilden, und ersetzen wir diese beiden Grössen durch ihre Projectionen auf die drei Achsen, so ist das Moment D_z des Paares, welches den Magnet um die zAchse zu drehen sucht,

$$D_z = Fb . M\alpha - Fa . M\beta = FM(b\alpha - a\beta).$$

Man würde in derselben Weise für die andern Achsen erhalten

$$D_x = FM(c\beta - b\gamma),$$
$$D_y = FM(a\gamma - c\alpha).$$

Man nennt häufig das Produkt $F.M$ das Moment der Wirkung des Feldes auf den Magnet; es ist dies das Moment des Kräftepaares, welches

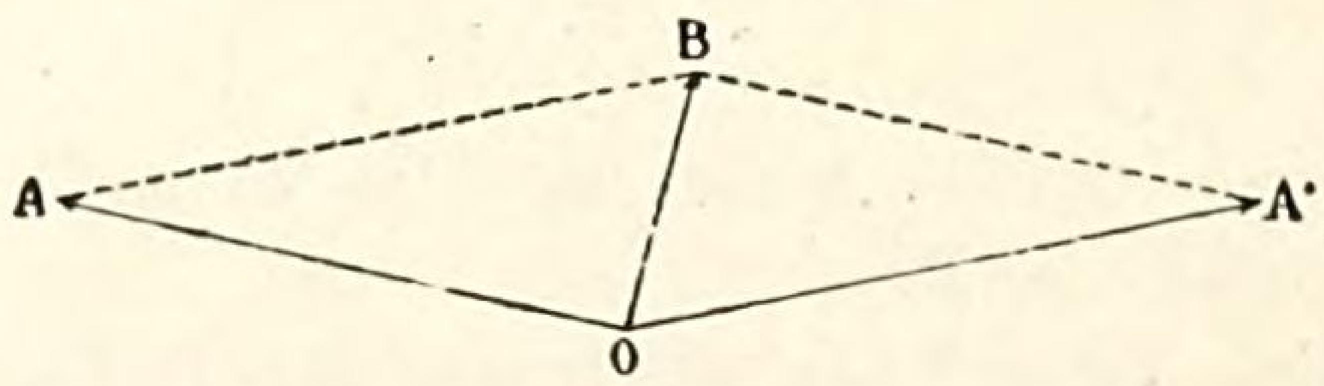


Fig. 72.

erzeugt worden wäre, wenn der Magnet senkrecht zur Richtung des Feldes wäre. Ist insbesondere T die Intensität des Erdfeldes, so ist das Produkt TM das Moment der Wirkung der Erde auf den Magnet.

299. Astatische Systeme. — Für zwei Magnete (Fig. 72), deren magnetische Momente OA und OA' sind, ist das resultirende Moment die Diagonale OB des aus OA und OA' construirten Parallelogramms. Sind die Momente OA und OA' gleich und genau entgegengesetzt, so ist das resultirende Moment Null und das Gleichgewicht ist für jede Richtung des Systems in einem gleichförmigen Felde stabil; das System heisst *astatisch*.

Sind die Momente OA und OA' nahezu gleich und bilden sie einen Winkel von nahezu 180°, so ist die Resultante OB sehr klein und hat merklich die Richtung der Halbirungslinie des Winkels AOA'; sie ist demnach nahezu senkrecht zu jeder Nadel. Wenn demnach zwei Magnetnadeln, die ein *quasi astatisches* System bilden, sich in einem gleichförmigen Felde be-

finden, sind sie in einer zur Kraft des Feldes senkrechten Richtung im stabilen Gleichgewicht.

Dieser Fall ist genau realisirt bei den für gewisse Galvanometer verwendeten Magnetnadeln. Das System ist um so näher astatisch, je mehr sich die Richtung der freien Nadeln der zum magnetischen Meridian senkrechten Lage nähert.

300. Magnetische Polarität. — Durchbrechung eines Magnets. — Zerbricht man eine Magnetnadel, so wird jeder Teil ein vollständiger Magnet mit zwei Polen von derselben Intensität und entgegengesetztem Zeichen, und die Erscheinung wiederholt sich unendlich oft, so weit man auch die Teilung durch mechanische Mittel treiben möge. Die Thatsache ist für die Theorie des Magnetismus grundlegend: dieselbe zeigt zunächst, dass es unmöglich ist, eine unabhängige positive oder negative magnetische Masse zu erhalten, die nicht mit einer gleichen Masse von entgegengesetztem Zeichen verbunden wäre; dann, dass der Magnetismus eine ihrem Wesen nach an die Moleküle gebundene Erscheinung ist. Man ist so zu der Annahme gekommen, dass der Magnetismus von einer Art Polarisation der ponderabeln Moleküle herrührt, indem jedes ein kleiner Magnet mit seinen zwei Polen ist, die genau an seinen Endflächen liegen.

301. Magnetisirung durch Influenz. — Der Bart von Eisenfeilspänen, der an einem Magnete haften bleibt, zeigt, dass jedes Teilchen des Feilichts selbst ein kleiner Magnet geworden ist. Die Zahl der Späne, die den Magnet direkt berühren, ist verhältnissmässig sehr klein, die andern, die mit einander in einer Reihe verbunden sind und an den ersten haften, bilden Ketten, in denen die Glieder mit ihren ungleichnamigen Polen verbunden sind. Immerhin ist die von den einzelnen Feilspänen erlangte Magnetisirung vergänglich; sobald dieses Feilicht abgerissen und vom Magnete entfernt ist, nimmt es seinen ursprünglichen neutralen Zustand wieder an. Ebenso wird ein Stab weichen Eisens magnetisch, wenn er in der Verlängerung eines Magnets aufgestellt ist und erhält zwei Pole, die ähnlich liegen, wie die des Magnets, so dass also die beiden zusammenstossenden Enden des Magnets einer- und des weichen Eisens andererseits Magnetismus von entgegengesetztem Zeichen besitzen. Dieses magnetisirte weiche Eisen kann seinerseits in derselben Weise auf ein zweites Stück einwirken und so fort. Sobald man den ursprünglichen Magnet fortnimmt, verschwindet die Magnetisirung des ersten Weicheisenstabes und der aller ihm folgenden zum grösseren oder geringeren Teile, und alle Wirkungen, die sie auf einander ausgeübt haben, verschwinden gleichzeitig.

Allgemeiner wird jeder magnetische Körper, sobald er in ein magnetisches Feld gebracht wird, selbst ein Magnet. Es ist dies eine Magnetisirung *durch Influenz* oder die *magnetische Induction.*

Die Magnetisirungsachse ist in jedem Punkte der Richtung der resultirenden Kraft parallel. Diese Resultante rührt aber von der Wirkung des Feldes

her und von der Wirkung, welche von dem inducirten Magnetismus selbst hervorgerufen ist. Ist der betrachtete Körper unendlich klein, so ist die Magnetisirung genau der Kraft des Feldes in dem betrachteten Punkte parallel.

Es folgt hieraus auch der Schluss, dass die Wirkung eines Magnets auf einen neutralen Körper Null ist, und dass jeder von einem Magnete auf einen magnetischen Körper ausgeübten Wirkung eine magnetische Induction auf den letzteren vorangeht.

Man sieht noch die Analogie dieser Erscheinung mit der der elektrostatischen Induction, und insbesondere mit der Induction auf die Dielektrica.

Der so durch Induction hervorgerufene Magnetismus hängt nicht bloss von der Intensität des Feldes, sondern auch von der Natur der betrachteten Substanz ab; die im reinen Eisen und Nickel sehr kräftige Magnetisirung ist in allen andern magnetischen Körpern sehr viel schwächer.

302. Weiches Eisen. — Coercitivkraft. — Das Eisen wird absolut *weich* genannt, wenn es, nachdem es in ein sehr kräftiges magnetisches Feld gebracht war, seinen gesammten Magnetismus verliert, sobald es aus demselben entfernt wird. Das in magnetischer Hinsicht weiche Eisen ist auch im gewöhnlichen Sinne weich: es kann leicht gebogen und bearbeitet werden und besitzt wenig Elasticität. Umgekehrt ist das gewöhnliche Eisen nicht weich im magnetischen Sinne des Wortes; wenn es unrein ist oder mechanische Aenderungen erlitten hat, bleibt es mehr oder weniger magnetisch, und diese Eigenschaft, den Magnetismus festzuhalten, bezeichnet man als *Coercitivkraft*. Eine Eisensorte besitzt eine um so grössere Coercitivkraft, eine je grössere Menge von remanentem Magnetismus sie behält; gleichzeitig wird dieses Eisen schwerer durch Induction magnetisch. Die Coercitivkraft ist demnach eine der Reibung ähnliche Eigenschaft; sie leistet in gewissen Grenzen den Aenderungen Widerstand, die äussere Kräfte in der Magnetisirung hervorzurufen suchen, und infolge derselben entspricht gegebenen äusseren Bedingungen nicht ein eindeutig bestimmter Gleichgewichtszustand.

Für den Stahl ist die Coercitivkraft sehr gross; dieses Metall wird durch Induction schwerer magnetisch als das weiche Eisen; aber es behält auch den einmal erhaltenen Magnetismus wesentlich besser bei. Die magnetischen Eigenschaften des Stahls wechseln mit der Zusammensetzung des Metalles und mit der Art seiner Herstellung; dieselben hängen in hohem Maasse von der Art ab, in der die Härtung erfolgt ist, ebenso wie von dem Grade des Anlassens, bis auf welchen der Stab später gebracht ist. Die Coercitivkraft ist um so grösser, je härter und je spröder der Stahl ist.

Bis jetzt haben wir implicite angenommen, dass der Magnetismus eines Magnets unveränderlich und von den Kräften, die auf den Magnet einwirken, unabhängig ist; aber diese Art *magnetischer Rigidität* ist ein Grenzfall, der niemals in voller Strenge verwirklicht ist. Befindet sich ein in ein kräftiges magnetisches Feld gebrachter Magnet dort in seiner normalen

Gleichgewichtslage, so vergrössert sich seine Magnetisirung etwas; dieselbe wird dagegen kleiner, wenn er sich dort in entgegengesetzter Richtung befindet. Die so bewirkten Aenderungen sind im Allgemeinen schwach und gewöhnlich vorübergehend, wie die von weichem Eisen unter denselben Verhältnissen; diese Aenderungen können im Allgemeinen ausser Acht gelassen werden, wenn es sich um stark magnetisirte Stahlstäbe handelt, die sich in einem wenig intensiven Felde, wie dies zum Beispiel das von der Erde erzeugte Feld ist, befinden.

303. Einfluss der Temperatur. — Die Wärme wirkt ebenfalls auf den Magnetismus der Magnete ein. Eine mässige Temperaturerhöhung schwächt den Magnetismus, aber vorübergehend, und der Magnet erhält mit seiner früheren Temperatur auch seinen ursprünglichen Magnetismus wieder. In den Grenzen, in denen die Temperatur der Atmosphäre wechselt, sind die hierdurch erzeugten Wirkungen merklich den Temperaturänderungen proportional, so dass man, wenn man M_0 und M_t die magnetischen Momente eines Magnets bei den Temperaturen 0° und t° nennt, die Relation erhält

$$M = M_0 (1 - at),$$

wo der Coefficient a von der Natur des Stahls abhängt.

Eine grössere Erhitzung, die beispielsweise 100° übersteigt, ruft eine dauernde Schwächung des Magnetismus hervor, und ein Stahlstab, der auf lebhafte Rotglut erhitzt ist, hat gewöhnlich, wenn er zur gewöhnlichen Temperatur zurückkehrt, jede Spur von Magnetismus verloren.

Die Temperaturerhöhung bringt in den magnetischen Eigenschaften des weichen Eisens analoge Wirkungen hervor. Bei den gewöhnlichen Temperaturen der Luft ändert sich der durch ein bestimmtes Feld im Eisen inducirte Magnetismus wenig mit den Temperaturänderungen, aber über 100° wird die Verkleinerung des inducirten Magnetismus eine sehr starke. Bei einer Temperatur, die über der der Rotglut liegt, behält das Eisen nicht mehr die Eigenschaft von einem Magnete angezogen zu werden; dasselbe ist dann also überhaupt nicht mehr magnetisch.

304. Magnetische Fluida. — Die Physiker des vorigen Jahrhunderts, insbesondere Aepinus und Coulomb, haben die magnetischen Erscheinungen durch eine Hypothese zu erklären versucht, die der über die elektrischen Fluida analog ist.

Nach dieser Anschauung muss man den Fluidis, den Magneten und den magnetischen Körpern eine Anzahl Eigenschaften beilegen, die alle Versuche zu erklären gestatten.

Man nimmt hiernach die Existenz zweier imponderabler magnetischer Fluida an, die, wie die elektrischen Fluida, aus Molekülen bestehen, die auf die Moleküle derselben Art abstossend und auf die Moleküle der andern Art anziehend wirken, während die gegenseitigen Einwirkungen im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes stehen. Die Mischung dieser beiden

Fluida in gleichen Mengen ist ohne Einfluss auf die äusseren Körper und bildet das, was man das neutrale Fluidum nennt.

Wegen der Erscheinungen der magnetischen Induction muss man annehmen, dass das neutrale Fluidum in unbegrenzter Menge in den magnetischen Körpern vorhanden ist und sich in gesonderte Fluida unter dem Einfluss der Magnete teilt.

Da die permanenten oder temporären Magnete stets vollständig sind, welches auch ihre Ausdehnungen sind, muss man auch annehmen, dass die in einem Volumenelement enthaltenen Fluida dasselbe nie verlassen, um in ein benachbartes Element überzugehen, so dass die Trennung dieser Fluida nur in dem Raume eines jeden Moleküls erfolgt.

Endlich leistet keine innere Kraft ausser den direkten Wirkungen der magnetischen Fluida ihrer Trennung oder ihrer Vereinigung im weichen Eisen Widerstand. Im unreinen Eisen und im Stahl dagegen ist noch ein besonderer Widerstand vorhanden, eine Art Reibung, die man Coercitivkraft nennt, und welche die Magnetisirung durch Influenz begrenzt und später, wenn die äussere Kraft verschwunden ist, die Wiedervereinigung der Fluida verhindert.

Es ist nicht weiter zu verwundern, dass die Theorie der Fluida mit allen diesen Ergänzungen, die nur ganz willkürlich hinzugefügt sind, die Erscheinungen schliesslich erklärt; unter solchen Umständen beweist die Uebereinstimmung mit den Versuchen nichts zu Gunsten der Genauigkeit von Hypothesen; wir werden von dieser Hypothese weiter keinen Gebrauch machen.

305. Definition der Elemente des Erdmagnetismus. — Das magnetische Feld, welches die Erde umgiebt, und welches man Erdfeld nennen kann, ist in einem Raume von gegen den Erdradius kleinen Dimensionen merklich gleichförmig; aber die Richtung und die Intensität der Kraft wechseln von Punkt zu Punkt. In der That ändert sich die Kraft auch an einem und demselben Orte selbst mit der Zeit an Grösse und Richtung; wir wollen aber für jetzt diese immerhin schwachen Aenderungen nicht berücksichtigen, und wollen annehmen, dass man den magnetischen Zustand der Erde zu einem bestimmten Zeitpunkte betrachtet.

Die magnetische Achse eines frei in seinem Schwerpunkte aufgehängten Magnets, der jeder andern Wirkung ausser der des Erdfeldes entzogen ist, würde in seiner Gleichgewichtslage die Richtung der Erdkraft annehmen. In unseren Gegenden ist diese Richtung eine nahezu nord-südliche, und zwar ist dieselbe stark gegen den Horizont geneigt, wobei der Nordpol nach der Erde zeigt.

Man nennt *magnetischen Meridian* an einem Orte die Verticalebene, die durch die Richtung der erdmagnetischen Kraft geht.

Die *Declination* ist der Winkel, den der magnetische Meridian mit dem astronomischen Meridian bildet: die Declination heisst eine *westliche,* wenn

der Nordpol eines frei aufgehängten Magnets sich westlich gegen den durch seine Mitte gehenden geographischen Meridian einstellt; dieselbe ist *östlich,* wenn der Nordpol östlich vom Meridian steht.

Die *Inclination* ist der Winkel der Erdkraft gegen die Projection derselben auf die Horizontalebene.

Es seien:

D die Declination,

I die Inclination,

T die erdmagnetische Intensität,

H die Horizontalcomponente $= T\cos I$,

Z die Verticalcomponente $= T\sin I$.

Eine nur um eine verticale Achse drehbare Magnetnadel folgt allein der horizontalen Componente der Erdkraft und stellt sich so, dass ihre Magnetisirungsachse im magnetischen Meridian liegt. Entfernt man sie aus demselben um den Winkel δ, so hat das Drehungsmoment das Paares, welches sie zurückzudrehen sucht, wenn man M das magnetische Moment der Nadel nennt, den Wert

$$HM\sin\delta;$$

dasselbe ist dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional. Dieses Resultat ist von Coulomb durch sehr genaue Versuche mittels der Torsionswaage bestätigt worden.

Ist die Nadel frei an ihrem Schwerpunkte aufgehängt, oder ist dieselbe um eine durch diesen Punkt gehende horizontale und zum magnetischen Meridian senkrechte Achse drehbar, dann ist die Richtung der magnetischen Achse in der Gleichgewichtslage der Nadel die Richtung der Erdkraft selbst; der Winkel, den dann ihre magnetische Achse mit dem Horizont bildet, misst genau die Inclination.

Nehmen wir jetzt an, dass die horizontale Drehachse mit der Normale des magnetischen Meridians einen Winkel α bildet, so können wir die Horizontalcomponente H durch ihre beiden Projectionen ersetzen, deren eine $H\sin\alpha$ der Drehachse parallel ist, deren andere $H\cos\alpha$ zu dieser Achse senkrecht ist. Die Nadel folgt nur den beiden Kräften Z und $H\cos\alpha$, die in der Ebene liegen, welche sie durchläuft; die Resultante dieser beiden Kräfte hat den Betrag

$$T_1 = \sqrt{Z^2 + H^2\cos^2\alpha},$$

und die Nadel bildet in ihrer Gleichgewichtslage mit der Horizontalen einen Winkel i, der durch die Gleichung gegeben ist

$$\operatorname{ctg} i = \frac{H\cos\alpha}{Z} = \operatorname{ctg} I\cos\alpha,$$

Der Winkel i ist die scheinbare Inclination in der Verticalebene, welche mit dem magnetischen Meridian den Winkel α bildet. Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so folgt $i = \frac{\pi}{2}$, und die Nadel stellt sich vertical. Lässt man den Winkel α sich um $\frac{\pi}{2}$ ändern, so erhält man $\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin\alpha$, und die neue Inclination i' erhält den Wert

$$\operatorname{ctg} i' = \mp \operatorname{ctg} I \sin\alpha.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man

$$\operatorname{ctg}^2 i + \operatorname{ctg}^2 i' = \operatorname{ctg}^2 I,$$

eine Formel, die man oft zur Bestimmung der Inclination benutzt.

Trägt die Nadel noch ein Zuschlagsgewicht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, geht die Rotationsachse nicht durch den Schwerpunkt, so ist die Richtung des Gleichgewichts eine andere.

Nehmen wir insbesondere an, dass ein Gewicht p in der Entfernung d von der Rotationsachse die Nadel in einer gewissen Ebene horizontal erhält, so reducirt sich das Moment des magnetischen Kräftepaares auf das Moment der Verticalcomponente, und die Gleichgewichtsbedingung ist

$$pd = MZ = MT \sin I.$$

Diese Bedingung ist vom Azimut der Verticalebene, in der sich die Nadel bewegt, unabhängig; das Gegengewicht, welches die Nadel in einer Ebene horizontal stellt, thut dies auch in jeder andern Ebene. Man kann demnach, wenn man die Nadel auf eine verticale Spitze setzt, dieselbe so äquilibriren, dass sie stets horizontal bleibt; aber das Moment des Gegengewichtes hängt von der Verticalcomponente ab, und dieses muss geändert werden, wenn man die Nadel in andern Breiten benutzen will.

306. Verteilung des Erdmagnetismus. — Die Elemente des Erdmagnetismus, Intensität, Declination und Inclination, sind an verschiedenen Punkten der Erde nicht dieselben. Diese Elemente variiren als Funktionen der geographischen Coordinaten nach sehr complicirten Gesetzen; aber wenn man sich mit einer ersten Annäherung begnügt, dann können die Aenderungen in sehr einfacher Weise dargestellt werden.

Der magnetische Meridian eines Ortes schneidet die Erdoberfläche in einem grössten Kreise; alle Punkte dieses grössten Kreises haben dieselbe Ebene als magnetischen Meridian.

Alle magnetischen Meridiane treffen sich in demselben Durchmesser; dieser Durchmesser ist die *magnetische Achse* der Erde; die Punkte, in denen derselbe die Erdoberfläche schneidet, haben, trotzdem dieser Ausdruck incorrekt ist, den Namen *magnetische Pole* erhalten. Die magnetische Achse bildet einen Winkel von ungefähr 15° mit der Rotationsachse der Erde.

Es ist klar, dass die Declination sich auf demselben magnetischen Meridian von Punkt zu Punkt ändert. Eine Ausnahme ist nur für den Meridian vorhanden, der gleichzeitig durch die magnetische Achse und durch die Erdachse geht und also mit dem geographischen Meridian zusammenfällt; für alle auf ihm gelegenen Punkte ist die Declination Null. Auf der einen Seite von diesem grössten Kreise schlägt der Nordpol der Nadel nach Westen aus, und die Declination ist eine westliche, auf der andern Seite schlägt dieselbe nach Osten aus, und die Declination ist eine östliche.

Der zur magnetischen Achse senkrechte grösste Kreis heisst *magnetischer Aequator*. In allen Punkten des magnetischen Aequators ist die Erdkraft horizontal und die Inclination Null. Zu beiden Seiten wird die Inclination immer grösser bis zu den magnetischen Polen, wo dieselbe 90° beträgt: in der nördlichen Halbkugel neigt sich der Nordpol nach der Erde, in der südlichen Halbkugel der Südpol.

307. Hypothese eines Erdmagnets. — Biot untersuchte, ob es möglich ist, den magnetischen Zustand der Erde und die Variation der magnetischen Elemente auf der Oberfläche durch die Annahme eines nach der magnetischen Achse gerichteten Centralmagnets darzustellen; er fand, dass die Resultate der Rechnung um so besser mit den Beobachtungen übereinstimmen, je kleiner der Abstand der Pole dieses angenommenen Magnets ist.

Ersetzt man so die Erde durch einen gegen den Radius unendlich kleinen Magnet, d. h. durch zwei gleiche Massen von entgegengesetztem Zeichen, die einander sehr nahe sind, so weiss man (**153**), dass in der Breite λ vom magnetischen Aequator aus die Inclination durch die Gleichung gegeben ist

$$\operatorname{tg} I = 2 \operatorname{tg} \lambda.$$

Was die Intensität T der Kraft in irgend einem Punkte der Oberfläche betrifft, so kann dieselbe als Funktion der Kraft T_a am Aequator ausgedrückt werden durch die Formel

$$T^2 = T_a^2 (3 \sin^2 \lambda + 1).$$

Am magnetischen Pole ist die Intensität $T_p = 2 T_a$; dieselbe ist also zwei Mal so gross als am Aequator.

Diese beiden Formeln sind, wenigstens näherungsweise, mit den zu einer bestimmten Zeit auf der gesammten Erdoberfläche gemachten Beobachtungen in Uebereinstimmung.

Was das absolute magnetische Moment der Erde, ϖ, betrifft, so kann man dasselbe einfach mittels der Gleichung

$$\varpi = T_a R^3 = \frac{T R^3}{\sqrt{3 \sin^2 \lambda + 1}}$$

erhalten, in der R den Erdradius bezeichnet.

Die Hypothese eines Erdmagnets ist von Gilbert in die Wissenschaft eingeführt worden. Der Pol, der sich hiernach in der Südhämisphäre befindet, hat den Namen Südpol erhalten; derselbe ist augenscheinlich von derselben Natur, wie der Nordpol der Magnete; der in der Nordhämisphäre gelegene ist von derselben Art wie der Südpol der Magnete.

Infolge dieser Annahme eines Erdmagnets hat man auch als Südpol den Pol der Nadeln bezeichnet, der sich nach Norden richtet und als Nordpol den, der nach Süden zeigt; in der Theorie der Fluida müsste man trotz des Widerspruchs, der in den Bezeichnungen liegt, sagen, dass ein Nordpol Südfluidum und ein Südpol Nordfluidum enthält. Aber es ist besser, hierbei auf die Ausdrücke *Süd* und *Nord* zu verzichten, die zu Zweideutigkeiten Anlass geben, und, wie wir es gethan haben, positiven Magnetismus den zu nennen, der dem Nordpol der Magnete entspricht, und negativen Magnetismus den des Südpols.

308. — Die Hypothese eines unendlich kleinen Centralmagnets ist nur eine der Formen, unter denen man den Erdmagnetismus darstellen kann; es ist dies sogar die, welche den geringsten Grad von Wahrscheinlichkeit für sich hat, denn die zweifellos sehr hohe Temperatur des Erdmittelpunktes lässt sich nicht mit der Existenz stark magnetisirter Körper in Einklang bringen.

Wir wissen zum Beispiel, dass zwei halbkugelförmige, entgegengesetzt gleiche Oberflächenschichten — wir nannten sie Gleitschichten (**157**) — die so verteilt sind, dass sie in jedem Punkte des Innern eine constante Kraft liefern, ausserhalb dieselben Wirkungen hervorrufen wie zwei unendlich nahe Massen. Die Dichte dieser Schichten würde an den Polen den Wert haben

$$\sigma_0 = \frac{3}{8\pi} T_p = \frac{3}{4\pi} T_a,$$

und in einem Punkte der magnetischen Breite λ

$$\sigma = \sigma_0 \sin \lambda.$$

Nach dieser Auffassung wäre demnach die Erde mit zwei magnetischen Schichten bedeckt, mit einer negativen auf der nördlichen und einer positiven auf der südlichen Halbkugel, wobei die Dichte in jedem Punkte dem Sinus der magnetischen Breite proportional ist.

Die Gesammtmasse jeder Schicht wird ausgedrückt durch

$$\pi R^2 \sigma_0 = \frac{3}{4} R^2 T_a;$$

man kann dieselbe demnach leicht berechnen, wenn man den absoluten Wert der Kraft am Aequator kennt.

Wir werden in der Folge sehen, dass noch andere Auffassungsweisen für den Erdmagnetismus möglich sind; der unendlich kleine Centralmagnet

ist aber, obwohl seine Annahme an und für sich unzulässig ist, in der That der sehr einfache mathematische Ausdruck für mehrere gleichwertige Zustände, die mit den bekannten Eigenschaften der magnetischen Körper vollkommen im Einklang stehen.

309. Aenderungen des Erdmagnetismus. — Die Elemente des Erdmagnetismus zeigen auch Aenderungen mit der Zeit; die einen sind rein zufällige, die andern zeigen einen wohlausgeprägten periodischen Charakter. Die Aenderungen mit langer Periode, die man säculare Aenderungen nennt, können in erster Annäherung durch eine Drehung der magnetischen Achse um die Erdachse wiedergegeben werden, eine Drehung, infolge deren die magnetische Achse einen Kreiskegel von ungefähr 30° von Osten nach Westen beschreibt.

Da der Magnetpol der Erde, der sich jetzt auf Boothia Felix 97° westlicher Länge (Greenwich) befindet, im Jahre 1660 in der Nähe des Nordcaps in 23° östlicher Länge lag, so sieht man, dass die ganze Periode der Umdrehung ungefähr 800 Jahre beträgt. Die Declination in Paris, die früher eine östliche gewesen war, war Null im Jahre 1666; seit dieser Zeit ist dieselbe westlich und war bis zum Jahre 1824 gewachsen; dieselbe nimmt augenblicklich ab und wird um 2050 wieder Null sein, wenn die Erscheinung denselben Gang beibehält: der magnetische Pol wird dann von uns aus gesehen jenseits des Nordpols liegen. Seit 1666 hat die Inclination immer abgenommen: dieselbe wird in dem Augenblicke ihr Minimum erreichen, wo die Declination Null sein wird.

Die Aenderungen von kurzer Periode scheinen mit der scheinbaren Bewegung der Sonne, des Mondes etc. zusammen zu hängen und folgen Gesetzen, die noch nicht vollständig erforscht sind.

Die mittleren Werte der Declination z. B. zeigen an demselben Orte eine wohlausgeprägte tägliche Oscillation mit zwei Maxima und zwei Minima. Die Amplitude der Abweichung der Nadel ist bei Tage viel grösser als bei Nacht, und die Stunde der grössten Abweichung ist verschieden nach der Lage der Orte. Während beispielsweise das Maximum der Abweichung nach Westen für den mittleren jährlichen Gang gegen 9 Uhr Morgens in Hobart Town (Tasmanien), auf Batavien, am Cap (der guten Hoffnung) und auf St. Helena eintritt, entspricht dieser Zeitpunkt im Gegenteil auf der nördlichen Halbkugel dem Maximum der Abweichung nach Osten. Das Maximum der Westabweichung tritt gegen 1 Uhr Nachmittags ein in Toronto (Canada), London und Paris, gegen 2 Uhr in Petersburg, gegen 3 Uhr in Nertschinsk und Peking. Die Stunden dieser Maxima und Minima wechseln ausserdem mit der Jahreszeit.

Die andern Elemente des Magnetismus, die Inclination und die Kraftcomponenten zeigen ähnliche Schwankungen.

Befreit man die auf die verschiedenen magnetischen Elemente bezüglichen Beobachtungen von der mittleren täglichen Schwankung, so kann

man dieselben mit dem Mondtage vergleichen, und man findet in den Resten ebenfalls eine regelmässige Aenderung.

Ebenso ist eine periodische jährliche Aenderung vorhanden.

Endlich scheinen auch die zufälligen Aenderungen, die gleichzeitig auf einem grossen Teile, wenn nicht auf der gesammten Erdoberfläche einzutreten scheinen, die man gewöhnlich als magnetische Störungen oder Gewitter bezeichnet, in gleicher Weise in ihren mittleren Wirkungen gewissen jährlichen oder säcularen Perioden unterworfen. Diese Störungen stehen in direkter Beziehung zu der Erscheinung des Nordlichtes und sind von zufälligen Strömen in den Telegraphenleitungen begleitet.

2. Capitel.

Constitution der Magnete.

310. Magnetische Fäden. — Der Versuch mit dem Zerbrechen eines magnetisirten Stabes setzt die fundamentale Thatsache in Evidenz, dass jedes Volumenelement eines Magnets für sich genommen in seinem gegenwärtigen Zustande ein vollständiger Magnet ist, der eine magnetische Achse und ein bestimmtes Moment besitzt. Wir sagen in seinem gegenwärtigen Zustande, denn es ist klar, dass, wenn das Volumenelement statt nur von dem umgebenden Mittel getrennt gedacht zu sein, in Wirklichkeit von demselben abgetrennt würde, dasselbe nicht mehr denselben Zustand beibehalten wird, wie wenn es ein Teil der Gesammtmasse ist.

Wir fassen zwei Moleküle oder magnetische Elemente ins Auge, die an einander stossen und sich mit ihren entgegengesetzten Polen berühren; sind dieselben gleich stark magnetisirt, so reducirt sich die Wirkung für jeden äusseren Punkt auf die der beiden freien Enden. Ebenso beschränkt sich, wenn eine Reihe von gleichmässig magnetisirten Molekülen mit ihren Enden an einander stossen, da alle magnetischen Achsen in derselben Geraden liegen, die äussere Wirkung des so gebildeten linearen Magnets auf die der beiden Enden, während jeder zwischenliegende Punkt entgegengesetzt gleiche Wirkungen verursacht, die sich gegenseitig aufheben. Eine derartige Zusammenfassung von magnetisirten Molekülen bildet einen *gleichförmigen magnetischen Faden.*

311. Freier Magnetismus. — Aber wenn in diesem Faden von Molekülen die Magnetisirung veränderlich ist, dann findet sich in jedem Punkte eine gewisse Menge zu Tage tretenden oder *freien* Magnetismus, die der Differenz der magnetischen Massen zweier sich berührender Nachbarmoleküle gleich ist. Nimmt man z. B. an, dass die Magnetisirung von der Mitte des Fadens aus nach den Enden zu abnimmt, so sieht man, dass auf der einen Hälfte des linearen Magnets ein Ueberschuss an positivem Magnetismus vorhanden ist, der nach einem bestimmten Gesetze verteilt ist, und auf der andern Hälfte ein gleicher Ueberschuss an negativem Magnetismus. Der so entstandene magnetische Faden ist nicht mehr gleichförmig, aber es ist klar, dass man denselben als aus der Zusammensetzung von gleichförmigen Fäden von verschiedener Länge resultirend auffassen kann.

312. Gleichförmiger Magnet. — Ein Magnet von endlichen Dimensionen, der aus einander gleichen, parallel neben einander gelagerten Fäden besteht, kann ein *gleichförmiger* Magnet genannt werden; da die Pole der Elementarmagnete an den Enden liegen, so sieht man, dass die Wirkung des ganzen Magnets sich auf die von zwei magnetischen Schichten reducirt, die auf seinen Endflächen nach einem einfachen Gesetze verteilt sind.

313. Beliebiger Magnet. — In einem Punkte P eines beliebigen Magnets hat die magnetische Achse eine bestimmte Richtung, und diese Richtung ändert sich in stetiger Weise; man kann demnach im Innern des Magnets eine Linie ziehen, die in jedem Punkte die daselbst vorhandene magnetische Achse berührt, und sich magnetische Fäden denken, welche längs dieser Magnetisirungslinien gerichtet sind.

Der Magnet wird so geteilt sein teils in nicht gleichförmige Fäden, die geschlossen sind oder an der Oberfläche endigen, teils in gleichförmige Fäden, von denen die einen geschlossen sind, andere an der Oberfläche endigen, andere endlich im Innern begrenzt sind. So lange man über die Form der Fäden keine Annahme macht, ist diese Auffassung die reine und einfache Uebertragung der Thatsachen und enthält nichts Hypothetisches. Dieselbe führt dazu, jeden Magnet als aus einer magnetischen Schicht, die auf der Oberfläche ausgebreitet ist, und aus magnetischen Massen, die im Innern verteilt sind, bestehend aufzufassen. Man muss demnach eine Flächendichte und eine Raumdichte des Magnetismus in Betracht ziehen.

Die Dichte des freien Magnetismus in einem Punkte ist der Grenzbetrag des Verhältnisses der in einem Volumenelemente, das diesen Punkt umgiebt, enthaltenen magnetischen Masse zu dem Volumen selbst; die Flächendichte ist der Quotient der Menge des Magnetismus, der auf einem diesen Punkt umgebenden Flächenelement vorhanden ist, durch die Fläche des Elementes.

314. Potential eines Magnets. — Hiernach ist klar, dass das Potential des Magnets in irgend einem äusseren Punkte P den Wert hat

$$V = \int \frac{\sigma}{r}\, dS + \int \frac{\rho}{r}\, dv. \tag{1}$$

In dem ersten Integrale, welches man über die ganze Oberfläche des Magnets ausdehnen muss, bezeichnet σ die Flächendichte auf dem Flächenelemente dS, dessen Abstand vom Punkte P gleich r ist. Das zweite Integral muss über das ganze Volumen des Magnets ausgedehnt werden, wobei ρ die Raumdichte des Magnetismus in dem Elemente dv ist, welches in der Entfernung r vom Punkte P liegt. Diese Dichten ρ und σ können als die eines besonderen Fluidums aufgefasst werden.

Da die Summe der magnetischen Massen stets für jeden Magnet Null ist, erhält man die Bedingungsgleichung

$$0 = \int \sigma dS + \int \rho dv.$$

Die Componenten der magnetischen Kraft im Punkte P sind

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

und diese Kraft selbst hat den Betrag

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}.$$

Diese Formeln sind allgemein und gelten sowohl für im Innern des Magnets gelegene als für äussere Punkte.

Man könnte, ebenso wie für die Elektricität, zeigen, dass die Summe ΔV der drei partiellen zweiten Ableitungen des Potentials für jeden äusseren Punkt gleich Null und für jeden innerhalb der magnetisirten Körper liegenden Punkt gleich $-4\pi\rho$ ist.

Die Fundamentalgleichungen sind dieselben wie für die statische Elektricität. Wir können demnach ohne neuen Beweis die bereits festgestellten Sätze anwenden unter der Bedingung, dass diese Sätze in keiner Weise von den Eigenschaften der Leiter abhängen, und dass andererseits die Coercitivkraft nicht in Rechnung zu treten braucht.

315. Ein Magnet ist mit einer magnetischen Fläche gleichwertig. — Man beweist so unmittelbar diesen Satz von Poisson, dass die Wirkung eines Magnets auf jeden äusseren Punkt mit der einer idealen Schicht gleichwertig ist, deren Gesammtmasse Null ist, und die nach einem bestimmten Gesetze auf der Oberfläche verteilt ist.

Denn nehmen wir an, dass die fraglichen inneren Massen von der Dichte ρ feste elektrische Massen sind, und dass man den Magneten mit einer unendlich dünnen, mit der Erde verbundenen leitenden Fläche belegt, so entsteht durch Influenz auf der inneren Oberfläche des Leiters eine Schicht, die den inneren Massen entgegengesetzt gleich ist. Nun sind die Kraft und das Potential überall ausserhalb Null, also hat die inducirte Schicht in jedem äusseren Punkte ein Potential, welches dem der ursprünglichen Massen entgegengesetzt gleich ist, und diese Schicht ist der algebraischen Summe der ursprünglichen Massen gleich. Eine gleiche Schicht von demselben Zeichen die auf der äusseren Oberfläche nach demselben Gesetze verteilt ist, liefert demnach ein genau gleiches Potential und bildet folglich ein für die äusseren Punkte mit dem vorliegenden System äquivalentes. Der Schluss gilt augenscheinlich für den Magnetismus, da die beiden Arten von Massen demselben elementaren Gesetze unterworfen sind.

Die von dem Magnete ausgeübten äusseren Wirkungen ermöglichen eine Berechnung der Dichte dieser idealen Flächenschicht, zeigen aber Nichts

über die wahre Verteilung des Magnetismus. Um diese Verteilung kennen zu lernen, müsste man durch den Versuch die Kräfte bestimmen, die im Innern des Magnets wirken, und in denselben Höhlungen bohren, in welche Versuchsnadeln einzuführen wären; aber die Fortnahme einer Masse, wie klein dieselbe auch sein möge, ändert die Kraft in der Höhlung, weil man die sehr nahen Massen beseitigt, deren Wirkung nicht ausser Rechnung gelassen werden kann. Der Magnet ist dann mit zwei idealen Schichten gleichwertig, von denen die eine auf der äusseren Oberfläche, die andere auf den inneren Wänden der Höhlung liegt; die Summe ΔV der drei zweiten Ableitungen des Potentials ist in diesem Gebiete Null geworden, während dieselbe dort ursprünglich gleich $-4\pi\rho$ gewesen ist.

316. Theorie von Poisson. — Wir haben bis jetzt keine Annahme über die Art gemacht, wie die magnetischen Massen in der magnetisirten Substanz verteilt sind. Um die Theorie der Magnetisirung durch Influenz aufzustellen, fasst Poisson einen magnetisirten Körper als aus magnetischen Partikeln bestehend auf, die in einem für den Magnetismus undurchdringlichen Mittel verstreut sind. Diese Partikel sind kugelförmig und gleich weit von einander entfernt, wenn der Körper isotrop und homogen ist; jedes derselben enthält gleiche Mengen positiven und negativen Fluidums, teils im neutralen Zustande im Innern, teils im freien Zustande an der Oberfläche. Das magnetische Moment eines jeden Partikels vom Volumen u kann durch uq dargestellt werden, wo der Faktor q von dem Grade der Magnetisirung abhängt. Fasst man ein Volumen dv ins Auge, welches gegen die Dimensionen des Partikels sehr gross, aber gegen die Dimensionen des Magnets unendlich klein ist, so haben alle Partikel, welche dasselbe enthält, merklich parallele magnetische Achsen, und das magnetische Moment des Volumenelementes ist die Summe der Momente der Partikel. Nennt man, wie wir es bereits (167) gethan haben, h das Verhältnis des von den Partikeln eingenommenen Raumes zu dem Gesammtvolumen dv, so enthält dieses Volumenelement eine Anzahl Partikel gleich hdv, und sein magnetisches Moment ist $hqdv$. Dieses Element verhält sich jedem in endlicher Entfernung liegenden Punkte gegenüber wie ein unendlich kleiner Magnet oder wie ein System zweier entgegengesetzt gleicher, einander unendlich naher Massen (151). Das magnetische Moment des Magnets für die Volumeneinheit ist gleich hq.

Der Wert des Verhältnisses h ändert sich von einem magnetischen Körper zum andern, und für denselben Körper hängt der Wert von q in jedem Punkte von dem Grade der Magnetisirung ab; die äusseren Wirkungen steigen oder fallen mit dem Produkte hq. In den Körpern, die keine Coercitivkraft zeigen, stellt sich der Bewegung der Fluida im Innern eines magnetischen Partikels Nichts entgegen; das Gleichgewicht kann demnach nur bestehen, wenn die Resultante aller Kräfte, sowohl der inneren als der äusseren, in jedem Punkte des Moleküls Null ist; in einem mit einer Coercitivkraft behafteten Körper dagegen genügt es, dass diese Resultante

kleiner ist als der gegebene Wert der Coercitivkraft, da diese Kraft wie ein Reibungswiderstand wirkt.

Die Theorie von Poisson ist nicht an die Annahme zweier Fluida gebunden; es ist aber schwieriger, dieselbe von dieser eigentümlichen Auffassung über die Struktur der magnetischen Mittel zu befreien.

317. Theorie von W. Thomson. — Wir werden lieber die Theorie des Magnetismus in der Form darstellen, die ihr Sir W. Thomson gegeben hat. In ihren wesentlichen Resultaten fällt diese Theorie mit der von Poisson zusammen, hat aber den Vorzug, von Anfang an von der Annahme von Fluida und von jeder Annahme über die Constitution des Mittels unabhängig zu sein, so dass sie sich mehr den experimentellen Thatsachen anzuschliessen scheint. Die Grundidee ist die, jeden Teil eines magnetisirten Körpers als einen vollständigen Magnet aufzufassen, der durch die Richtung der Achse und durch sein magnetisches Moment definirt ist, d. h. als einen unendlich kleinen Magnet mit den Massen $+m$ und $-m$ an seinen Enden, mit der Länge ds und folglich mit einem magnetischen Moment gleich mds.

318. Intensität der Magnetisirung. — Hiernach nennt man *Intensität der Magnetisirung* I in einem Punkte den Quotienten des magnetischen Momentes eines Volumenelementes durch das Volumen selbst, in andern Worten den Wert des Momentes für die Volumeneinheit. Man erhält so

$$I = \frac{mds}{dv}. \tag{2}$$

Diese Intensität giebt das Produkt hq der Poisson'schen Theorie wieder.

Die Intensität der Magnetisirung ist eine geometrische Grösse, die wie eine Kraft durch ihre Richtung, welche die magnetische Achse des Volumenelementes ist, und durch ihren numerischen Wert definirt ist; sie kann demnach in jedem Punkte durch eine Gerade von bestimmter Richtung und Länge dargestellt werden.

Alle Erscheinungen des Magnetismus können als Funktion dieser Grösse allein ausgedrückt werden.

319. Ausdruck des Potentials. — Ist I die Intensität der Magnetisirung in einem Punkte M des Magnets, dessen Coordinaten x, y und z sind, bildet ferner die Intensität der Magnetisirung mit den Achsen Winkel, deren Cosinus λ, μ, ν sind, so werden ihre Componenten A, B und C nach den Achsen ausgedrückt durch

$$A = I\lambda,$$
$$B = I\mu,$$
$$C = I\nu.$$

Das magnetische Moment eines Volumenelements ist $mds = Idv$. Das Potential desselben in einem Punkte P, der in dem Abstande r auf einer

Geraden liegt, die mit der Richtung der magnetischen Achse, also mit der Richtung der Intensität, den Winkel θ bildet, ist gleich (151)

$$dV = Idv\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Dieses Potential kann als die Summe der Potentiale dV_a, dV_b, dV_c aufgefasst werden, die von den drei Componenten A, B und C der Magnetisirung herrühren. Bezeichnet man mit δ den Winkel der Geraden MP mit der xAchse und mit ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes P, so erhält man

$$dV_a = \frac{Adv\cos\delta}{r^2} = \frac{Adv(\xi - x)}{r^3}.$$

Andererseits liefert die Gleichung

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = r^2$$

$$(\xi - x) = -r\frac{\partial r}{\partial x},$$

und folglich

$$\frac{\xi - x}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}.$$

Hieraus findet man

$$dV_a = Adv\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dx\,dy\,dz.$$

Man würde ebenso erhalten

$$dV_b = B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}dx\,dy\,dz,$$

$$dV_c = C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dx\,dy\,dz.$$

Das Potential des ganzen Magnets erhält man, wenn man diese Ausdrücke auf das gesammte Volumen ausdehnt, woraus sich ergiebt

(3) $$V = \iiint\left(A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Das Potential des Punktes P ist demnach als Funktion des Abstandes r dieses Punktes von den verschiedenen Volumenelementen des Magnets und der Intensität der Magnetisirung ausgedrückt.

Jedes der Glieder, aus denen die rechte Seite der Gleichung (3) besteht, enthält einen Faktor, der ein vollständiges Differential ist und kann partiell integirt werden; man erhält dann

$$V = \iint \frac{A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy}{r} - \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

wo das erste Integral über die gesammte Oberfläche, das zweite über das Volumen des Magnets ausgedehnt werden muss.

Ist I die Intensität der Magnetisirung in einem Punkte der Oberfläche S (Fig. 73) und θ der Winkel, den die Richtung derselben mit der Normale bildet, sind α, β, γ die Cosinus der Winkel der Normale gegen die Achsen, ist endlich dS ein Flächenelement um den betrachteten Punkt, so erhält man

$$\begin{aligned} IdS\cos\theta &= IdS(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) \\ &= I\lambda.\alpha dS + I\mu.\beta dS + I\nu.\gamma dS. \end{aligned}$$

Die Produkte $I\lambda$, $I\mu$, $I\nu$ sind die Componenten der Magnetisirung und

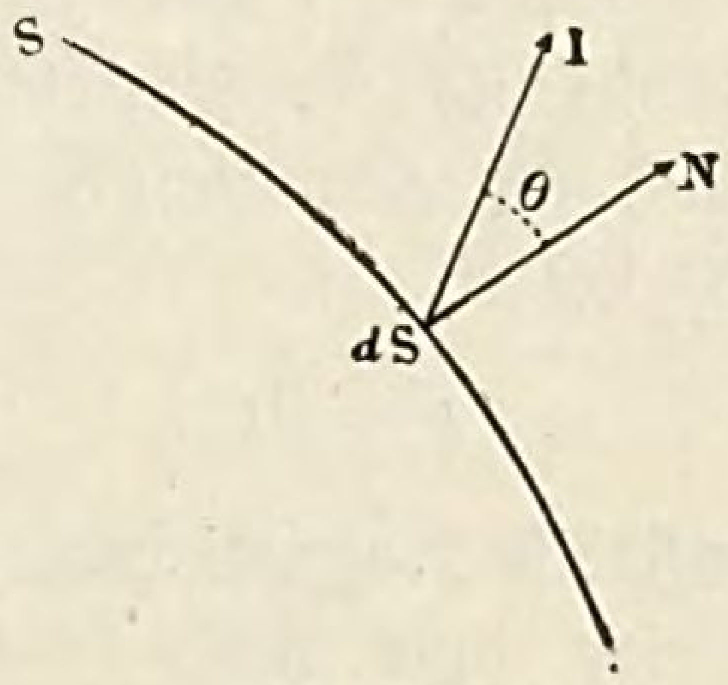


Fig. 73.

αdS, βdS, γdS die Projectionen des Flächenelementes auf die Coordinatenebenen. Man erhält demnach

$$IdS\cos\theta = Adydz + Bdxdz + Cdxdy,$$

und der Ausdruck für das Potential geht über in

$$V = \int \frac{I\cos\theta}{r} dS - \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \tag{4}$$

Die Formeln (1) und (4) stellen dasselbe Potential dar; setzt man dieselben identisch gleich, so sieht man, dass die Oberflächendichte und die Raumdichte des Magnetismus als Funktion der Intensität der Magnetisirung in folgender Weise ausgedrückt werden können

$$\sigma = I\cos\theta = A\alpha + B\beta + C\gamma, \tag{5}$$

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right). \tag{6}$$

So *ist die Oberflächendichte des Magnetismus gleich der Projection der Intensität der Magnetisirung auf die Normale zur Oberfläche in demselben Punkte;*

Die Raumdichte ist entgegengesetzt gleich der Summe der partiellen Ableitungen der Componenten der Magnetisirung nach den drei Achsen.

Die Grössen ρ und σ, welche die Dichten eines Fluidums in der Coulomb'schen Hypothese darstellen, können als rein mathematische Grössen aufgefasst werden. Es sind dies zwei Symbole, die durch die Gleichungen (5) und (6) definirt sind; zur Abkürzung der Ausdrucksweise kann man die Bezeichnung als Dichten beibehalten, ohne aber mit diesem Worte seinen buchstäblichen Begriff zu verbinden.

Wir bemerken noch, dass die auf die zweiten Ableitungen bezügliche Poisson'sche Gleichung im vorliegenden Falle wird

$$\Delta V = -4\pi\rho = 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

Für einen äusseren Punkt ist die rechte Seite identisch Null, da die Intensität der Magnetisirung hier gleich Null ist.

320. Gleichförmige Magnete. — Betrachten wir den speciellen Fall, dass die Magnetisirung *gleichförmig* ist, d. h. dass die Intensität der Magnetisirung in der ganzen Ausdehnung des Magnets der Grösse und Richtung nach constant ist, dann sind die Ableitungen der Componenten A, B, C Null, und die Gleichung (6) liefert

$$\rho = 0;$$

es ist also nur an der Oberfläche Magnetismus vorhanden.

Das Potential reducirt sich dann auf

$$V = I\int\frac{dS\cos\theta}{r},$$

oder, wenn man dS_1 die Projection von dS auf eine zur Magnetisirung normale Ebene nennt,

$$V = I\int\frac{dS_1}{r}.$$

Da alle Volumenelemente parallel magnetisirt sind, ist das magnetische Moment des ganzen Magnets gleich der Summe der Momente aller Elementarvolumina; man erhält demnach

$$\omega = \int I dv = I\int dv = vI.$$

So *ist das magnetische Moment eines gleichförmigen Magnets gleich dem Produkt des Volumens in die Intensität der Magnetisirung.*

Der Ausdruck für die Oberflächendichte

$$\sigma = I\cos\theta$$

zeigt, dass die Aussenwirkung eines gleichförmig magnetisirten Körpers

gleichwertig ist mit der zweier Gleitschichten (**157**), also zweier Schichten, die von der Uebereinanderlagerung zweier homogener magnetischer Massen von den entgegengesetzt gleichen Dichten $\pm\rho$ herrühren, deren positiver Teil parallel zur Magnetisirung um eine solche Grösse δ geglitten wäre, dass man erhält $\rho\delta = I$.

Wir haben (**308**) gesagt, dass man die Wirkung der Erde durch einen unendlich kleinen im Centrum befindlichen Magnet oder durch zwei Gleitschichten darstellen kann; man sieht, dass man die Erde auch als gleichmässig magnetisirt auffassen kann, da diese letztere Bedingung mit den beiden andern gleichwertig ist.

321. Kraft im Innern eines Magnets. — Man kann die magnetische Wirkung in der Substanz eines Magnets selbst nicht bestimmen, ohne eine Höhlung auszubohren, die es ermöglicht, eine kleine Versuchsnadel in dieselbe einzuführen; aber die Schaffung einer freien Oberfläche im Innern des Magnets ist gleichbedeutend mit der Bildung einer Oberflächenschicht, die im Allgemeinen eine endliche Wirkung auf die eingeschlossenen Punkte ausübt, und diese Wirkung hängt von der Form der Höhlung ab.

Eine in die Höhlung gebrachte Masse liegt dann ausserhalb der wirkenden Massen, und die Kraft, der dieselbe ausgesetzt ist, kann dann in gewöhnlicher Weise bestimmt werden. Diese Kraft ist die Resultante zweier andern, deren eine von den äusseren Massen, deren andere von der Oberflächenschicht der Höhlung herrührt; die zweite Kraft hängt von der Form und der Orientirung der Höhlung ab, während die erste hiervon unabhängig ist.

Die Intensität der Magnetisirung kann nun der Grösse und Richtung nach in der ganzen Ausdehnung des unendlich kleinen Volumens, welches man herausnimmt, für constant angesehen werden; es wird demnach möglich sein die zweite Kraft für gewisse einfache Formen der Höhlung zu bestimmen.

322. — Wir nehmen zunächst eine cylindrische Höhlung an, deren Achse parallel und deren Grundfläche zur Richtung der Magnetisirung normal ist. Die Dichte der idealen Schicht ist dann auf den Seitenwänden Null, da die Normalcomponente der Magnetisirung in jedem Punkte Null sein soll; auf den beiden Grundflächen, die zur Magnetisirung senkrecht stehen, ist die Dichte gleichförmig, und zwar gleich $+I$ auf der einen und $-I$ auf der andern. Ist die Grösse der Grundfläche gleich a, so sind auf den beiden Endflächen des Cylinders entgegengesetzt gleiche Massen $+aI$ und $-aI$ vorhanden.

Nehmen wir an, dass der Cylinder ein kreisförmiger ist, und ist r der Radius der Grundfläche und $2h$ die Höhe, so ist die Wirkung der beiden Schichten auf einen in der Mitte der Achse gelegenen Punkt doppelt so gross als die einer homogenen Platte auf einen Punkt des in ihrer Mitte errichteten Lotes. Um diese Wirkung zu berechnen, nehmen wir die Dichte der Einheit gleich an und denken uns die Platte in unendlich schmale concentrische Kreisringe geteilt; die Wirkung eines solchen in dem Abstande ρ

von dem betrachteten Punkte gelegenen Ringes hat zur Componente nach der Achse

$$df = \frac{2\pi r dr}{\rho^2} \cdot \frac{h}{\rho},$$

oder, wenn man die Beziehung $\rho^2 = r^2 + h^2$ berücksichtigt,

$$df = 2\pi h \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Integrirt man zwischen den Grenzen $\rho = h$ und $\rho = \sqrt{r^2 + h^2}$, so erhält man

$$f = 2\pi \left(1 - \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right),$$

und es folgt für die Wirkung der beiden Schichten

$$R = 2fI$$

$$= 4\pi I \left(1 - \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right) = 4\pi I \left(1 - \frac{h}{h\sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}}\right) = 4\pi I \left(1 - \frac{h}{r\sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}}\right).$$

Zwei Fälle sind besonders interessant, die nämlich, in denen die eine der beiden Grössen r und h gegen die andere sehr gross ist. Ist der Cylinder sehr lang, so ist das Verhältnis $\frac{r}{h}$ sehr klein, und der Wert von R nähert sich der Null. Dann reducirt sich die thatsächlich in der Höhlung wirkende Kraft auf die Wirkung der äusseren Massen. Ein unendlich enger Cylinder mit beliebiger Grundfläche liefert augenscheinlich dasselbe Resultat; das Verhältnis bleibt noch dasselbe, wenn man sich in dem Magnete einen Schnitt denkt, durch eine Fläche, die in jedem Punkte den Magnetisirungslinien parallel ist, und wenn man sich einen unendlich dünnen Zwischenraum zwischen den beiden so getrennten Teilen denkt.

Hat der Cylinder die Form einer ebenen Platte, dann ist das Verhältnis $\frac{h}{r}$ sehr klein, und an der Grenze wird der Wert von R

$$R = 4\pi I.$$

Die den Achsen parallelen Componenten dieser Kraft sind

$$R_x = 4\pi A,$$
$$R_y = 4\pi B,$$
$$R_z = 4\pi C.$$

Diese Werte gelten noch für den Fall eines unendlich dünnen Schnittes der senkrecht zu den Magnetisirungslinien geführt ist.

Hat die Höhlung die Form einer Kugel, so ist ihre Oberfläche mit zwei entgegengesetzt gleichen Schichten bedeckt, die wie Gleitschichten verteilt

sind; die Wirkung R dieser Schicht auf jeden inneren Punkt ist constant und parallel zur Magnetisirung und wird ausgedrückt durch

$$R = \frac{4}{3}\pi\sigma_0 = \frac{4}{3}\pi I.$$

Für einen engen Schlitz, dessen Normale mit der Magnetisirungsrichtung den Winkel θ bildet, ist die innere Kraft der Oberflächenschichten zum Schlitze normal und gleich

$$4\pi\sigma = 4\pi I \cos\theta.$$

Der Einfluss der Form der Höhlung tritt in diesen verschiedenen Beispielen deutlich zu Tage.

323. Magnetische Kraft. — In dem Falle einer länglichen cylindrischen Höhlung oder eines den Magnetisirungslinien parallelen Schlitzes hängt die Kraft in einem Punkte nur von dem Potential V der ausserhalb des fortgenommenen Volumenelementes befindlichen Massen ab. Die Componenten dieser Kraft F sind

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Der so definirten Kraft legt man im engeren Sinne die Bezeichnung *magnetische Kraft* oder *resultirende Kraft in einem Punkte der magnetisirten Masse* bei.

324. Magnetische Induction. — Ist die Höhlung ein sehr platter Cylinder oder ein unendlich dünner gegen die Magnetisirungslinien senkrechter Schlitz, dann haben die Componenten der wirklichen Kraft F_1 die Werte

$$\begin{aligned} X_1 &= X + R_x = X + 4\pi A, \\ Y_1 &= Y + R_y = Y + 4\pi B, \\ Z_1 &= Z + R_z = Z + 4\pi C. \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Kraft F_1 spielt in der Lehre von der Magnetisirung durch Influenz eine wichtige Rolle; man nennt dieselbe *magnetische Induction*.

Die Summe der drei partiellen Ableitungen der Funktion F_1 liefert die Gleichung

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} = -\Delta V + 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$
$$= 4\pi\rho - 4\pi\rho = 0.$$

Demnach befriedigt die magnetische Induction die Laplace'sche Gleichung für alle Punkte, sowohl für die inneren als für die ausserhalb des magnetisirten Mittels liegenden. Ausserdem ist dieselbe aber ausserhalb des Magnets augenscheinlich mit der magnetischen Kraft identisch, da die

Magnetisirung I und ihre Componenten A, B und C dann gleich Null sind. Die magnetische Induction besitzt demnach dieselben Eigenschaften wie die elektrostatische Induction (**116**).

Man nennt *Inductionslinie* eine Linie, die in jedem Punkte die Richtung der Induction berührt, *Inductionsröhre* einen Kanal, der seitlich von Inductionslinien begrenzt ist, endlich *Inductionsströmung* durch ein Flächenelement das Produkt der Fläche des Elements in die Normalcomponente der Induction. Da die Induction die Laplace'sche Gleichung für alle inneren und äusseren Punkte befriedigt, so folgt, dass die Inductionsströmung in der ganzen Ausdehnung einer Inductionsröhre constant ist.

325. Verschiedene Arten von Magneten. — Man kann die Magnete in Kategorien teilen, die nach der Art geschieden sind, in der die Intensität der Magnetisirung sich in ihnen von Ort zu Ort ändert.

326. Magnetische Solenoide. — Man nennt *einfaches Solenoid* einen Magnet, dessen Form die eines Fadens von constantem, unendlich kleinem Querschnitt ist, in dessen jedem Punkte die Intensität der Magnetisirung selbst constant ist und der Richtung des Fadens folgt.

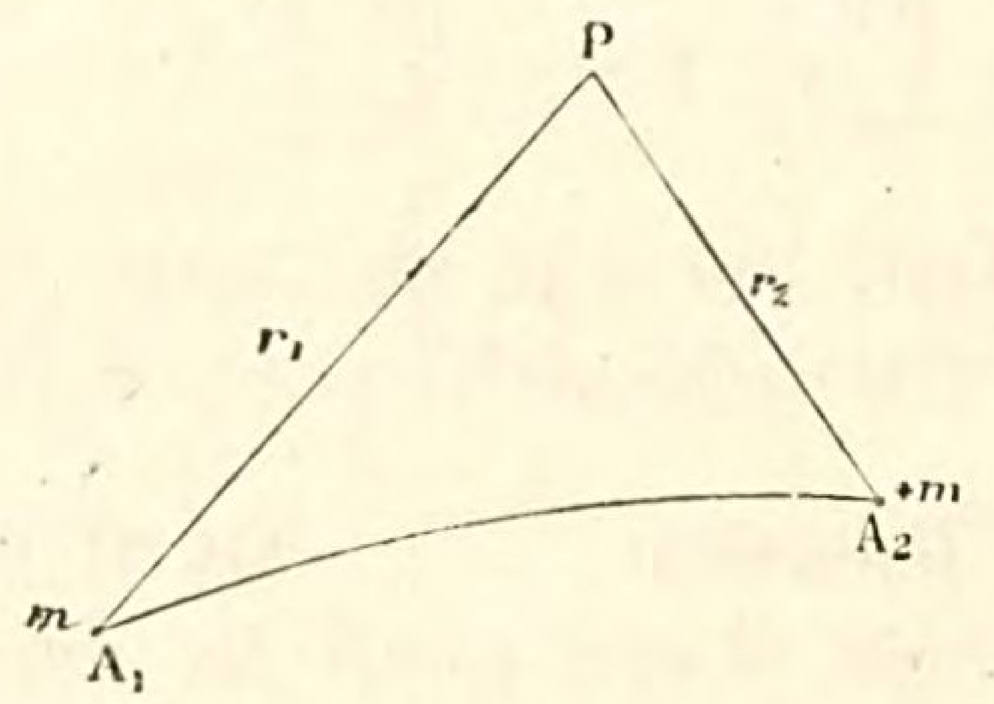


Fig. 74.

Die magnetische Dichte ist in dem ganzen Innern des Fadens und auf der Seitenfläche (**310**) Null; nur an den Enden sind zwei entgegengesetzt gleiche magnetische Massen vorhanden; ist I die Intensität der Magnetisirung und a der Querschnitt des Fadens, so hat jede dieser beiden Massen den absoluten Wert

$$m = aI.$$

Man kann das Produkt aI die *magnetische Stärke* des Solenoides nennen.

Bliebe das Produkt aI constant, während der Querschnitt des Fadens und die Intensität der Magnetisirung sich ändern, dann bildete das System auch dann noch ein einfaches magnetisches Solenoid.

Ein einfaches Solenoid verhält sich allen äusseren Punkten gegenüber wie ein Magnet, dessen Pole genau an den Enden liegen.

Das Potential in einem im Abstande r_2 vom positiven Pole A_2 und im Abstande r_1 vom negativen Pole A_1 gelegenen Punkte (Fig. 74) wird ausgedrückt durch

$$V = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = aI\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Ist ein derartiges Solenoid geschlossen, so ist das Potential überall ausserhalb seiner Substanz Null; folglich ist auch die Kraft Null, und man kann den Magnetismus, der in dem System vorhanden ist, nur entdecken, wenn man dasselbe in einem Punkte durchbricht, und die Enden trennt.

327. Ein magnetischer Faden mit constantem oder veränderlichem Querschnitt, der in jedem Punkte die Richtung der Magnetisirung tangirt, in dem jedoch die magnetische Stärke nicht constant ist, bildet ein *complexes* Solenoid. Ein derartiges System kann als eine Vereinigung von mehreren einfachen Solenoiden von ungleicher Länge in ein Bündel aufgefasst werden.

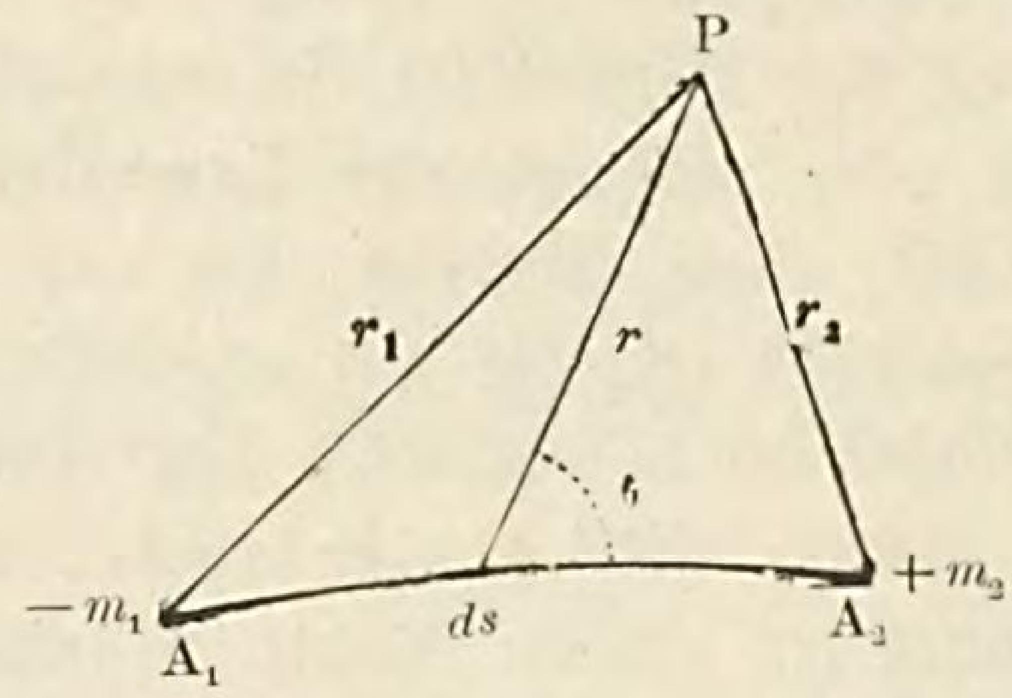


Fig. 75.

Ein Element von der Länge ds (Fig. 75), dessen magnetische Stärke $m = aI$ ist, hat als Potential in einem äusseren Punkte P

$$dV = \frac{m\,ds}{r^2}\cos\theta = -m\frac{dr}{r^2} = -aI\frac{dr}{r^2}.$$

Das Potential des gesammten Fadens im Punkte P ist demnach

$$V = \int_{A_1}^{A_2} -\frac{m dr}{r^2}.$$

Integrirt man die rechte Seite partiell und bezeichnet man mit $-m_1$ und $+m_2$ die Massen an den Endflächen A_1 und A_2, so erhält man

$$V = \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_1}{r_1} - \int_{A_1}^{A_2} \frac{1}{r}\frac{dm}{ds}ds.$$

Der zweite Teil des Potential ist so gross wie das Potential einer längs des Fadens mit der Lineardichte λ verbreiteten Masse, die durch die Beziehung definirt ist

$$\lambda = -\frac{dm}{ds} = -\frac{d(aI)}{ds},$$

und man kann setzen

$$V = \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_1}{r_1} + \int \frac{\lambda ds}{r}.$$

328. Solenoidale Magnete. — Ein Magnet heisst *solenoidal magnetisirt,* wenn er in einfache Solenoide geteilt werden kann, die an der Oberfläche endigen oder in sich geschlossen sind. Freier Magnetismus ist im Innern des Magnets nicht vorhanden; die Verteilung ist eine reine Oberflächenverteilung.

Da bei einem solchen Magnete die Dichte ρ Null ist, erhält man

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Ist umgekehrt der Bedingung (8) genügt, so ist die Dichte in jedem inneren Punkte Null, und der Magnet ist ein solenoidaler.

329. Blattmagnete oder **magnetische Lamellen.** — Man nennt ein *einfaches magnetisches Blatt* einen Magnet, der von zwei unendlich nahen äquidistanten Flächen begrenzt ist, die mit gleichförmigen, entgegengesetzt gleichen magnetischen Schichten belegt sind; oder auch noch einen Magnet, der aus zwei unendlich nahen, nicht äquidistanten, überall entgegengesetzt gleichen Schichten gebildet ist, deren Dichte in jedem Punkte dem gegenseitigen Abstande umgekehrt proportional ist.

Bezeichnet man mit h die Dicke des Blattes in einem Punkte und mit σ die Dichte der Schicht, dann muss das Produkt σh constant sein; man nennt dasselbe die *magnetische Stärke* des Blattes.

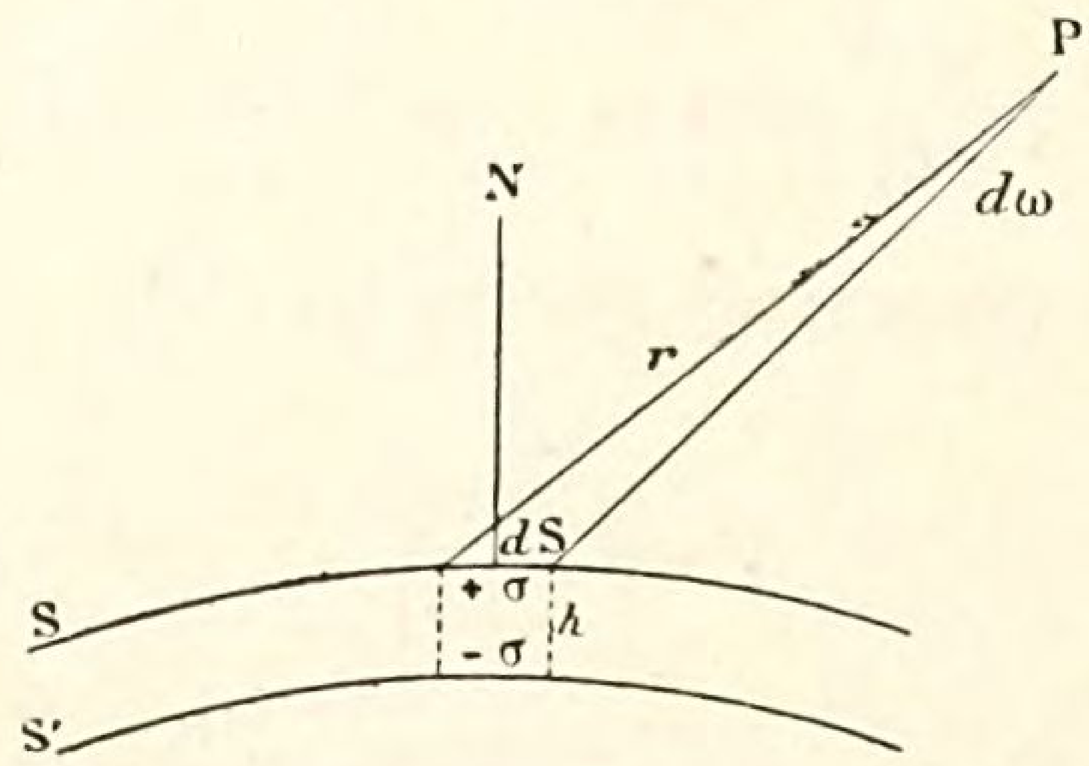


Fig. 76.

Man kann auch sagen, dass ein einfaches magnetisches Blatt eine unendlich dünne Platte ist, deren Magnetisirung in jedem Punkte normal zur Oberfläche ist und eine Intensität besitzt, die der Dicke umgekehrt proportional ist.

Bezeichnet man durch Φ die magnetische Stärke des Blattes, so erhält man demnach

$$\Phi = h\sigma = hI.$$

Der Teil des Blattes, der einem Elemente dS entspricht, kann als ein unendlich kleiner Magnet aufgefasst werden mit dem Momente

$$h\sigma dS = \Phi dS$$

Das Potential dieses Blattelementes auf einen Punkt P (Fig. 76) wird ausgedrückt durch

$$dV = \frac{h\sigma dS}{r^2}\cos\theta = \frac{\Phi dS}{r^2}\cos\theta,$$

wo θ der Winkel der nach aussen gezogenen Normale N der positiven Fläche gegen die Gerade r ist, welche den Punkt P mit dem Elemente dS verbindet.

Der räumliche Winkel $d\omega$, unter dem man vom Punkte P aus das Element dS sieht, ist aber durch die Gleichung gegeben

$$dS\cos\theta = r^2 d\omega, \quad \text{oder} \quad d\omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2}.$$

Hieraus folgt

$$dV = \Phi d\omega.$$

Da der Faktor Φ constant ist, wird das Potential des Blattes in P ausgedrückt durch

(9) $$V = \Phi\omega.$$

Es ist wichtig, das Zeichen des räumlichen Winkels ω genau zu definiren. Das Potential dV ist positiv oder negativ, je nachdem man vom Punkte P aus die positive oder negative Oberfläche des Elementes dS des Blattes sieht, also je nachdem der Winkel θ spitz oder stumpf ist. Betrachtet man den Winkel $d\omega$ unter denselben Verhältnissen als positiv oder negativ, so ist er die Fläche der auf einer Kugel vom Radius Eins, deren Mittelpunkt in P liegt, von einem von P aus durch den Umfang des Elementes gelegten Kegel ausgeschnittenen Calotte; es ist dies die *scheinbare Fläche* dieses Elementes. Der Winkel ω oder die scheinbare Fläche des gesammten Blattes ist folglich durch den Kegel bestimmt, der durch die Conturen des Blattes begrenzt ist; derselbe ist positiv oder negativ, je nachdem der Teil des Blattes, den man vom Punkte P zwischen den Conturen sieht, selbst positiv oder negativ ist. Das Potential des Blattes ist demnach von seiner Form unabhängig; dasselbe hängt nur von der magnetischen Stärke und den Conturen desselben ab. Es folgt hieraus der wichtige Satz von Gauss:

Das Potential eines einfachen magnetischen Blattes in einem äusseren Punkte ist gleich dem Produkte der magnetischen Stärke des Blattes in die von diesem Punkte aus gesehene scheinbare Oberfläche desselben.

Damit das Potential in einem Punkte Null ist, ist die notwendige und hinreichende Bedingung, dass die scheinbare Oberfläche des Blattes Null ist.

Die scheinbare Oberfläche des Blattes ist Null, wenn der Umfang eine ebene Figur ist und der betrachtete Punkt in der Ebene derselben liegt.

Dieselbe ist bei beliebigem Blatte Null, wenn sie aus Teilen von entgegengesetztem Zeichen zusammengesetzt ist, die eine algebraische Summe gleich Null liefern.

Bildet insbesondere das Blatt eine geschlossene Fläche, so ist das Potential für jeden äussern Punkt Null. Für einen im Innern des Blattes

liegenden Punkt ist der Winkel ω gleich 4π, das Potential ist demnach constant und gleich $4\pi\Phi$; dasselbe hat das gleiche Zeichen wie die innere Oberfläche. Da dieses Potential sowohl innerhalb als ausserhalb einen constanten Wert hat, ist die Wirkung eines geschlossenen Blattes auf einen beliebigen Punkt Null.

330. — Wenn zwei magnetische Blätter S und S' (Fig. 77) von derselben Stärke dieselben Conturen haben, und wenn ihre einander gegenüber liegenden Flächen von entgegengesetztem Zeichen sind, dann sind ihre Potentiale für alle Punkte, die ausserhalb des von ihnen eingefassten Raumes liegen, gleich; diese Potentiale unterscheiden sich dagegen um $4\pi\Phi$ für alle zwischen den beiden Flächen liegenden Punkte. Denn das Potential des einen Blattes S ist positiv und gleich $\Phi\omega$, das des andern S' ist $-\Phi\omega'$; die Differenz ist demnach

$$\Phi(\omega + \omega') = 4\pi\Phi.$$

Ebenso ist für zwei unendlich nahe, zu beiden Seiten eines magnetischen Blattes in endlichem Abstande von den Conturen gelegene Punkte die Potentialdifferenz gleich $4\pi\Phi$, denn das Potential ist für den einen $\Phi\omega$ und für

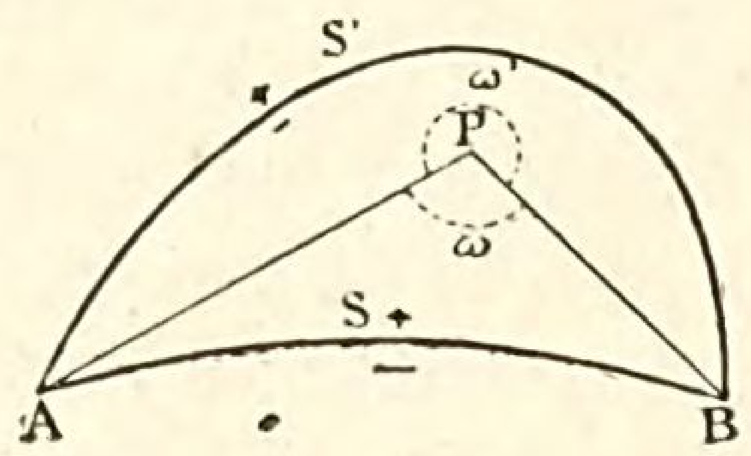


Fig. 77.

den andern $-\Phi(4\pi - \omega)$. Wenn demnach der betrachtete Punkt durch ein Blatt in der Richtung der Magnetisirung hindurchgeht, d. h. von der negativen nach der positiven Seite, dann wächst das Potential plötzlich um $4\pi\Phi$.

Wenn umgekehrt der Punkt fest bleibt und das Blatt sich so deformirt, dass es von der Lage S' in die Lage S (Fig. 77) übergeht, dann erhält das Potential auf P denselben Zuwachs $4\pi\Phi$.

In Wirklichkeit erfolgt die Potentialänderung nicht plötzlich auf einer geometrischen Fläche, weil das Blatt notwendig eine endliche Dicke besitzt, und man kann leicht sehen, dass das Potential in P sich continuirlich ändert, während der Punkt durch die magnetisirte Schicht hindurchgeht.

Denn teilen wir das Blatt SS' (Fig. 78) in zwei parallele Schichten mit den Dicken x und $h - x$ und den Stärken Φ_1 und Φ_2, und fassen wir den Punkt P auf der Trennungsfläche der beiden neuen Blätter ins Auge, so hat das Potential in P den Wert

$$\begin{aligned} V &= \omega\Phi_2 - (4\pi - \omega)\Phi_1 \\ &= \omega(\Phi_1 + \Phi_2) - 4\pi\Phi_1 = \omega\Phi - 4\pi\Phi_1. \end{aligned}$$

Nun hat man

$$\Phi_1 = \sigma x = \Phi \frac{x}{h},$$

und folglich

$$V = \omega\Phi - 4\pi\Phi \frac{x}{h} = \Phi\left(\omega - 4\pi \frac{x}{h}\right).$$

Die Normalwirkung des Blattes im Punkte P ist

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} + 4\pi\Phi \frac{1}{h} = -\Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} + 4\pi I.$$

Dieser Ausdruck ist, wie man voraussehen konnte, die Normalcomponente der Induction auf den Punkt P. Denn wir haben stillschweigend angenommen, dass wir den Punkt P in einen unendlich dünnen zu den Magnetisirungslinien senkrechten Schlitz gebracht haben: das Glied $4\pi I$ ist die Kraft, die man zu den äusseren Wirkungen hinzuthun muss, um die wirkliche Kraft im Innern der Höhlung zu erhalten.

Wir bemerken noch, dass, wenn die Intensität der Magnetisirung eine endliche ist, die magnetische Stärke Φ des Blattes eine unendlich kleine

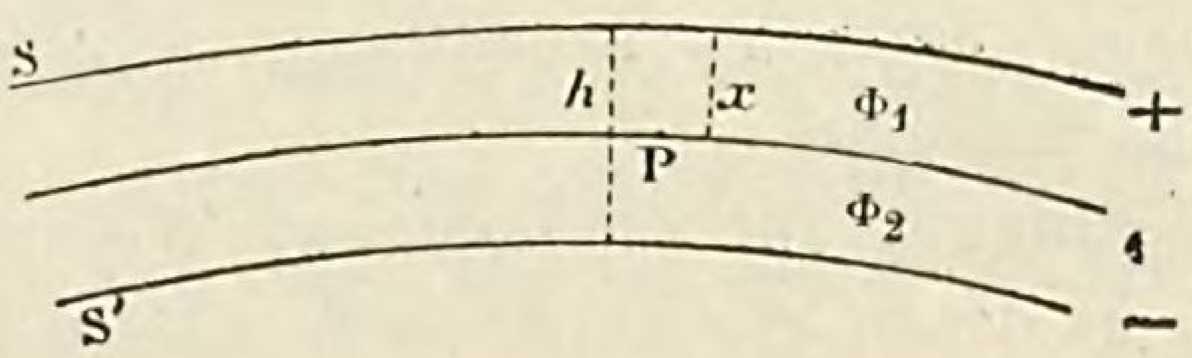


Fig. 78.

Grösse ist; für jeden äusseren Punkt, der in endlicher Entfernung von den Conturen liegt, hat die Kraft demnach einen unendlich kleinen Wert, während im Innern des Blattes die Kraft einen endlichen Wert $4\pi I$ hat, der nach der Normale und der Richtung der Magnetisirung entgegengesetzt gerichtet ist.

331. Lamellenmagnete. — Ein Magnet heisst *lamellenförmig,* wenn er in einfache geschlossene magnetische Blätter oder auch in offene Blätter geteilt werden kann, die ihre Conturen auf der Oberfläche des Magnets haben.

Bezeichnen wir mit Φ die Summe der magnetischen Stärken der Blätter, auf die man stösst, wenn man von einem gegebenen Punkt nach einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, längs einer innerhalb des Magnets gezogenen Linie geht, so ist diese Grösse Φ eine Funktion der Coordinaten, die von der die beiden Punkte verbindenden Linie unabhängig ist; dieselbe hat auf der ganzen Oberfläche eines einzelnen Blattes einen constanten Wert, ändert sich aber von einem Blatte zum andern.

Die Magnetisirungslinien sind nach der Definition senkrecht zu den Oberflächen der Einzelblätter, und die Intensität der Magnetisirung steht in jedem Punkte im umgekehrten Verhältnisse des normalen Abstandes zweier auf einander folgender Blätter. Man erhält demnach

$$I = \frac{d\Phi}{dn}. \tag{10}$$

332. Potential der Magnetisirung. — So besitzt die Funktion Φ in Bezug auf die Magnetisirung bis auf das Zeichen dieselben Eigenschaften wie das Potential in Bezug auf die äusseren Kräfte. Man kann nach der Analogie die Funktion $-\Phi$ *Potential der Magnetisirung* nennen. Die Componenten der Magnetisirung nach den Coordinatenachsen sind bez. den entsprechenden partiellen Ableitungen der Funktion Φ gleich

$$A = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Man findet hieraus

$$A dx + B dy + C dz = d\Phi. \tag{11}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist demnach ein vollständiges Differential. Ist umgekehrt der Ausdruck $Adx + Bdy + Cdz$ das vollständige Differential einer Funktion der Coordinaten, dann sind die Componenten der Magnetisirung bez. gleich den partiellen Ableitungen dieser Funktion, und die Magnetisirung ist eine lamellare.

Man kann die Bedingung für die lamellare Magnetisirung durch Gleichungen ausdrücken, in denen die Funktion Φ gar nicht auftritt.

Denn man hat

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \text{ etc.};$$

was die drei Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

333. — Ein magnetisches Blatt heisst *complex*, wenn die magnetische Stärke, während die Magnetisirung immer in jedem Punkte normal ist, nicht mehr in der ganzen Ausdehnung des Blattes constant ist.

Das Potential des Elementes dS des Blattes auf den Punkt P ist noch

$$dV = \Phi d\omega = \frac{\Phi \cos\theta}{r^2} dS,$$

und das Potential des ganzen Blattes

$$V = \int \Phi d\omega = \int \frac{\Phi \cos \theta}{r^2} dS,$$

wo das Integral sich über die ganze Oberfläche des Blattes erstreckt.

Kann ein Magnet in complexe magnetische Blätter zerteilt werden, dann steht die Intensität der Magnetisirung nicht mehr im umgekehrten Verhältnisse des Abstandes zweier unendlich naher Blätter, aber die Magnetisirungslinien sind noch senkrecht zu den Oberflächen der Blätter, woraus sich die Bedingung ergiebt

$$(13) \qquad \frac{A}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{B}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{C}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}.$$

In diesem Falle ist der Ausdruck $Adx + Bdy + Cdz$ nicht mehr ein vollständiges Differential. Man kann auch hier die Funktion Φ aus diesen Gleichungen eliminiren, und man erhält

$$(14) \qquad A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0.$$

Dieser Bedingung muss für eine lamellare Magnetisirung genügt werden.

Ist umgekehrt der Gleichung (14) genügt, so besteht der Magnet aus complexen magnetischen Blättern, da die Magnetisirungslinien zu einem System von Flächen senkrecht sind, ausser wenn alle Glieder in den Klammern einzeln Null sind, in welchem Falle die Magnetisirung eine einfach lamellare ist nach den Gleichungen (12).

334. Potential eines solenoidalen Magnets. — Das Potential eines Magnets hat allgemein den Wert

$$V = \int \frac{\sigma}{r} dS + \int \frac{\rho}{r} dv.$$

Ist der Magnet solenoidal, so ist die Dichte ρ überall Null, und das Potential reducirt sich auf

$$V = \int \frac{\sigma}{r} dS = \int \frac{I \cos \theta}{r} dS.$$

Das Potential eines solenoidalen Magnets auf irgend einen inneren oder äusseren Punkt hängt demnach nur ab von der Oberflächendichte oder von der normalen Componente der Intensität der Magnetisirung in jedem Punkte der Oberfläche. Dieses Potential ist von der Art, in der die innere Magnetisirung variirt, oder in andern Worten von der Form der solenoidalen Fäden, und zwar sowohl der an der Oberfläche endigenden als der geschlossenen, unabhängig.

Für die Erde zum Beispiel kann man sich vorstellen, dass der Magnetismus durch solenoidale Fäden hervorgerufen ist, die an der Oberfläche so endigen, dass sie eine Verteilung liefern, die der einer gleichförmigen Magnetisirung gleichkommt (**320**).

335. Potential eines lamellaren Magneten. — Ist der Magnet lamellenförmig, so ist er aus geschlossenen magnetischen Blättern und solchen offenen Blättern zusammengesetzt, die ihre Conturen in der Oberfläche haben. Die äussere Kraft hängt nur von der Form und der Lage der Conturen der offenen Blätter ab, d. h. von den unendlich dünnen Ringen, die auf der Oberfläche von zwei benachbarten Blättern ausgeschnitten werden, und in keiner Weise von der Form der Blätter.

Für einen inneren Punkt erhält man die Kraft oder die magnetische Induction in einem zwischen zwei Blättern liegenden Schlitz, indem man die durch diese auf einander folgenden Ringe bestimmte Wirkung mit einer Kraft

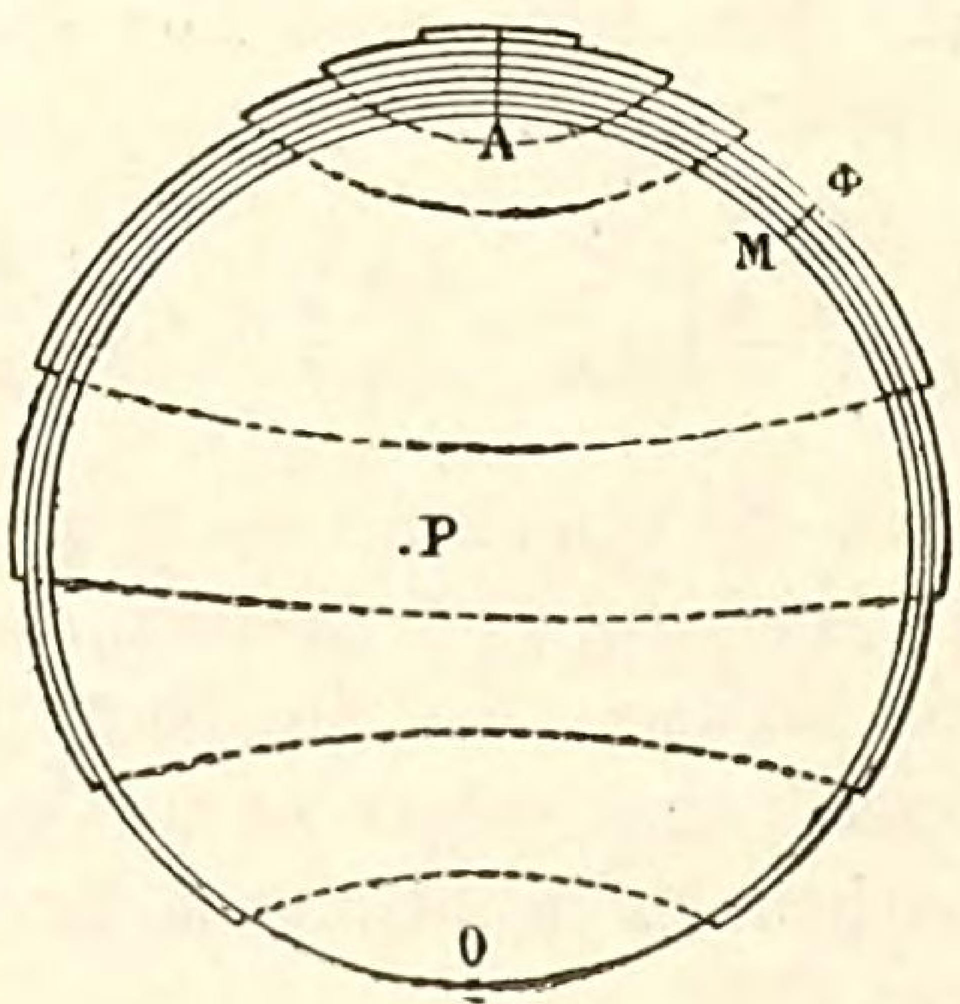


Fig. 79.

zusammensetzt, die der Richtung der Magnetisirung in dem betrachteten Punkte entgegengesetzt und gleich $4\pi I$ ist.

Die Potentiale, mittels deren diese Kräfte ausgedrückt werden, können durch folgende Betrachtungen direkt erhalten werden.

Wir sehen zunächst von den geschlossenen Blättern ab und nehmen an, dass man erst alle offenen Blätter, die der Magnet enthält, entfernt und dann durch Blätter mit beziehentlich derselben Stärke und denselben Conturen ersetzt, die aber ganz auf der Oberfläche selbst liegen; diese Operation könnte man wirklich vornehmen, wenn jedes Blatt aus einer elastischen Membran bestünde, die in ihrem Umfange befestigt ist, indem man dieselbe dann so dehnte, dass sie sich an die Oberfläche des Magnets anschmiegt, ohne dabei die magnetische Stärke zu ändern. Wir nehmen beispielsweise an, dass in Figur 79 alle diese Blätter ihre positiven Seiten nach oben gerichtet haben, und dass man sie unter Beibehaltung der Conturen so verschiebt, dass sie den Punkt A der Oberfläche des Magnets bedecken, in welchem die Funktion Φ ihren grössten Wert hat.

Die Gesammtoberfläche wird so von einer Reihe von Blättern eingenommen, deren Uebereinanderlagerung ein complexes Blatt bildet und in jedem äusseren Punkte dasselbe Potential hervorruft, wie der ursprüngliche Magnet.

Wir fassen jetzt einen Punkt P ins Auge, der im Innern liegt. Für alle Blätter, die ursprünglich zwischen den Punkten A und P gelegen haben, hat sich durch die Verschiebung nichts geändert; aber für jedes der andern Blätter, die durch den Punkt P hindurchgeführt sind, ist das Potential um $4\pi d\Phi$ kleiner geworden. Ist demnach $-\Phi_p$ das Potential der Magnetisirung in P und $-\Phi_0$ der Wert dieses Potentials in dem Punkte O der Oberfläche, in dem Φ ein Minimum ist, so ist das Potential in P bei der Verschiebung der Blätter um das Produkt von 4π in die Summe $\int d\Phi$ der magnetischen Stärken aller zwischen den Punkten P und O gelegenen Blätter kleiner geworden, also um $4\pi(\Phi_p - \Phi_0)$, und man muss zu dem neuen Potential des Punktes P diese Grösse hinzufügen, um ihm den Wert zu geben, den es ursprünglich gehabt hat.

In einem beliebigen Punkte M der so entstandenen resultirenden Schale ist aber die magnetische Stärke gleich der Summe $\int d\Phi$ der Stärken der Blätter, die man übereinander gelegt hat; dieselbe ist demnach gleich $\Phi - \Phi_0$, wenn man $-\Phi$ den Wert des ursprünglichen Potentials der Magnetisirung in diesem Punkte nennt. Folglich ist das neue Potential aller Schichten auf den Punkt P gleich $\int(\Phi - \Phi_0)\,d\omega$, und da, falls P nicht ausserdem von geschlossenen Blättern umfasst ist, das Potential in diesem Punkte bei der Verschiebung um $4\pi(\Phi_p - \Phi_0)$ kleiner geworden ist, so ist der ursprüngliche Wert dieses Potentials gewesen

$$V_i = \int(\Phi - \Phi_0)\,d\omega + 4\pi(\Phi_p - \Phi_0). \tag{15}$$

Nehmen wir nunmehr an, dass auch geschlossene Blätter vorhanden sind, so braucht man nur die zu berücksichtigen, welche den Punkt P einschliessen. Φ_1 sei die Stärke für das grösste unter diesen. Die Summe der magnetischen Stärken der offenen Blätter vom Punkte O bis zum Punkte P ist $\Phi_1 - \Phi_0$, die der geschlossenen den Punkt P umfassenden Blätter, die man bei der oben beschriebenen Verschiebung nicht in ihrer Lage verändert hat, ist gleich $\Phi_p - \Phi_1$.

Das Potential im Punkte P ist demnach

$$V_i = \int (\Phi - \Phi_0)\,d\omega + 4\pi\,(\Phi_1 - \Phi_0) + 4\pi\,(\Phi_p - \Phi_1)$$

oder

$$V_i = \int (\Phi - \Phi_0)\,d\omega + 4\pi\,(\Phi_p - \Phi_0).$$

Man sieht, dass die geschlossenen Blätter den Ausdruck für das innere Potential nicht ändern.

Das äussere Potential hat sich durch die Ueberführung der Blätter auf die Oberfläche nicht geändert; dasselbe hat den Wert

(16) $$V_a = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega.$$

Die Formeln (15) und (16) können vereinfacht werden, wenn man berücksichtigt, dass das Integral $\int d\omega$ für die äusseren Punkte der Null und für die inneren Punkte -4π gleich ist.

Es ergiebt sich dann

(15)′ $$V_i = \int \Phi d\omega + 4\pi\Phi_p,$$

(16)′ $$V_a = \int \Phi d\omega.$$

Bezeichnet man mit Ω eine Funktion, die durch die Beziehung definirt wird

(17) $$\int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega = \Omega,$$

so kann man das Potential auf die Form bringen

(15)″ $$V_i = \Omega + 4\pi (\Phi - \Phi_0).$$

(16)″ $$V_a = \Omega.$$

336. — Es ist leicht zu zeigen, dass das Potential trotz der Verschiedenheit der Form der Ausdrücke für V_a und für V_i sich in stetiger Weise ändert, wenn man durch die Oberfläche des Magnets hindurchgeht. Denn fassen wir zwei unendlich nahe Punkte M_a und M_i ins Auge, den einen ausserhalb, den andern innerhalb der Fläche S, so fällt die Funktion Ω, wenn man von M_a nach M_i geht, um

$$4\pi \int d\Phi = 4\pi (\Phi - \Phi_0).$$

Man erhält demnach zu beiden Seiten der Fläche

(18) $$\Omega_a = \Omega_i + 4\pi (\Phi - \Phi_0).$$

Die magnetischen Potentiale in M_a und M_i sind

$$V_a = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega = \Omega_a,$$

$$V_i = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega + 4\pi (\Phi - \Phi_0),$$

$$= \Omega_i + 4\pi (\Phi - \Phi_0) = \Omega_a;$$

die beiden Werte sind demnach gleich.

337. Potential der Induction. — Die Funktion Ω hat für die Induction F_1 dieselbe Bedeutung wie die Funktion V für die magnetische Resultante F. Denn die Componenten der Induction F_1 haben die Werte (**326**)

$$X_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} + 4\pi A,$$
$$Y_1 = -\frac{\partial V}{\partial y} + 4\pi B,$$
$$Z_1 = -\frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi C.$$

Andererseits wissen wir, dass man erhält (**332**)

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

und da ausserdem

$$V = \Omega + 4\pi(\Phi - \Phi_0)$$

ist, ergiebt sich

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - 4\pi\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - 4\pi A,$$
$$-\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} - 4\pi\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} - 4\pi B,$$
$$-\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} - 4\pi\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} - 4\pi C,$$

und folglich

$$X_1 = -\frac{\partial \Omega}{\partial x},$$
(19) $$Y_1 = -\frac{\partial \Omega}{\partial y},$$
$$Z_1 = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Die Componenten der Induction F_1 sind demnach den partiellen Ableitungen der Funktion Ω entgegengesetzt gleich.

Andererseits sind die Funktionen V und Ω für alle ausserhalb des magnetisirten Mittels liegenden Punkte, also für die Punkte, für welche die Induction und die magnetische Kraft selbst identisch sind, ebenfalls identisch. Folglich kann die Funktion

$$\Omega = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega$$

als das *Potential der magnetischen Induction* eines Lamellenmagnets aufgefasst werden.

338. Potentielle Energie der Magnete. — Die Energie eines permanenten Magnets in einem von einem unveränderlichen System hervorgerufenen Felde wird allgemein ausgedrückt durch

$$W = \Sigma m V,$$

wenn m die in einem Punkte, in dem das Potential des Feldes V ist, gelegene magnetische Masse bedeutet, oder auch als Funktion der Flächendichte und der kubischen Dichte des Magnetismus durch

$$W = \int V \sigma dS + \int V \rho dv.$$

Diese Energie ist die Arbeit, die man aufwenden müsste, um den betrachteten Magnet aus dem Unendlichen in die Lage, die er wirklich hat, überzuführen, oder umgekehrt die Arbeit, die derselbe leisten könnte, wenn er sich ins Unendliche entfernte.

Um die Energie als Funktion der Intensität der Magnetisirung auszudrücken, würde es ausreichen, die Dichten durch ihre bekannten Werte zu ersetzen; aber es ist einfacher die Aufgabe direkt zu behandeln. Ein Volumenelement dv, dessen magnetisches Moment Idv ist, ist mit einem kleinen Magnete von der Masse m, der Länge ds, welcher der Magnetisirungsrichtung parallel ist, gleichwertig. Nennt man V und V' das Potential des Feldes in den Punkten, in denen sich die Massen $-m$ und $+m$ befinden, so ist die Energie des Feldes in Bezug auf dieses Volumenelement

$$dW = m(V' - V) = mds \frac{V' - V}{ds} = Idv \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Bezeichnet man mit δ den Winkel, den die Richtung der Magnetisirung mit der des Feldes bildet, und mit dn den normalen Abstand der beiden Niveauflächen V und V' an der betrachteten Stelle, so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos \delta = -F \cos \delta = -(X\lambda + Y\mu + Z\nu),$$

wenn X, Y, Z die Componenten der Kraft des Feldes, λ, μ und ν die Cosinus der Winkel der Magnetisirungsachse gegen die Achsen sind. Die Energie auf das Element wird demnach ausgedrückt durch

$$dW = -(XI\lambda + YI\mu + ZI\nu)\, dv = -(AX + BY + CZ) dv,$$

und folglich ist die Energie des Feldes auf den ganzen Magnet

$$W = -\int (AX + BY + CZ)\, dv. \tag{20}$$

Ist das Feld gleichförmig, dann sind die Componenten X, Y, Z constant, und indem man α, β und γ die Cosinus der Winkel der Kraft F gegen die Achsen nennt, ergiebt sich

$$W = -F \left[\alpha \int A dv + \beta \int B dv + \gamma \int C dv \right].$$

Bezeichnet man mit K das magnetische Moment des Magnets, mit l, m und n die Cosinus der Winkel, welche die magnetische Achse mit den Coordinatenachsen bilden, so erhält man

$$\int A dv = Kl, \quad \int B dv = Km, \quad \int C dv = Kn,$$

und die Energie wird

$$(21) \qquad W = -FK(\alpha l + \beta m + \gamma n) = -FK \cos \delta,$$

wenn δ der Winkel der magnetischen Achse des fraglichen Magnets gegen die Richtung des Feldes ist. Dieses Resultat konnte auch direkt niedergeschrieben werden.

Die Energie ist ein Minimum und gleich $-FK$, das Gleichgewicht ist folglich ein stabiles, wenn der Winkel δ Null ist, also wenn die magnetische Achse der Richtung des Feldes parallel ist. Labiles Gleichgewicht tritt ein, wenn diese beiden Richtungen einander entgegengesetzt sind; die Energie ist dann ein Maximum und gleich FK. Endlich ist die Energie Null, wenn die beiden Richtungen gegen einander senkrecht sind.

339. Energie eines magnetischen Blattes. — Bildet der Magnet ein einfaches magnetisches Blatt S, so ist das magnetische Moment eines Flächenelementes des Blattes Φds, und die potentielle Energie desselben in dem Felde hat den Wert

$$dW = -\Phi(\lambda X + \mu Y + \nu Z) dS;$$

die Energie des ganzen Blattes ist demnach

$$W = -\Phi \int (\lambda X + \mu Y + \nu Z)\, dS.$$

Die Klammer $(\lambda X + \mu Y + \nu Z)$ giebt die Projection F_n der Kraft des Feldes auf die Normale des Blattes an. Das Produkt $F_n dS$ ist die Kraftströmung des Feldes, die dem Elemente dS entspricht; diese Strömung wird positiv gerechnet, wenn sie durch das Blatt von der negativen nach der positiven Seite geht, und negativ bei der entgegengesetzten Richtung. Man sieht demnach, dass das Integral auf der rechten Seite einfach den Wert der von den Conturen begrenzten Strömung angiebt, und dass dasselbe von der Form der von denselben eingeschlossenen Fläche unabhängig ist. Ist Q der Wert dieser Strömung, so wird die potentielle Energie des Blattes ausgedrückt durch

$$(22) \qquad W = -\Phi Q.$$

Die potentielle Energie eines Blattes ist gleich dem mit entgegengesetztem Zeichen versehenen Produkte aus der Stärke des Blattes in die Kraftströmung, die von der negativen Seite desselben eintritt.

340. — Dieses Resultat kann direkt erhalten werden, indem man umgekehrt das Potential einer Schale auf einen Magnetpol bestimmt. Zunächst ist die Energie einer Masse m in dem Felde eines einfachen magnetischen Blattes

$$dW = mV = m\Phi\omega = \Phi m\omega.$$

Nun ist das Produkt $m\omega$ die Kraftströmung, die von dem Punkte unter dem Winkel ω ausgeht, und die folglich durch das Blatt hindurchgeht, indem sie von der positiven Fläche eintritt. Die Strömung dQ, die durch die negative Fläche eintritt, hat denselben Wert mit entgegengesetztem Zeichen, also $-m\omega$. Man erhält demnach

$$dW = -\Phi dQ.$$

Die Energie eines magnetischen Systems in dem Felde des Blattes ist aber die Summe der Energieen der verschiedenen Massen; also ist dieselbe das mit dem entgegengesetzten Zeichen genommene Produkt aus der magnetischen Stärke Φ des Blattes in die Summe der Kraftströmungen, die durch dasselbe hindurchgehen, also in die Kraftströmung, die von dem Systeme ausgeht und in das Blatt von der negativen Seite eintritt.

341. — Ist dieses System ein zweites Blatt S', so ist die Kraftströmung Q der magnetischen Stärke Φ' des zweiten Blattes proportional, und man kann setzen $Q = M\Phi'$, wo der Coefficient M die Kraftströmung ist, welche das erste Blatt erhalten würde, wenn die Stärke des zweiten der Einheit gleich wäre. Die Energie des ersten Blattes in dem Felde des zweiten ist demnach

$$W = -\Phi\Phi' M. \tag{23}$$

Die Energie des zweiten Blattes in dem Felde des ersten hat denselben Wert, würde aber in derselben Weise durch

$$W = -\Phi'\Phi M',$$

als Funktion der von dem ersten Blatte ausgehenden Kraftströmung, die durch das zweite hindurchgeht, ausgedrückt werden; man schliesst hieraus

$$M = M'. \tag{24}$$

Sind zwei magnetische Blätter von der Einheit gleichen Stärken vorhanden, so ist die Kraftströmung, die von dem einen ausgeht, um durch das andere von der negativen Seite aus hindurch zu gehen, für beide dieselbe.

Man erkennt die Analogie dieser Eigenschaft mit der oben (**63**) bei der elektrostatischen Induction zwischen zwei Leitern gefundenen Thatsache.

342. — Die Gleichung (22) zeigt, dass die Energie eines Blattes in einem magnetischen Felde nur von der von den Conturen desselben begrenzten Kraftströmung, die durch die Fläche hindurchgeht, abhängt und von der Form dieser Fläche unabhängig ist. Diese Energie und folglich

die Kraft, die auf das Blatt wirkt, können demnach als Funktion der Begrenzungscurve dargestellt werden.

Ebenso hängt die gegenseitige Energie zweier Blätter, die durch Gleichung (23) gegeben ist, nur von den beiden Grenzlinien ab; diese Energie und die gegenseitige Kraft müssen demnach auch als Funktion der beiden Curven ausgedrückt werden können, welche die Blätter begrenzen.

343. Wirkung eines Feldes auf ein Blatt. — Wir fassen ein Blatt S (Fig. 80) ins Auge, welches in einem beliebigen magnetischen Felde liegt. Erleidet dieses Blatt eine unendlich kleine Verschiebung, so ist der Zuwachs der potentiellen Energie

$$dW = -\Phi dQ,$$

wo dQ der Zuwachs der Kraftströmung ist, die von der negativen Seite aus

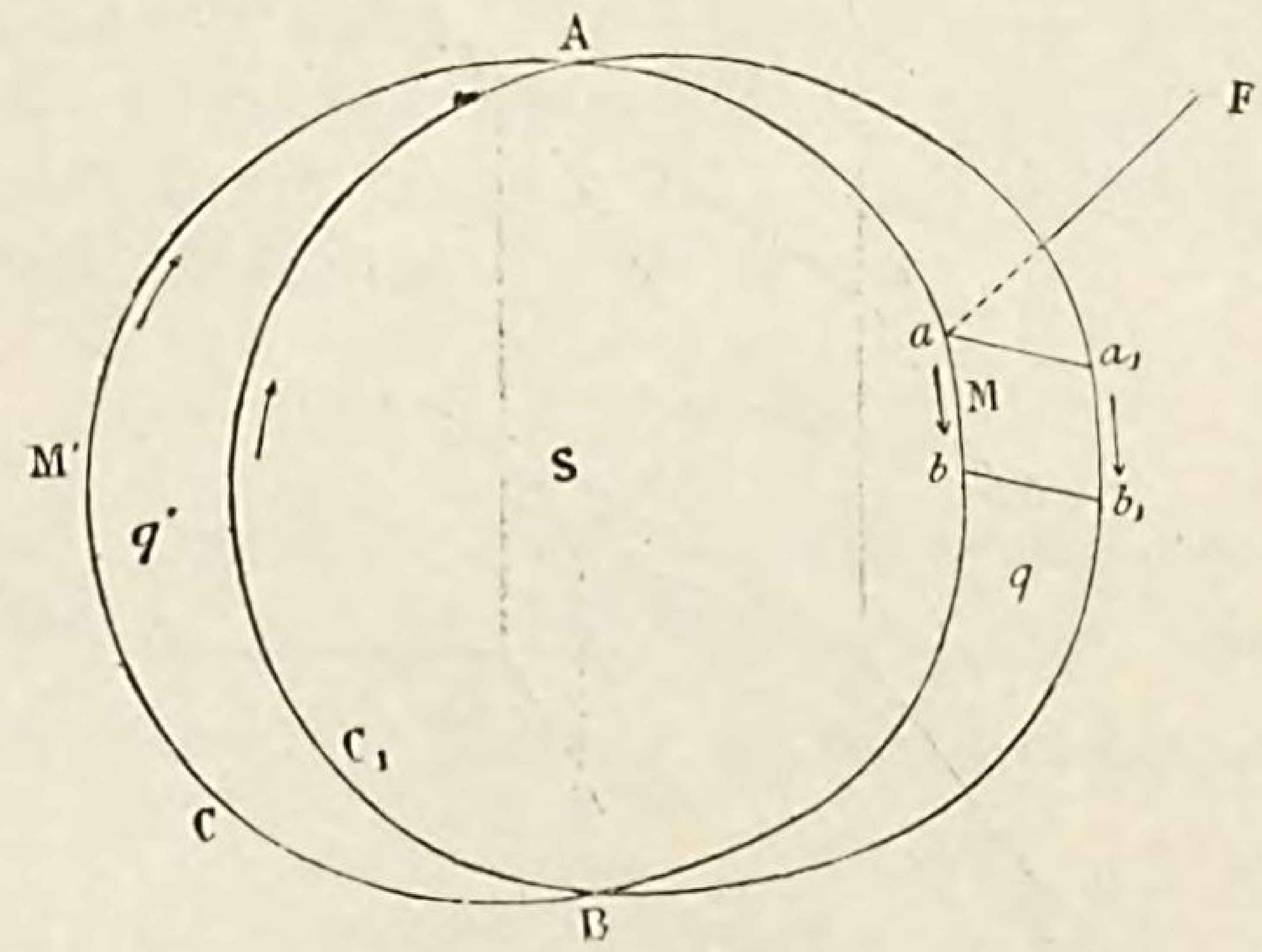


Fig. 80.

durch das Blatt hindurchgeht. Da die Arbeit dT der magnetischen Kräfte dW entgegengesetzt gleich ist, erhält man

$$dT = \Phi dQ.$$

Die Form des Blattes ist gleichgiltig, wir können also annehmen, dass dasselbe Teil einer continuirlichen Fläche S ist, die durch die Lagen C und C_1 hindurchgeht, welche die Grenzlinie der Reihe nach einnimmt, und dass diese nur auf der besagten Fläche gleitet.

Die Arbeit der magnetischen Kräfte während der Verschiebung von S ist proportional dem Ueberschuss der Kraftströmung, die durch die von der Grenzlinie C_1 begrenzte Fläche hindurchgeht, über die, welche die von der Grenzlinie C begrenzte Fläche durchfliesst. Die auf den beiden Blättern gemeinschaftlichen Teil bezügliche Kraftströmung verschwindet bei der Subtraction, so dass, wenn man q und q' die Strömungen nennt, die durch die Streifen AMB und $AM'B$ hindurchgehen, sich ergiebt

$$dT = \Phi (q - q').$$

Ist ab ein Element der Grenzlinie in ihrer ersten Lage, $a_1 b_1$ dasselbe Element nach der Verschiebung, F die Kraft des Feldes in der Mitte zwischen ab und $a_1 b_1$, so bildet man, um den Teil dq der auf die Verschiebung bezüglichen Strömung zu erhalten, das Produkt der Kraft F in die Projection des Parallelogramms $abb_1 a_1$, welches das Element beschrieben hat, auf eine zu dieser Kraft senkrechte Ebene.

Um deutlicher die geometrische Bedeutung dieses Produktes zu erkennen, denken wir uns einen Beobachter längs der Curve C so liegend, dass er, wenn er das Blatt ansieht, die negative Seite zu seiner Rechten hat. Als positiv rechnen wir einen Bogen, wenn er die Richtung eines bewegten Gegenstandes einschlägt, welcher von den Füssen des Beobachters nach seinem Kopfe hin geht. Wählen wir als yzEbene die Ebene Fds und die Richtung der Kraft F als yAchse (Fig. 81), bezeichnen wir mit α den

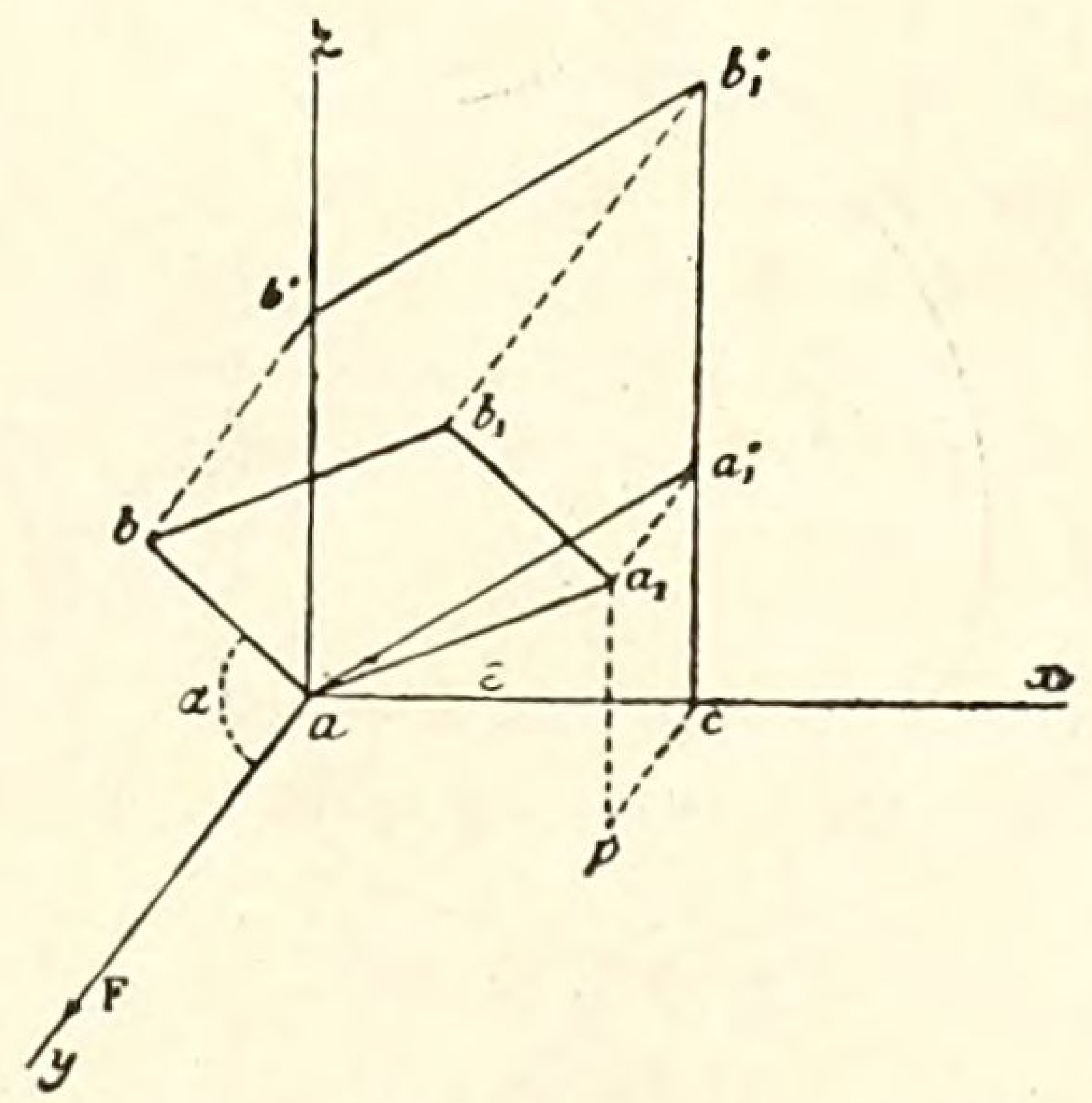


Fig. 81.

Winkel des in positiver Richtung gemessenen Elementes ds gegen die Kraft F, so ist die Projection des Parallelogramms $abb_1 a_1$ auf die zur Kraft F normale xzEbene ein neues Parallelogramm $ab' b_1' a_1'$. Man kann als Grundlinie dieses letzteren $ab' = ds \sin\alpha$ und als Höhe ac auffassen, also die Abscisse des Punktes a_1 oder die Projection ε der Verschiebung aa_1 auf der zur Ebene Fds normalen Achse ax. Man erhält demnach

$$(25) \qquad dq = Fds\,\varepsilon \sin\alpha.$$

Die entsprechende Arbeit ist

$$\Phi dq = \Phi Fds\,\varepsilon \sin\alpha.$$

Aber ganz dieselbe Arbeit würde geleistet werden, wenn das Element ds der Wirkung einer Kraft

$$d\varphi = \Phi Fds \sin\alpha$$

ausgesetzt wäre, die parallel zur xAchse, also normal zur Ebene Fds ist und damit gelangt man zu dem wichtigen Satze:

Die Wirkung eines magnetischen Feldes auf ein Blatt ist mit der eines Systems von Kräften gleichwertig, die an den verschiedenen Elementen der Grenzlinie angreifen.

Die Kraft, die man sich in jedem Elemente angebracht denken muss, ist zu der Ebene normal, die durch das Element und die Richtung des Feldes geht, und ist nach links von einem Beobachter aus gerichtet, der in dem Elemente in dessen positiver Richtung liegt und nach der Richtung der Kraft hinschaut.

344. — Betrachtet man diese Wirkungen als thatsächlich vorhanden, so kann man folgenden Satz aussprechen:

Die Wirkung eines magnetischen Feldes auf ein Element der Grenzlinie eines Blattes ist gleich dem Produkt der magnetischen Stärke des Blattes in die Kraft des Feldes, die Länge des Elementes und den Sinus des eingeschlossenen Winkels, in andern Worten, in die Fläche $dA = Fds \sin\alpha$ *des aus der Kraft* F *und dem Element* ds *construirten Parallelogramms.*

Man erhält demnach einfach

$$d\varphi = \Phi dA, \quad dq = \Phi\varepsilon dA.$$

Beschränkt sich insbesondere das das Blatt angreifende magnetische System auf eine einzige Masse m im Abstande r vom Elemente ds, so ist die Kraft F gleich $\frac{m}{r^2}$ und ihre Wirkung auf das Element ds wird

$$d\varphi = \Phi \frac{m}{r^2} ds \sin\alpha.$$

Die Wirkung eines magnetischen Poles auf ein Element der Grenzlinie eines Blattes steht im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats des Abstandes und ist proportional dem Sinus des Winkels, den das Element mit der Geraden bildet, die den Pol mit dem Elemente verbindet.

345. — Wir bemerken noch, dass dq die von dem Elemente ds bei der Verschiebung aa_1 durchschnittene Kraftströmung darstellt, wobei diese durchschnittene Kraftströmung positiv oder negativ gerechnet wird, je nachdem die Verschiebung nach links oder nach rechts von dem Beobachter aus erfolgt, dessen Stellung oben definirt ist. Es folgt hieraus der Satz:

Die Arbeit der magnetischen Kräfte während der Verschiebung eines Blattes ist gleich dem Produkte der Stärke des Blattes in die Summe der von den einzelnen Elementen der Grenzlinie durchschnittenen Kraftströmungen.

346. — Wir nehmen jetzt an, dass das äussere System sich auf eine der Einheit gleiche magnetische Masse reducirt, die sich im Ursprung O der Coordinaten befindet. C sei die Grenzlinie des Blattes und ds ein in dem Abstande r in einem Punkte M, dessen Coordinaten x, y und z sind, gelegenes Element desselben.

Wir nennen λ, μ und ν die Cosinus der Winkel, welche die Kraft $d\varphi$ mit den Achsen bildet. Da diese Kraft gegen das Element ds und gegen die Gerade OM, längs der die vom Punkte O ausgehende Kraft $\frac{1}{r^2}$ gerichtet ist, senkrecht ist, erhält man die Beziehungen

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$
$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0,$$

woraus man findet

$$\frac{\lambda}{ydz - zdy} = \frac{\mu}{zdx - xdz} = \frac{\nu}{xdy - ydx} = \frac{1}{rds\sin\alpha},$$

wo α den Winkel bezeichnet, den die Gerade OM mit dem Elemente ds bildet.

Die Kraft $d\varphi$ ist nun gleich $\frac{\Phi}{r^2}ds\sin\alpha$; bezeichnen wir also ihre Componenten mit $d\xi$, $d\eta$ und $d\zeta$, so haben wir

$$d\xi = \lambda d\varphi = \frac{\Phi}{r^3}(ydz - zdy),$$

$$d\eta = \mu d\varphi = \frac{\Phi}{r^3}(zdx - xdz),$$

$$d\zeta = \nu d\varphi = \frac{\Phi}{r^3}(xdy - ydx).$$

Die Wirkung des Punktes O auf das Blatt ergiebt sich, wenn man diese Ausdrücke auf die ganze Grenzlinie ausdehnt. Die Wirkung F des Blattes endlich auf den Punkt O geht durch diesen Punkt, und die Componenten X, Y, Z dieser Kraft sind denen der Einwirkung des Punktes auf das Blatt entgegengesetzt gleich; man erhält demnach

$$(26)\qquad \begin{aligned} X &= \Phi\int\frac{zdy - ydz}{r^3} = \Phi\int\frac{z^2}{r^3}d\left(\frac{y}{z}\right),\\ Y &= \Phi\int\frac{xdz - zdx}{r^3} = \Phi\int\frac{x^2}{r^3}d\left(\frac{z}{x}\right),\\ Z &= \Phi\int\frac{ydx - xdy}{r^3} = \Phi\int\frac{y^2}{r^3}d\left(\frac{x}{y}\right).\end{aligned}$$

347. Wirkung zweier Blätter auf einander. — Wir können jetzt die Wirkung zweier Blätter S und S' auf einander bestimmen. Die Einwirkung von S auf S' kann als die Resultante der Wirkungen aufgefasst werden, die durch den letzten Satz bestimmt sind, und die das Blatt S auf jedes Element ds' der Grenzlinie C' des zweiten Blattes ausübt.

Wir nehmen an, dass eines dieser Elemente ds' in O (Fig. 82) liegt und längs der x Achse gerichtet ist. Die Wirkung $d\varphi'$, die auf dieses Element ausgeübt wird, ist gleich $\Phi' F ds' \sin\alpha'$ und liegt in der yz Ebene. Die

Componenten dieser Kraft sind also, wenn mit β der Winkel bezeichnet wird, den sie mit der zAchse bildet,

$$d\xi' = 0,$$
$$d\eta' = \Phi' F ds' \sin\alpha' . \cos\beta = \Phi' Z ds',$$
$$d\zeta' = -\Phi' F ds' \sin\alpha' . \sin\beta = -\Phi' Y ds.$$

Drückt man die Kräfte Z und Y als Funktionen der Coordinaten x, y und z des Punktes M aus, in dem sich das Element ds vorfindet, so ergiebt sich

$$d\xi' = 0,$$

(27)
$$d\eta' = \Phi\Phi' ds' \int \frac{y dx - x dy}{r^3},$$
$$d\zeta' = \Phi\Phi' ds' \int \frac{z dx - x dz}{r^3}.$$

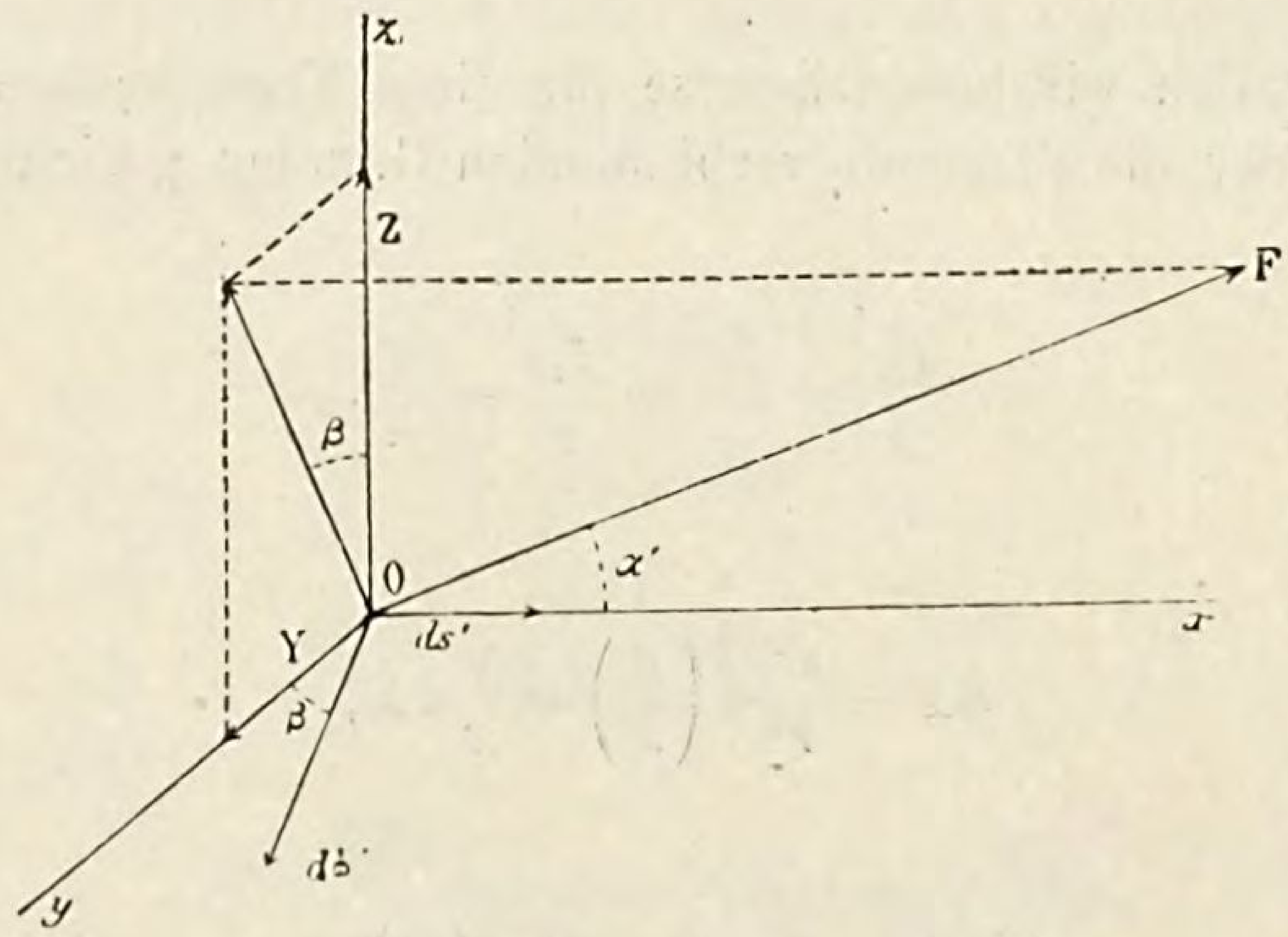


Fig. 82.

Man kann die Wirkungen der Grenzlinie C auf das Element ds' auch als die Resultante der direkten Wirkungen betrachten, welche alle Elemente ds auf das Element ds' ausüben. Die einzige Bedingung, der diese Einzelwirkung zu genügen hat, ist die, dass das Integral der einzelnen Componenten, wenn es über die Grenzlinie C genommen wird, wieder die letzten Ausdrücke liefert.

348. — Hiernach ist die einfachste Lösung für die Wirkung von ds auf ds' eine Kraft f, deren den Achsen parallele Componenten f_x, f_y, f_z, wenn man mit a das Produkt $\Phi\Phi' ds$, bezeichnet, sind

$$f_x = 0,$$
$$f_y = -a \frac{x dy - y dx}{r^3} = -a \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$f_z = -a \frac{x dz - z dx}{r^3} = -a \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right),$$

349. — Man kann zu jeder Componente der Elementarwirkung ein vollständiges Differential einer Funktion der Coordinaten x, y, z addiren, da die über die Grenzlinie C ausgedehnten Integrale für alle diese Glieder den Wert Null geben. Man erhält demnach eine unbegrenzte Menge von Ausdrücken, mittels deren man die Wirkung der Elemente zweier magnetischer Blätter auf einander wiedergeben kann.

Sind X, Y und Z Funktionen der Coordinaten x, y, z, so genügt man den Bedingungen der Aufgabe, wenn man als Componenten der Wirkung wählt

$$\begin{aligned} f_x &= a\,dX, \\ f_y &= a\left[dY - \frac{x^2}{r^3}\,d\left(\frac{y}{x}\right)\right], \qquad (29) \\ f_z &= a\left[dZ - \frac{x^2}{r^3}\,d\left(\frac{z}{x}\right)\right]. \end{aligned}$$

350. — Stellen wir beispielsweise für diese Kraft noch die Bedingung, dass sie längs der die Elemente verbindenden Geraden gerichtet ist, so dass man erhält

$$\frac{f_x}{x} = \frac{f_y}{y} = \frac{f_z}{z} = \frac{f}{r},$$

dann folgt

$$dY - \frac{x^2}{r^3}\,d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}\,dX,$$

oder

$$dY = \frac{y}{x}\,dX + \frac{x^2}{r^3}\,d\left(\frac{y}{x}\right),$$

und analog

$$dZ = \frac{z}{x}\,dX + \frac{x^2}{r^3}\,d\left(\frac{z}{x}\right).$$

Sollen die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen vollständige Differentiale einer Funktion der Coordinaten sein, so muss man setzen

$$dX = d\left(\frac{x^2}{r^3}\right),$$

und folglich wird

$$dY = d\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{x^2}{r^3}\right) = d\left(\frac{xy}{r^3}\right),$$

$$dZ = d\left(\frac{z}{x}\cdot\frac{x^2}{r^3}\right) = d\left(\frac{xz}{r^3}\right),$$

und die Componenten der Elementarkraft sind

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
f_x &= a d\left(\frac{x^2}{r^3}\right),\\
f_y &= a\left[d\left(\frac{xy}{r^3}\right) - \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right)\right],\\
f_z &= a\left[d\left(\frac{xz}{r^3}\right) - \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Die Kraft selbst kann durch die Beziehung bestimmt werden

$$
f = \frac{r}{x} f_x,
$$

welche ergiebt

$$
f = a\frac{r}{x} d\left(\frac{x^2}{r^3}\right) = \frac{2a}{r^2}\left[dx - \frac{3}{2}\frac{x}{r} dr\right] = \frac{2a}{r^2}\left[\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{3}{2}\frac{x}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\right] ds.
$$

Nennt man θ und θ' die Winkel, welche bez. die Elemente ds und ds' mit der sie verbindenden Geraden OM bilden, und ε den Winkel zwischen diesen beiden Elementen, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial s} &= \cos\varepsilon,\\
\frac{x}{r} &= \cos\theta',\\
\frac{\partial r}{\partial s} &= \cos\theta,
\end{aligned}
$$

und es ergiebt sich

$$
f = \frac{2a}{r^2}\left[\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right] ds.
$$

Betrachtet man umgekehrt die Wirkung von ds auf ds' und nimmt den Abstand r in der Richtung MO als positiv, so muss man das Zeichen der Kraft ändern, und die Winkel θ und θ' durch $\pi - \theta$ und $\pi - \theta'$ ersetzen, wodurch das Zeichen des Produktes der Cosinus nicht geändert wird.

Da die Wirkung von ds auf ds' eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ist, bezeichnen wir sie mit $d^2\psi$; sehen wir sie noch als eine Abstossung an, so erhält man schliesslich

$$
(31)\qquad d^2\psi = -\frac{2\Phi\Phi' ds ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).
$$

351. — Man kann diesem Ausdruck eine für die Auswertung der Arbeit bequemere Form geben.

C und C' (Fig. 83) seien die Grenzlinien zweier Blätter, ds und ds' die Elemente in P und P'; und die Bogen s und s' mögen beziehungsweise von den festen Punkten O und O' aus gezählt werden.

Man erhält nach der Figur

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s},$$

$$\cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Fällt man von den Endpunkten P' und P'' des Elements ds' Lote $P'A$ und $P''A'$ auf die Tangente der Curve C im Punkte P, so ergiebt sich

$$PA = r\cos\theta$$
$$PA' = r\cos\theta + \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial s'}ds',$$

woraus man erhält

$$AA' = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial s'}ds'.$$

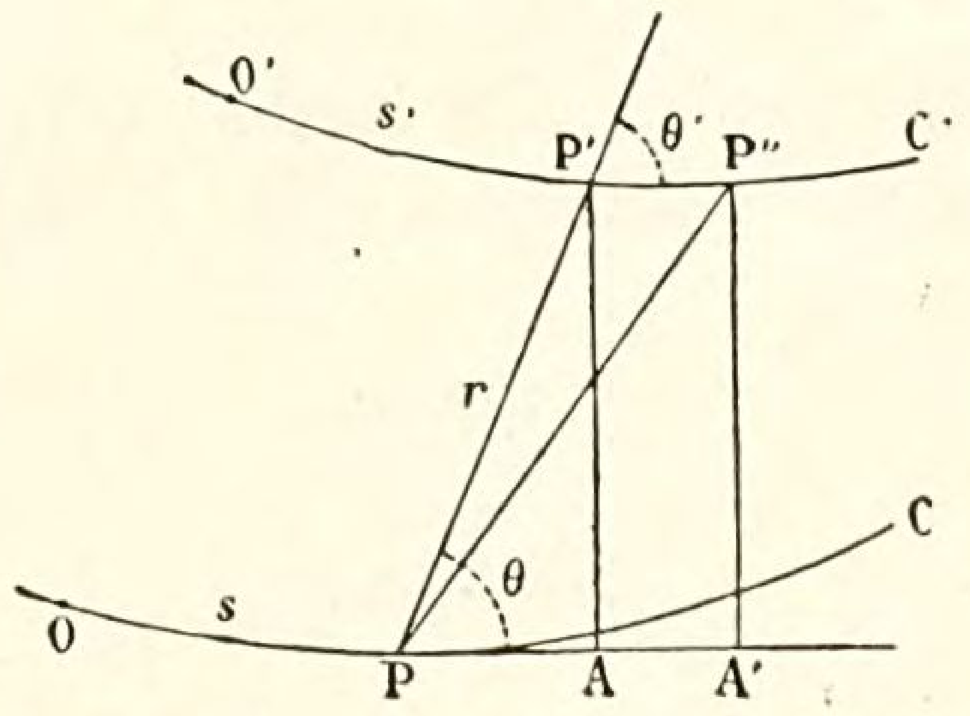


Fig. 83.

Andererseits ist der Abstand AA' die Projection des Elementes ds' auf die Tangente an die Curve s in P, also auch

$$AA' = ds'\cos\varepsilon,$$

und folglich ist

$$\cos\varepsilon = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial s'} = -\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'} = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}.$$

Die Wirkung des Elementes kann demnach auch geschrieben werden

$$d^2\psi = \frac{2\Phi\Phi' ds ds'}{r^2}\left[\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{3}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right]$$
$$= \frac{2\Phi\Phi' ds ds'}{r^2}\left[r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right].$$

Nun ist ferner

$$\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{1}{4r\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{1}{2r\sqrt{r}}\left[r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right],$$

woraus sich schliesslich ergiebt

$$(32) \qquad d^2\psi = \frac{4\Phi\Phi' ds ds'}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial s'}.$$

352. — Um die relative Energie des Systems auszuwerten, nehmen wir an, dass sich das Blatt S' entfernt, und dass in der Zeit dt der Abstand r der beiden Elemente sich um $\frac{\partial r}{\partial t} dt$ oder $2\sqrt{r}\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t} dt$ ändert. Die entsprechende Arbeit der Kraft des Elementes $d^2\psi$ ist gleich $d^2\psi \frac{\partial r}{\partial t} dt$, so dass die gesammte auf das Element ds für die Zeit dt bezügliche Arbeit d^2T ist

$$d^2T = 8\Phi\Phi' dt ds \int \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial s'} ds'.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial s'} ds' = \left[\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s}\right] - \int \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial t} ds'.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist Null für die geschlossene Grenzlinie C', woraus sich ergiebt

$$d^2T = -8\Phi\Phi' dt ds \int \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s' \partial t} ds'.$$

Die auf die Wirkungen der beiden Umfänge bezügliche elementare Arbeit während der Zeit dt ist demnach

$$dT = -8\Phi\Phi' dt \int\int \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s' \partial t} ds' ds.$$

Da diese Arbeit für die Grenzlinien C und C' symmetrisch sein muss, erhält man auch

$$dT = -8\Phi\Phi' dt \int\int \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial t} ds ds'.$$

Es folgt hieraus, wenn man die halbe Summe dieser Ausdrücke bildet,

$$dT = -4\Phi\Phi' dt \int\int \left[\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s' \partial t}\right] ds ds'$$

$$= -4\Phi\Phi' dt \int\int \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'}\right] ds ds'$$

oder

$$dT = -4\Phi\Phi' dt \int\int \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'} ds ds'.$$

Die relative potentielle Energie W der beiden Blätter ist gleich der Arbeit, welche die Kräfte leisten können, wenn das eine der Blätter C' sich ins Unendliche entfernt. Man erhält demnach

$$(33) \qquad W = -4\Phi\Phi'\int\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\,ds\,ds'.$$

353. — Dieser Ausdruck für die Energie kann in verschiedene Formen gebracht werden.

Denn es ist

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'} = \frac{1}{4r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{1}{4r}\cos\theta\cos\theta' = -\frac{r}{4}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}.$$

Man kann demnach setzen

$$W = \Phi\Phi'\int\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds' - \Phi\Phi'\int\int r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\,ds\,ds'$$

$$= \Phi\Phi'\int ds\int r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\,ds'.$$

Integrirt man den letzten Ausdruck partiell, so erhält man

$$\int r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\,ds' = \left[\frac{\partial r}{\partial s}\right] - \int\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}\,ds'.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist, da das Integral sich über die geschlossene Grenzlinie C' erstrecken soll, Null; es bleibt demnach

$$\int r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\,ds' = -\int\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}\,ds' = \int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'$$

und folglich

$$(34) \qquad W = \Phi\Phi'\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'.$$

Diese bemerkenswerthe Formel rührt von F. E. Neumann her. Man findet aus derselben für den Wert des Coefficienten M (**341**), der die den beiden Blättern, die wir als von einer der Einheit gleichen Intensität vorausgesetzt haben, gemeinschaftliche Kraftströmung angiebt,

$$(35) \qquad M = -\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'.$$

3. Capitel.

Specielle Fälle.

354. Potential eines gleichförmigen Magnets. — Da die magnetische Wirkung eines gleichförmig magnetisirten Körpers mit der zweier Gleitschichten (**320**) identisch ist, kann das Potential V leicht aus dem Gravitationspotential einer homogenen Masse abgeleitet werden, die den ganzen Raum ausfüllt. Ist P der Wert dieses Potentials, wenn die Dichte der Masse der Einheit gleich ist, so ist der Wert derselben ρP, wenn die Dichte ρ ist.

Das Potential des Systems der beiden Schichten ist augenscheinlich die Summe des Potentials ρP der positiven Masse und des Potentials $-\rho P'$ einer gleich grossen negativen Masse, die in der der Magnetisirung entgegengesetzten Richtung um eine unendlich kleine Grösse $dx = \delta$ verschoben ist. Da nun das Potential $\rho P'$ auch das der positiven Masse im Punkte M' ist, dessen Coordinaten bis auf die der Magnetisirung parallele Abscisse, die um dx grösser ist, dieselben sind wie die des Punktes M, so erhält man

$$(1) \qquad V = \rho P - \rho\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right) = -\rho\delta\frac{\partial P}{\partial x} = -I\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Folglich ist das Potential eines gleichförmigen Magnets entgegengesetzt gleich dem Produkte der Intensität der Magnetisirung in die in Richtung der Magnetisirung genommene partielle Ableitung des Gravitationspotentials, welches in dem betrachteten Punkte eine das gesammte Volumen des Körpers einnehmende Masse von einer der Einheit gleichen Dichte besässe.

Die Componenten X, Y und Z der magnetischen Kraft sind den partiellen Ableitungen des Potentials entgegengesetzt gleich, woraus sich ergiebt

$$(2) \qquad X = I\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad Y = I\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \quad Z = I\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}.$$

355. Kugel. — Für eine Kugel vom Volumen u zum Beispiel ist der Wert von P in einem äusseren Punkte im Abstande r vom Mittelpunkte

$$P = \frac{u}{r},$$

also

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{u}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{ux}{r^3},$$

und folglich

$$V = Iu\frac{x}{r^3},$$

wie wir schon oben (**157**) gesehen haben.

Im Innern der Kugel wäre die Wirkung einer Masse, deren Dichte der Einheit gleich ist (**44**), gleich $\frac{4}{3}\pi r$, was für das Potential, wenn man den Radius der Kugel a nennt, ergiebt

$$P = \frac{2}{3}\pi(3a^2 - r^2).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi x$$

und daher

$$X = -\frac{4}{3}\pi I;\ Y = 0;\ Z = 0;$$

die innere Wirkung einer gleichmässig magnetisirten Kugel ist demnach constant, und der Magnetisirungsrichtung parallel und entgegengerichtet, ein Resultat, das bereits direkt gefunden ist (**157**).

Die magnetische Induction im Innern der Kugel ist constant und (**324**) gleich

$$-\frac{4}{3}\pi I + 4\pi I = \frac{8}{3}\pi I,$$

so dass die Gesammtströmung, die durch den zur Magnetisirung senkrechten grössten Kreis geht, ausgedrückt wird durch

$$\frac{8}{3}\pi I.\pi a^2 = \frac{2}{3}(2\pi a)^2 I.$$

356. Ellipsoid. — Wir betrachten ein homogenes Ellipsoid, dessen Achsen $2a$, $2b$ und $2c$ als Coordinatenachsen gewählt sind. Bezeichnet man mit L, M, N bekannte Funktionen der Coordinaten, so ist das Potential des Ellipsoides in einem Punkte im Innern, dessen Coordinaten x, y und z sind,

$$P = -\frac{1}{2}(Lx^2 + My^2 + Nz^2) + \text{const.}$$

Ist das Ellipsoid gleichförmig in einer Richtung magnetisirt, die mit den Achsen Winkel bildet, deren Cosinus l, m, n sind, dann sind die Componenten der Magnetisirung bestimmt durch

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = I,$$

und der Zustand des Ellipsoides kann als durch Uebereinanderlagerung dieser drei den Achsen beziehungsweise parallelen Magnetisirungen A, B und C hervorgerufen aufgefasst werden. Das Potential im Innern ist

$$V = -\left(A\frac{\partial P}{\partial x} + B\frac{\partial P}{\partial y} + C\frac{\partial P}{\partial z}\right) = I(Llx + Mmy + Nnz),$$

und die den Achsen parallelen Kraftcomponenten haben die Werte

$$X = -AL, \quad Y = -BM, \quad Z = -CN.$$

Die innere magnetische Kraft eines gleichförmig magnetisirten Ellipsoides ist demnach der Grösse und Richtung nach constant und bildet mit den Achsen Winkel, deren Cosinus beziehungsweise proportional sind AL, BM und CN.

Die den Achsen parallelen Componenten der Induction sind

$$X_1 = (4\pi - L)A,$$
$$Y_1 = (4\pi - M)B,$$
$$Z_1 = (4\pi - N)C.$$

Die Induction ist demnach ebenfalls constant und bildet mit den Achsen Winkel, deren Cosinus beziehungsweise proportional sind den Produkten $(4\pi - L)A$, $(4\pi - M)B$ und $(4\pi - N)C$.

Die Inductionsströmungen endlich, die durch die drei Hauptschnitte gehen, haben beziehungsweise die Werte $\pi bc(4\pi - L)A$, $\pi ca(4\pi - M)B$ und $\pi ab(4\pi - N)C$.

357. — Ist die Magnetisirung einer Achse parallel, der Achse a zum Beispiel, so ist die resultirende Kraft einfach

$$F = -IL.$$

Die Menge M_a des auf jeder Hälfte des Ellipsoides verteilten Magnetismus wäre nach der Bildungsweise der Schicht gleich der Gesammtladung, die auf dem zu den beiden andern Achsen parallelen Hauptschnitt vorhanden wäre, wenn die Dichte gleichförmig und gleich I wäre; es ist demnach

$$M_a = \pi bcI = -\pi bc\frac{F}{L}.$$

Das magnetische Moment ϖ_a des so gebildeten Magnets ist gleich dem Produkt des Volumens in die Intensität, woraus sich ergiebt

$$\varpi_a = \frac{4}{3}\pi abcI = -\frac{4}{3}\pi abc\frac{F}{L}.$$

Die Pole des Magnets oder die Schwerpunkte der beiden Schichten liegen in einer Entfernung a' vom Mittelpunkte, die durch die Gleichung bestimmt ist

$$\varpi_a = 2a'M_a,$$

welche ergiebt

$$a' = \frac{1}{2} \frac{\varpi_a}{M_a} = \frac{2}{3} a .$$

Demnach liegt der Pol eines gleichförmig in einer zu einer Achse parallelen Richtung magnetisirten Ellipsoides in einer Entfernung vom Mittelpunkte, die $\frac{2}{3}$ der entsprechenden Halbachse gleich ist.

Die Dichte in einem Punkte der Oberfläche ist durch die Gleichung gegeben

$$\sigma = I \cos \theta = I \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = I \frac{px}{a^2},$$

wo p das vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y und z sind, gefällte Lot ist.

Die Gesammtladung einer von zwei zur Achse a senkrechten, um dx von einander entfernten Ebenen begrenzten Zone ist gleich dem Produkt aus der Intensität I in die Differenz dS der diesen beiden Ebenen entsprechenden Querschnitte des Ellipsoides. In der Entfernung x ist der Querschnitt begrenzt von der Ellipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

deren Fläche ist

$$S = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);$$

man erhält demnach

$$dS = -\frac{2\pi bc}{a^2} x dx,$$

und folglich ist die Ladung der Zone

$$dM_a = -\frac{2\pi bcI}{a^2} x dx.$$

Das Verhältnis $\frac{dM_a}{dx}$ der Ladung der Zone zur Höhe derselben, welches man die auf die Magnetisirungsachse bezogene lineare Dichte nennen kann, ist demnach dem Abstande dieser Zone vom Mittelpunkte des Ellipsoides proportional.

358. — Sind die Achsen des Ellipsoides ungleich, dann sind die Coefficienten L, M und N durch die partiellen Ableitungen eines bestimmten elliptischen Integrals gegeben; für die vollständige Berechnung verweisen wir auf die Specialabhandlungen und beschränken uns darauf die für Rotationsellipsoide giltigen Resultate anzugeben. In diesem Falle ist nämlich

die Aufgabe einfacher, und die Coefficienten können durch gewöhnliche Funktionen ausgedrückt werden.

Ist das Ellipsoid durch Drehung um die kleine Achse c entstanden, so erhält man, wenn man e die Excentricität einer Meridianellipse nennt,

$$a = b = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2}},$$

$$L = M = 2\pi \left[\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3 \sin e} - \frac{1 - e^2}{e^2} \right],$$

$$N = 4\pi \left[\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3 \sin e} \right].$$

Für ein durch Rotation um die grosse Achse entstandenes Ellipsoid ist

$$b = c = a \sqrt{1 - e^2},$$

$$L = 4\pi \frac{1 - e^2}{e^2} \left[\frac{1}{2e} \cdot l_n \frac{1 + e}{1 - e} - 1 \right],$$

$$M = N = 2\pi \left[\frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \cdot l_n \frac{1 + e}{1 - e} \right].$$

Macht man in diesen Formeln $e = 0$, so findet man die für die Kugel bereits direkt erhaltenen Resultate wieder, nämlich

$$L = M = N = \frac{4}{3}\pi,$$

$$F = -\frac{4}{3}\pi I.$$

Für ein sehr abgeplattetes Ellipsoid, in dem die Excentricität der Einheit nahe ist, erhält man beim Uebergang zur Grenze

$$L = M = \pi^2 \frac{c}{a} = \pi^2 \sqrt{1 - e^2},$$

$$N = 4\pi.$$

Ist endlich das Ellipsoid sehr gestreckt, so erhält man annäherungsweise

$$M = N = 2\pi,$$

$$L = 4\pi \frac{b^2}{a^2} \left(l_n \frac{2a}{b} - 1 \right),$$

und der Coefficient L nähert sich der Null, wenn e sich der Einheit nähert.

Schliesslich ist für ein sehr plattes Ellipsoid, welches man im Grenzfalle als eine sehr dünne Platte betrachten kann, die innere Kraft durch die Gleichung gegeben

$$F = -4\pi I, \quad \text{oder} \quad F = -\pi^2 \sqrt{1-e^2}\, I,$$

je nachdem die Magnetisirung senkrecht oder parallel zur Ebene der Platte ist.

Für ein sehr lang gedehntes Ellipsoid erhält man ebenso

$$F = -2\pi I, \quad \text{oder} \quad -4\pi^2 \frac{b^2}{a^2}\left(l_n \frac{2a}{b} - 1 \right) I,$$

je nachdem die Magnetisirung senkrecht oder parallel zur grossen Achse ist.

359. Transversal magnetisirter Cylinder. — Den Fall eines Cylinders könnte man leicht auf den eines Ellipsoides zurückführen, aber man kann ihn auch leicht direkt behandeln. Betrachtet man einen unbegrenzten Kreiscylinder vom Radius a und einer der Einheit gleichen Dichte, dann ist die Masse der Längeneinheit $\lambda = \pi a^2$.

Die äussere Wirkung dieses Cylinders in der Entfernung r von der Achse ist gleich (**132**) $\frac{2\lambda}{r} = \frac{2\pi a^2}{r}$, was für das Gravitationspotential ergiebt

$$P = -2\pi a^2 \cdot l_n r + \text{Const.}$$

Besitzt der Cylinder eine gleichförmige transversale Magnetisirung, und wählt man die x Achse parallel zur Magnetisirung, so ist demnach das äussere Potential

$$V = -I \frac{\partial P}{\partial x} = I \frac{2\pi a^2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} = I \frac{2\pi a^2}{r^2} x\,.$$

Die Wirkung eines homogenen Kreiscylinders auf einen inneren Punkt reducirt sich auf die des cylindrischen Kerns, auf dessen Mantel der Punkt liegt. Man sieht dies leicht durch einen Schluss, der dem analog ist, der für die Kugel (**42**) gemacht ist. Die Wirkung des Cylinders auf einen inneren Punkt ist demnach gleich $\frac{2\pi r^2}{r} = 2\pi r$, und das Potential wird

$$P = -\pi r^2 + \text{Const.}$$

Das Potential des gleichförmig magnetisirten Cylinders ist demnach

$$V = -I \frac{\partial P}{\partial x} = I 2\pi r \frac{\partial r}{\partial x} = I 2\pi x.$$

Folglich ist die innere Kraft constant und gleich $-2\pi I$; ihre Richtung ist der der Magnetisirung entgegengesetzt.

Die Induction ist ebenfalls constant und hat den Wert

$$F_1 = 4\pi I - 2\pi I = 2\pi I.$$

360. Potential magnetischer Blätter. — Wir haben gesehen, dass das Potential eines gleichförmigen Blattes gleich ist dem Produkt aus der magnetischen Stärke Φ in die scheinbare Oberfläche ω desselben im betrachteten Punkte. Ist das Blatt nicht gleichförmig, so wird das Potential ausgedrückt durch

$$V = \int \Phi d\omega.$$

Die Berechnung des Potentials kann nach einer der vorigen analogen Methode auf die des Potentials einer magnetischen Schicht zurückgeführt werden, so dass man die Bestimmung der räumlichen Winkel vermeiden kann.

Das Potential eines Elementes dS des Blattes in einem Punkte M ist gleich dem zweier magnetischer Schichten $\pm \sigma dS$ die einander entgegengesetzt gleich sind, und deren normaler Abstand dn der Bedingung $\sigma dn = \Phi$ genügt.

Bezeichnen wir mit n den Abstand des Elementes von einem festen auf der Normale der negativen Seite gelegenen Punkte, so kann das Potential fdS der Schicht σdS als eine Funktion dieses Abstandes n aufgefasst werden, so dass das Potential des Elementes des Blattes ist

$$dSf(n) - dSf(n - dn) = dSdn \frac{\partial f}{\partial n}.$$

Da der Abstand dn der beiden Oberflächen als constant angenommen werden kann, ist das Potential des ganzen Blattes

$$V = \int dSdn \frac{\partial f}{\partial n} = dn \int dS \frac{\partial f}{\partial n}.$$

Aber der Ausdruck $\int fdS$ stellt das Potential U der positiven Fläche des Blattes dar; man erhält demnach

(3) $$V = dn \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Das Potential Q einer Schicht, deren Dichte in jedem Punkte der magnetischen Stärke Φ gleich wäre, hat aber den Wert $U \frac{\Phi}{\sigma}$ oder Udn; es folgt somit

(4) $$V = \frac{\partial Q}{\partial n}.$$

Nennt man nun $\frac{1}{p}$ den Abstand des Punktes M von dem Elemente dS, dann ist das Potential Q gleich $\int p\Phi dS$, woraus sich noch ergiebt

(5) $$V = \int \Phi \frac{\partial p}{\partial n} dS.$$

Der Faktor p giebt das Potential einer der Einheit gleichen im Punkte M befindlichen Masse auf ein Element dS an.

361. — Ist das Blatt gleichförmig, so ist der Faktor Φ eine Constante, und wenn man das Potential einer Schicht, deren Dichte der Einheit gleich ist, mit P bezeichnet, so erhält man $Q = \Phi P$, und die Ausdrücke (4) und (5) gehen über in

$$(6) \qquad V = \Phi \frac{\partial P}{\partial n},$$

$$(6)' \qquad V = \Phi \int \frac{\partial p}{\partial n} dS.$$

362. — Wir fassen als Beispiel ein Blatt ins Auge, das von einer ebenen Grenzlinie begrenzt wird; man kann dasselbe durch ein ebenes Blatt von derselben Stärke ersetzen, welches von derselben Linie begrenzt ist. Bringen wir dieses Blatt in die yz Ebene mit der positiven Seite nach der positiven xAchse gerichtet, so erhält man, wenn x die Abscisse des Punktes M ist, augenscheinlich $dx = - dn$, und folglich

$$\frac{\partial Q}{\partial n} = - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$(7) \qquad V = - \frac{\partial Q}{\partial x} = - \int \Phi \frac{\partial p}{\partial x} dS.$$

Ist das Blatt gleichförmig, so ergiebt sich

$$(7)' \qquad V = - \Phi \frac{\partial P}{\partial x} = - \Phi \int \frac{\partial p}{\partial x} dS,$$

ein Ausdruck, den man auch durch Betrachtung der Gleitschichten (**354**) hätte erhalten können.

363. — Für ein auf einer Kugel vom Radius a gelegenes Blatt erhält man, wenn der Punkt M ausserhalb auf der Seite der positiven Fläche liegt, in derselben Weise

$$(8) \qquad V = \frac{\partial Q}{\partial a} = \int \Phi \frac{\partial p}{\partial a} dS$$

und, wenn das Blatt gleichförmig ist,

$$(8)' \qquad V = \Phi \frac{\partial P}{\partial a} = \Phi \int \frac{\partial p}{\partial a} dS.$$

Wäre dagegen die nach dem Punkte M gerichtete Seite negativ, so müsste man die Ausdrücke wählen

$$V = - \frac{\partial Q}{\partial a} = - \int \Phi \frac{\partial p}{\partial a} dS,$$

$$V = - \Phi \frac{\partial P}{\partial a} = - \Phi \int \frac{\partial p}{\partial a} dS.$$

364. — In dem Falle einer Kugel ist das Potential p eine homogene Funktion vom Grade -1 des Radius a und des Abstandes r des Punktes M vom Mittelpunkte, woraus sich die Bedingung ergiebt

$$a\frac{\partial p}{\partial a}+r\frac{\partial p}{\partial r}=-p,$$

oder

$$\frac{\partial p}{\partial a}=-\frac{1}{a}\left(p+r\frac{\partial p}{\partial r}\right)=-\frac{1}{a}\frac{\partial(pr)}{\partial r}.$$

Es folgt hieraus

$$V=-\int\frac{\Phi}{a}\frac{\partial(pr)}{\partial r}dS.$$

Da die Abstände r und a bei der Integration constant bleiben, kann man setzen

$$V=-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial r}\int pr\Phi\, dS=-\frac{1}{a}\frac{\partial(rQ)}{\partial r}. \tag{9}$$

365. Potential einer kreisförmigen Schicht. — Das Potential eines gleichförmigen Blattes mit kreisförmiger Begrenzung kann aus dem Potential einer ebenen kreisförmigen Schicht oder aus dem einer beliebigen, beispielsweise kugelförmigen Schicht, die von derselben Grenzlinie begrenzt ist, berechnet werden.

Wir fassen zunächst allgemeiner eine Rotationsschicht ins Auge, deren Achse die x Achse ist. Für einen Punkt M, dessen Abscisse x ist, und der in der Entfernung ρ von der Achse liegt, ist das Potential P eine Funktion von x und von ρ. Entwickelt man dieses Potential nach steigenden Potenzen von ρ oder von $\frac{1}{\rho}$, so enthält die erhaltene Reihe wegen der Symmetrie nur gerade Potenzen der Variabeln. Man kann demnach setzen

$$\begin{aligned}P&=A_0+A_2\rho^2+A_4\rho^4+\cdots,\\ P&=B_0+B_2\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+B_4\left(\frac{1}{\rho}\right)^4+\cdots,\end{aligned} \tag{10}$$

wo die Coefficienten $A_0, A_2 \ldots B_0, B_2 \ldots$ Funktionen von x sind.

Wählt man x und ρ als unabhängige Variabeln, so wird aus der Laplace'schen Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}=0.$$

Setzt man in diese Gleichung für P die erste Reihe ein, so ergiebt sich, da die Coefficienten aller Glieder einzeln Null sein müssen, die allgemeine Bedingung

$$\frac{\partial^2 A_{2n}}{\partial x^2}+(2n+2)^2 A_{2n+2}=0.$$

Man erhält somit der Reihe nach

$$A_2 = -\frac{1}{2^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2},$$

$$A_4 = -\frac{1}{4^2}\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} = +\frac{1}{(2.4)^2}\frac{\partial^4 A_0}{\partial x^4},$$

$$A_6 = -\frac{1}{6^2}\frac{\partial^2 A_4}{\partial x^2} = -\frac{1}{(2.4.6)^2}\frac{\partial^6 A_0}{\partial x^6},$$

. .

$$A_{2n} = -\frac{1}{(2n)^2}\frac{\partial^2 A_{2n-2}}{\partial x^2} = (-1)^n \frac{1}{(2.4\ldots 2n)^2}\frac{\partial^{2n} A_0}{\partial x^{2n}}.$$

Die Kenntnis des ersten Coefficienten A_0 reicht zur Berechnung aller andern aus. Dieser Coefficient A_0 ist durch den Ausdruck für das Potential auf der Achse gegeben, welcher von der Form der Schicht und dem Verteilungsgesetze abhängt.

Das Potential ausserhalb der Achse ist dann

$$(11) \qquad P = A_0 - \frac{\rho^2}{2^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} + \frac{\rho^4}{(2.4)^2}\frac{\partial^4 A_0}{\partial x^4} - \frac{\rho^6}{(2.4.6)^2}\frac{\partial^6 A_0}{\partial x^6} + \cdots.$$

Für die zweite Reihe würde die Laplace'sche Gleichung die allgemeine Bedingung ergeben

$$\frac{\partial^2 B_{2n+2}}{\partial x^2} + (2n)^2 B_{2n} = 0,$$

die nicht in derselben Weise die Berechnung der Coefficientenreihe gestattet.

366. — In dem Falle einer homogenen kreisförmigen Schicht vom Radius a und von der Dichte Eins hat das Potential P_0 auf der Achse, wenn man den Mittelpunkt als Ursprung der Abscissen wählt, den Wert

$$P_0 = 2\pi(\sqrt{a^2 + x^2} - x).$$

Setzt man

$$u = \sqrt{a^2 + x^2},$$

was

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{u}$$

ergiebt, so erhält man demnach für das erste Glied der Entwicklung des Potentials als Funktion der Potenzen von ρ

$$A_0 = 2\pi(u - x),$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial x} = 2\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1\right) = 2\pi\left(\frac{x}{u} - 1\right),$$

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} = 2\pi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ etc.}$$

Das Potential P ausserhalb der Achse ist dann

$$(12) \qquad P = 2\pi\left[u - x - \frac{\rho^2}{2^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho^4}{(2.4)^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\rho^6}{(2.4.6)^2}\frac{\partial^6 u}{\partial x^2} + \cdots\right].$$

Die Ableitungen von u nach x lassen sich der Reihe nach leicht berechnen.

367. — Ist die Schicht kreisförmig, dann ist es oft vorteilhafter, der Entwicklung eine andere Form zu geben.

Bezeichnen wir mit a den Radius des Kreises, der die Schicht begrenzt, mit r den Abstand des Punktes M vom Mittelpunkte und mit θ den Winkel, den die Richtung der M mit dem Mittelpunkte verbindenden Geraden mit der Achse bildet, so kann man das Potential auch durch eine der beiden Reihen ausdrücken

$$(13) \qquad \begin{aligned} P &= A_0 + A_1\left(\frac{r}{a}\right) + A_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \cdots, \\ P &= B_0 + B_1\left(\frac{a}{r}\right) + B_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

je nachdem r kleiner oder grösser als a ist, je nachdem also der Punkt M innerhalb oder ausserhalb der Kugel vom Radius a liegt. Die Coefficienten sind Funktionen des Winkels θ, und da die beiden Ausdrücke auf der bezeichneten Kugel denselben Wert haben müssen, genügen erstere der Bedingung

$$A_0 + A_1 + \cdots = B_0 + B_1 + \cdots$$

Fasst man das Potential als Funktion von r und θ auf, so geht die Laplace'sche Gleichung über in

$$r^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial P}{\partial r} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = 0.$$

Man findet so, dass die Coefficienten A und B den allgemeinen Bedingungen genügen

$$n(n+1)A_n + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial A_n}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 A_n}{\partial\theta^2} = 0,$$

$$n(n-1)B_n + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial B_n}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 B_n}{\partial\theta^2} = 0.$$

Entwickelt man das Potential auf Punkte der Achse,

$$P_0 = 2\pi\left[\sqrt{a^2 + x^2} - x\right],$$

nach steigenden Potenzen von $\frac{x}{a}$ oder $\frac{a}{x}$, so erhält man die beiden Reihen

$$P_0 = 2\pi a\left[1 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1.1}{2.4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{x}{a}\right)^6 - \cdots\right],$$

$$P_0 = 2\pi a\left[\frac{1}{2}\frac{a}{x} - \frac{1.1}{2.4}\left(\frac{a}{x}\right)^3 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{a}{x}\right)^5 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{a}{x}\right)^7 + \cdots\right].$$

Um den Ausdruck für das Potential ausserhalb der Achse als Funktion des Verhältnisses $\frac{r}{a}$ oder $\frac{a}{r}$ zu erhalten, genügt es, zu berücksichtigen, dass, wenn die Dichte einer kugelförmigen Schicht gegen einen zur xAchse gewählten Durchmesser symmetrisch ist, das Potential dieser Schicht in einem Punkte M nur vom Abstande dieses Punktes vom Mittelpunkte O der Kugel und von dem Winkel θ abhängt, den die Gerade OM mit der Achse bildet.

Nach einem bekannten Satze von Legendre kann dieses Potential ausgedrückt werden durch die allgemeinen Formeln

$$P = A_0 + A_1 X_1 \frac{r}{a} + A_2 X_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \cdots,$$

$$P = B_0 \frac{a}{r} + B_1 X_1 \left(\frac{a}{r}\right)^2 + B_2 X_2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \cdots,$$

in denen $A_0, A_1 \ldots B_0, B_1 \ldots$ constante Coefficienten und $X_1, X_2 \ldots$ Funktionen des Winkels θ sind, die als Legendre'sche Polynome bezeichnet werden und durch die Entwicklung definirt sind

$$[1 - 2x\cos\theta + x^2]^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1 x + X_2 x^2 + X_3 x^3 + \cdots,$$

wo alle diese Funktionen der Einheit gleich werden, wenn der Winkel θ der Null gleich ist.

Da wir die Entwicklung des Potentials einer homogenen Kreisschicht für einen Punkt der Achse, d. h. wenn der Winkel θ Null und r gleich x ist, kennen, sind die Coefficienten bekannt. Es folgt daraus, dass für einen Punkt, der ausserhalb der Achse liegt, das Potential P ausgedrückt wird durch

$$(15)\quad \begin{cases} P = 2\pi a\left[1 - X_1\frac{r}{a} + \frac{1}{2}X_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1.1}{2.4}X_4\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}X_6\left(\frac{r}{a}\right)^6 - \cdots\right], \\ P = 2\pi a\left[\frac{1}{2}\frac{a}{r} - \frac{1.1}{2.4}X_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1.1.3}{2.4.6}X_4\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}X_6\left(\frac{a}{r}\right)^7 + \cdots\right], \end{cases}$$

je nachdem $r < a$ oder $r > a$ ist.

368. Potential eines gleichförmigen, kreisförmigen Blattes. — Das Potential eines gleichförmigen, kreisförmigen Blattes wird jetzt erhalten durch den Ausdruck

$$V = -\Phi\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Man findet so nach der ersten Form (12)

$$V = 2\pi\Phi\left[1 - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho^2}{2^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\rho^4}{(2.4)^2}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \cdots\right].$$

Die ersten Glieder der Entwicklung sind dann

$$(16)\quad V=2\pi\Phi\left\{1-\frac{x}{u}\left[1-\frac{3}{2^2}\frac{a^2}{u^2}\left(\frac{\rho}{u}\right)^2-\frac{3.5}{(2.4)^2}\frac{7x^2a^2-3a^2u^2}{u^4}\left(\frac{\rho}{u}\right)^4+\cdots\right]\right\},$$

und die Reihe ist stets convergent für $\rho < u$.

Die zweite Form der Entwicklung (13) würde liefern, wenn man den Ausdruck

$$V=\Phi\frac{\partial P}{\partial a}$$

wählt,

$$(17)\quad \begin{aligned} V&=2\pi\Phi\quad\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2X_2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{r}{a}\right)^4X_4-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{r}{a}\right)^6X_6+\cdots\right],\\ V&=2\pi\Phi\frac{a}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2X_2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{a}{r}\right)^4X_4-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{a}{r}\right)^6X_6+\cdots\right].\end{aligned}$$

369. Potential einer kugelförmigen Schicht. — Endlich betrachten wir eine beliebige kugelförmige Schicht vom Radius a. Das Potential in einem äusseren Punkte M im Abstande r vom Mittelpunkte kann auch in diesem Falle noch ausgedrückt werden durch die Reihe

$$(18)\qquad V=a\left[A_0\left(\frac{a}{r}\right)+A_1\left(\frac{a}{r}\right)^2+A_2\left(\frac{a}{r}\right)^3+\cdots\right],$$

in welcher die Coefficienten von dem Verteilungsgesetze und von der Richtung der Geraden r abhängen.

Ist u der Winkel der Geraden r gegen die zAchse, l der Winkel der Ebene rz gegen die yzEbene, so sind die Coordinaten des Punktes M

$$(19)\qquad \begin{aligned} z&=r\cos u,\\ y&=r\sin u\cos l,\\ x&=r\sin u\sin l.\end{aligned}$$

Wählt man r, u und l als unabhängige Variabeln, so liefert die Laplace'sche Gleichung

$$r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\operatorname{ctg}u\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 V}{\partial l^2}=0;$$

hieraus folgt für die Coefficienten die allgemeine Bedingung

$$n(n+1)A_n+\frac{\partial^2 A_n}{\partial u^2}+\operatorname{ctg}u\frac{\partial A_n}{\partial u}+\frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 A_n}{\partial l^2}=0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist von Laplace angegeben worden; setzt man

$$\begin{aligned} A_{n.m}=\Bigg[&\cos^{n-m}u-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-m-2}u\\ &+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-2)}\cos^{n-m-4}u-\cdots\Bigg]\sin^m u,\end{aligned}$$

dann besteht der Coefficient A_n, wenn er mittels der neuen Zeichen ausgedrückt wird, aus $2n+1$ Gliedern, die nach den Sinus und den Cosinus der Vielfachen des Winkels l entwickelt sind, und hat den Wert

$$A_n = g_{n.0} A_{n.0} + (g_{n.1} \cos l + h_{n.1} \sin l) A_{n.1}$$
$$+ (g_{n.2} \cos 2l + h_{n.2} \sin 2l) A_{n.2} + \cdots + (g_{n.n} \cos nl + h_{n.n} \sin nl) A_{n.n}.$$

Die mit g, h mit den verschiedenen Indices bezeichneten Faktoren sind in jedem einzelnen Falle zu bestimmende Zahlencoefficienten.

370. — Betrachtet man eine in beliebiger Weise magnetisirte Kugel, so ist ihre Wirkung nach aussen mit der zweier mit entgegengesetzt gleichen Massen belegter Schichten gleichwertig, die auf der Oberfläche nach einem bestimmten Gesetze verteilt sind.

Der Coefficient A_0 des ersten Gliedes ist Null. Denn in einer grossen Entfernung wird das Potential einfach gleich dem Quotienten der gesammten Masse durch den Abstand. Das Produkt $A_0 a^2$, welches den Zähler des ersten Gliedes bildet, stellt in diesem Falle die Gesammtmasse dar, und man weiss, dass in dem ganzen Magnet die Gesammtmasse Null ist.

Der Coefficient des folgenden Gliedes hat den Wert

$$A_1 = g_{1.0} \cos u + (g_{1.1} \cos l + h_{1.1} \sin l) \sin u,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (19)

$$A_1 = g_{1.0} \frac{z}{r} + g_{1.1} \frac{y}{r} + h_{1.1} \frac{x}{r}.$$

Dieses Glied herrscht in grosser Entfernung vor, und das Potential beschränkt sich dann auf

$$V = A_1 \frac{a^3}{r^2} = \frac{a^3 g_{0.1}}{r^2} \frac{z}{r} + \frac{a^3 g_{1.1}}{r^2} \frac{y}{r} + \frac{a^3 h_{1.1}}{r^2} \frac{x}{r};$$

es folgt hieraus (**151**), dass die drei Produkte $a^3 g_{0.1}$, $a^3 g_{1.1}$, $a^3 h_{1.1}$ beziehungsweise die magnetischen Momente der Kugel in Bezug auf die z, die y und die x Achse darstellen. Bezeichnet man mit $a^3 K$ das resultirende magnetische Moment und mit α, β und γ die Cosinus der Winkel, die die Richtung desselben mit den Achsen bilden, so erhält man

$$K = \frac{h_{1.1}}{\alpha} = \frac{g_{1.1}}{\beta} = \frac{g_{1.0}}{\gamma} = \sqrt{h_{1.1}^2 + g_{1.1}^2 + g_{1.0}^2}.$$

371. Solenoidale Magnete. — Das Potential eines solenoidalen Magnets (**328**) hängt nur von den Flächen ab, welche von den Endflächen der einfachen Solenoide, aus denen dasselbe besteht, gebildet werden.

Sind alle Solenoide geschlossen, so ist das Potential des Magnets überall Null. In diesem Falle reducirt sich die Induction in jedem Punkte auf $4\pi I$ und ist der Magnetisirung parallel.

372. — Nehmen wir an, ein solenoidaler Magnet sei von einer Kanalfläche begrenzt, während die Magnetisirung in jedem Punkte zum Normalschnitte des Kanals senkrecht ist, dann ist die Induction Q, die durch ein Element dS des Normalschnittes geht, gleich $4\pi IdS$, und die gesammte Induction hat den Wert

$$Q = 4\pi \int IdS.$$

Jeder normale Faden bildet eine geschlossene Curve von der Länge l, die in jedem Punkte zum Normalschnitte des Kanals senkrecht ist. Ist die Structur des Magnets eine solche, dass das Produkt aus der Intensität der Magnetisirung I eines Fadens in dessen Länge l eine constante Grösse A ist — später werden wir Beispiele für Magnete dieser Art kennen lernen — so kann die Induction ausgedrückt werden durch die Formel

$$(20) \qquad Q = 4\pi \int IdS = 4\pi A \int \frac{dS}{l}.$$

Ist der Magnet ein Rotationsring und nennt man x den Radius eines Elementarsolenoides, so erhält man

$$Q = 4\pi A \int \frac{dS}{2\pi x} = 2A \int \frac{dS}{x}.$$

Wir betrachten als Beispiel einen Ring mit kreisförmigem Querschnitt. Ist a der Radius des Querschnittes und R der Abstand seines Mittelpunktes von der Rotationsachse, die wir als zAchse wählen, so erhält man

$$\int \frac{dS}{x} = \int_{R-a}^{R+a} \frac{z}{x}\, dx = \pi\, [R - \sqrt{R^2 - a^2}],$$

wie man durch Einführung von Polarcoordinaten leicht findet; und die gesammte Induction hat den Wert

$$(21) \qquad Q = 2\pi A\, [R - \sqrt{R^2 - a^2}].$$

373. Cylinder. — Ein gleichförmig magnetisirter Cylinder, der von ebenen Querschnitten begrenzt ist, ist zwei magnetischen Schichten mit den entgegengesetzt gleichen Intensitäten $\pm I$ gleichwertig, die bez. die Grundflächen A und B bedecken. Das Potential eines derartigen Magnets in irgend einem Punkte ist demnach gleich der Summe der Potentiale V_a und V_b der beiden Grenzschichten.

Ist der ebene Querschnitt des Cylinders kreisförmig, so können die Potentiale V_a und V_b durch die oben (**365** und **366**) gefundenen Formeln ausgedrückt werden.

Für einen ausserhalb des Cylinders auf der Seite der positiven Fläche A auf der Achse gelegenen Punkt wird die magnetische Kraft, wenn man

mit α und β die Winkel bezeichnet, unter denen man vom Punkte M aus die Radien der beiden Grundflächen sieht, ausgedrückt durch (322)

$$F = 2\pi I(1 - \cos\alpha) - 2\pi I(1 - \cos\beta) = 2\pi I(\cos\beta - \cos\alpha),$$

und dieselbe hat die Richtung der Magnetisirung.

Für einen inneren Punkt haben die Wirkungen der beiden Grundflächen dasselbe Zeichen, was eine Kraft giebt

$$F = 4\pi I - 2\pi I(\cos\alpha + \cos\beta),$$

die der Magnetisirung entgegengesetzt gerichtet ist.

Endlich ist die Induction auf der Achse im Innern

$$F_1 = 4\pi I - F = 2\pi I(\cos\alpha + \cos\beta);$$

dieselbe ist der Magnetisirung parallel und ändert sich sehr langsam, so lange der betrachtete Punkt in einem beträchtlichen Abstande von den Grundflächen liegt.

Bezeichnet man mit l die Länge des Cylinders und mit a den Radius desselben, so hat die Induction im Mittelpunkte des Cylinders den Wert

$$F_0 = 2\pi I \,.\, 2\cos\alpha = 4\pi I \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = 4\pi I \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2a}{l}\right)^2}}.$$

Ist die Länge des Cylinders gegen seinen Durchmesser sehr gross, so kann man den angenäherten Ausdruck wählen

$$F_0 = 4\pi I\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{l}\right)^2\right].$$

Die Induction ist dann in der ganzen Ausdehnung des Mittelschnittes merklich dieselbe, und die Gesammtströmung Q_0, die durch denselben hindurchgeht, wird ausgedrückt durch

$$Q_0 = \pi a^2 F_0 = (2\pi a)^2 I\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{l}\right)^2\right].$$

Wenn der Cylinder so lang ist, dass die Klammer sich nicht merklich von Eins unterscheidet, dann ist die Inductionsströmung in dem Mittelschnitte gleich $(2\pi a)^2 I$. Diese Strömung ist demnach proportional dem Quadrate des Umfanges; dieselbe hat noch merklich denselben Wert in einem beliebigen Querschnitte, der von den Enden genügend weit entfernt ist.

4. Capitel.

Magnetische Induction.

374. Allgemeine Eigenschaften der magnetischen Induction. — Es giebt wahrscheinlich keinen Körper, der, wenn er in ein magnetisches Feld gebracht ist, keine Einwirkung durch Induction erleidet, der also nicht selbst, wenigstens vorübergehend, ein Magnet wird.

Wenn der Körper isotrop ist, dann fällt die Achse der inducirten Magnetisirung in jedem Punkte mit der Richtung der daselbst wirkenden magnetischen Kraft zusammen. Für gewisse Körper hat die inducirte Magnetisirung dieselbe Richtung wie die Kraft; es sind dies die Körper, die wir *paramagnetisch* oder einfach *magnetisch* genannt haben. Für andere ist der Sinn der Magnetisirung dem der Kraft entgegengesetzt: es sind dies die *diamagnetischen* Körper. Einem Magnetpole gegenüber erhalten die Körper der ersten Klasse in dem dem Magnetpole nächsten Teile einen Pol von entgegengesetztem Zeichen, die der zweiten einen solchen von demselben Zeichen.

Wir machen die Annahme, dass in jedem Punkte eines isotropen Körpers, welcher der magnetischen Induction ausgesetzt ist, die Magnetisirung der Resultante aller magnetischen Kräfte, die auf diesen Punkt einwirken, proportional ist. Diese Kräfte hängen nicht blos vom ursprünglichen Felde, sondern auch von dem in dem Körper selbst durch Induction entwickelten Magnetismus ab. Bezeichnet man mit F die resultirende Kraft, die man häufig *magnetisirende Kraft* nennt, mit I die Intensität der Magnetisirung, so kann man setzen

(1) $$I = kF.$$

Der Faktor k, der das Verhältnis der Magnetisirung zur magnetisirenden Kraft ausdrückt, heisst *Coefficient der inducirten Magnetisirung;* dieser Coefficient ist positiv oder negativ, je nachdem es sich um einen magnetischen Körper im engeren Sinne oder um einen diamagnetischen Körper handelt.

Die Annahme der Proportionalität der Magnetisirung mit der magnetisirenden Kraft zeigt sich immer als sehr nahe richtig, wenn der Coefficient k einen kleinen Wert hat. Diese Bedingung ist für die meisten magne-

tischen Körper bis auf Eisen, Nickel und Kobalt erfüllt. Handelt es sich um Eisen oder Nickel, für welche Metalle der Coefficient k sehr grosse Werte, etwa 30 oder 40, erhält, so besteht die Proportionalität, so lange die Kraft F eine gewisse Grenze nicht überschreitet, beispielsweise wenn diese Körper durch die Erde magnetisirt werden. Ebenso verhält es sich mit dem unreinen, mit dem kalt gehämmerten Eisen, mit dem Gusseisen und dem mehr oder weniger gehärteten Stahl, wo der Magnetisirungscoefficient verhältnismässig klein ist. Der Coefficient k ist stets sehr klein für die diamagnetischen Körper; derselbe erreicht kaum $\frac{1}{400000}$ für das Wismuth, obwohl dieses Metall der activste Körper dieser Gattung ist.

Besteht die Proportionalität zwischen der Magnetisirung und der magnetisirenden Kraft nicht, so muss man den Coefficienten k selbst als Funktion der Magnetisirung auffassen. Wir wollen zunächst den Fall prüfen, wo dieser Coefficient constant und in allen Richtungen derselbe ist, wo also der Körper isotrop und die inducirte Magnetisirung genügend schwach ist.

375. **Inducirte der magnetisirenden Kraft proportionale Magnetisirung.** — Wir fassen einen beliebigen Körper in einem magnetischen Felde ins Auge. Ist V das Potential des Feldes und Ω das, welches durch die inducirten Massen verursacht ist, so hat das resultirende Potential den Wert

$$U = V + \Omega.$$

In einem beliebigen Punkte sind die den Achsen parallelen Componenten der magnetisirenden Kraft

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Die Kraft selbst wird ausgedrückt durch

$$F = -\frac{dU}{dn};$$

die Richtung derselben ist die der Normale n der Niveaufläche, die durch den betrachteten Punkt geht.

Die Intensität I der Magnetisirung und deren den Achsen parallele Componenten A, B und C werden dann

$$I = kF = -k\frac{\partial U}{\partial n},$$

$$A = -k\frac{\partial U}{\partial x}, \quad B = -k\frac{\partial U}{\partial y}, \quad C = -k\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen beziehungsweise mit dx, dy, dz und addirt dieselben, so ergiebt sich

$$Adx + Bdy + Cdz = -k\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -kdU.$$

Ist der Wert von k in der ganzen Ausdehnung des Körpers constant, so ist die linke Seite der Gleichung das vollständige Differential einer Funktion Φ der Coordinaten, und man erhält

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Es folgt also (332), dass die Magnetisirung eine *lamellare* ist.

376. Die inducirte Magnetisirung befindet sich auf der Oberfläche. — Andererseits reducirt sich der allgemeine Ausdruck für die magnetische Dichte

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

hier auf

$$\rho = -k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = -k\Delta U.$$

Da aber nach der Poisson'schen Gleichung $\Delta U = -4\pi\rho$ ist, ergiebt sich

$$\rho(1 + 4\pi k) = 0 \quad \text{oder} \quad \rho = 0;$$

die Dichte ist also in dem ganzen Raume des Körpers Null. Die Magnetisirung ist demnach auch eine *solenoidale,* und bemerkbarer Magnetismus befindet sich nur an der Oberfläche.

Bei diesem Schlusse wird die Voraussetzung gemacht, dass die Klammer $1 + 4\pi k$ nicht Null ist; aber dieser Fall tritt nie ein, da der absolute Wert von k für die diamagnetischen Körper weit hinter $\frac{1}{4\pi}$ zurückbleibt.

377. — Die Flächendichte σ der inducirten Schicht ist, wenn man θ den Winkel der Magnetisirung gegen die Normale der Fläche nennt (Fig. 84),

$$\sigma = I\cos\theta.$$

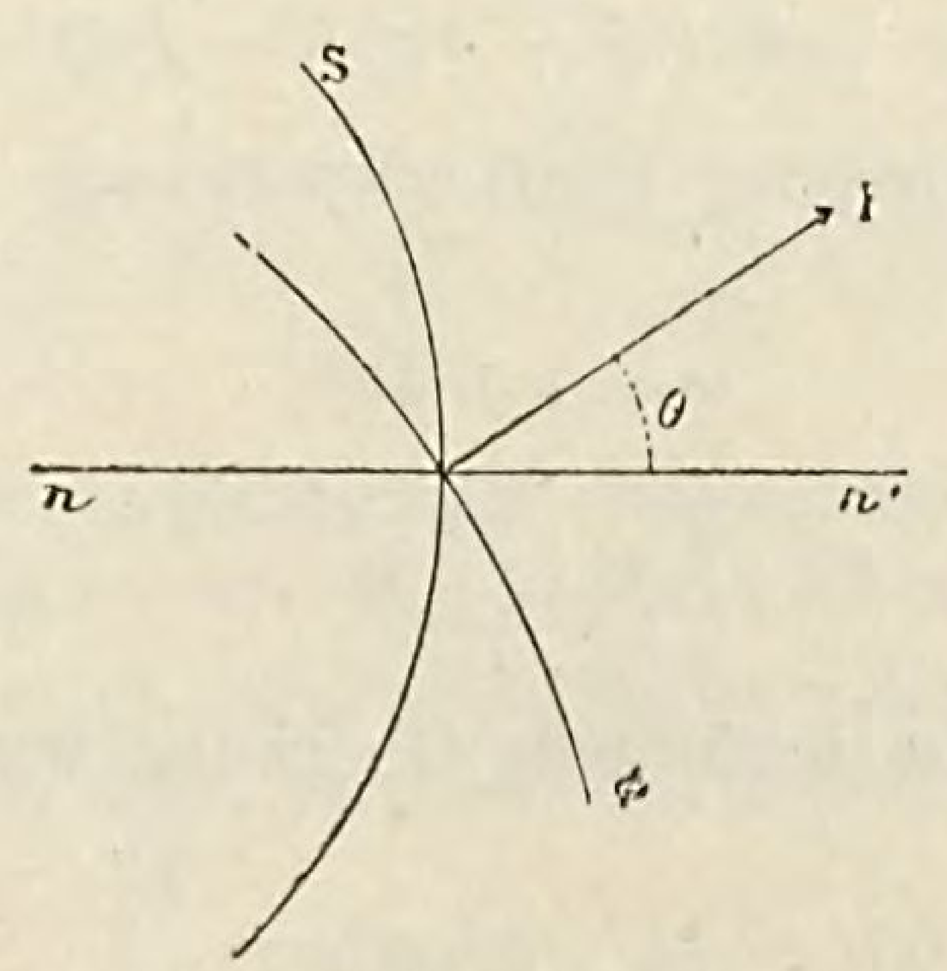


Fig. 84.

Bezeichnen wir diese Normale mit n, wenn man sie nach innen, mit n', wenn man sie nach aussen misst, und ist a die Normale der Fläche, deren Richtung mit der der Magnetisirung zusammenfällt, so erhält man

$$I = \frac{d\Phi}{da},$$

$$\sigma = I\cos\theta = \frac{\partial\Phi}{\partial n'} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n}.$$

378. — Das von den inducirten Massen, also von der Oberflächenschicht herrührende Potential hat den Wert

$$\Omega = \int\int \frac{\sigma dS}{r}.$$

Die Funktion Ω ist endlich und stetig und genügt der Laplace'schen Gleichung sowohl innerhalb als ausserhalb der Fläche. Bezeichnet man mit Ω' den Wert, den dieselbe ausserhalb annimmt, so erhält man für zwei benachbarte Punkte, die zu beiden Seiten der Fläche liegen, die Bedingung

$$\Omega = \Omega'.$$

379. Continuitätsgleichung. — Coefficient der Induction. — Das Princip der Erhaltung der Induction (**324**) gestattet sehr einfach die Bedingungen für die Continuität der Potentiale Ω an der Oberfläche des magnetisirten Körpers aufzustellen.

Wir fassen zwei unendlich nahe Punkte, die auf derselben Normale zu beiden Seiten der Oberfläche liegen, ins Auge. F_1 sei der Wert der Induction in dem inneren Punkte, F'_1 der Wert der magnetischen Kraft in dem äusseren Punkte. Geben $(F_1)_n$ und F'_n die in derselben Richtung gerechneten normalen Componenten an, so erhält man vermöge des Satzes von der Erhaltung der Induction die Bedingung

$$(F_1)_n = F'_n.$$

Da die Magnetisirung der magnetisirenden Kraft parallel ist, wird im vorliegenden Falle die Induction

$$F_1 = F + 4\pi I = F + 4\pi k F = F(1 + 4\pi k);$$

dieselbe ist der magnetisirenden Kraft proportional.

Setzt man

$$\mu = 1 + 4\pi k,$$

so erhält man demnach

$$F_1 = \mu F,$$

und die auf die Oberfläche bezügliche Gleichung wird dann

(2) $$\mu F_n = F'_n \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{F'_n}{F_n}.$$

Demnach *ist für zwei unendlich nahe zu beiden Seiten der Oberfläche angenommene Punkte das Verhältnis der Normalcomponenten der magnetischen Kraft constant.* Dies ist die grundlegende Folgerung aus der Poisson'schen Theorie, von der wir bereits (**111**) Gebrauch gemacht haben zur Definition der Dielektrica. Der Coefficient μ stellte dort die specifische inductive Capacität des Dielektricums dar; wir wollen denselben hier *Coefficient der magnetischen Induction* nennen. Es ist wichtig, denselben nicht mit dem Coefficienten der inducirten Magnetisirung zu verwechseln, welcher durch k dargestellt ist.

380. — Drückt man die Gleichung (2) als Funktion der Potentiale aus, so erhält man

$$\mu \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U'}{\partial n'} = 0$$

oder

$$\mu \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial \Omega}{\partial n} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial n'} + \frac{\partial \Omega'}{\partial n'} \right) = 0. \tag{3}$$

Um die Magnetisirung eines in einem magnetischen Felde befindlichen und von einer Fläche S begrenzten Körpers zu bestimmen, muss man demnach zwei Funktionen Ω und Ω' finden, die folgenden Bedingungen genügen:

1. Die Funktion Ω ist endlich und stetig im Innern der Fläche und genügt der Laplace'schen Gleichung $\Delta\Omega = 0$.

2. Die Funktion Ω' ist ausserhalb endlich und stetig, Null im Unendlichen und genügt ebenfalls der Laplace'schen Gleichung.

3. Die Funktionen Ω und Ω' sind an der Oberfläche einander gleich, und ihre Ableitungen genügen dann der Continuitätsgleichung (3).

Diese Funktionen stellen das Potential einer auf der Oberfläche des Körpers verteilten magnetischen Schicht dar. Die Dichte dieser Schicht ist in jedem Punkte durch die Aenderung der normalen Componenten bestimmt, nämlich durch

$$F'_n - F_n = 4\pi\sigma;$$

man findet hieraus

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(F'_n - F_n) = \frac{\mu - 1}{4\pi} F_n = kF_n.$$

381. Fall zweier verschiedener magnetischer Mittel. — Relative Magnetisirung. — Nehmen wir an, dass der Körper A, der von der Fläche S begrenzt ist, in einem magnetischen Mittel liegt, dessen Inductionscoefficient μ' ist, so giebt der Satz von der Erhaltung der Induction noch

$$\mu F_n = \mu' F'_n,$$

also

$$\mu \frac{\partial U}{\partial n} + \mu' \frac{\partial U'}{\partial n'} = 0,$$

oder

(4) $$\mu\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial \Omega}{\partial n}\right) + \mu'\left(\frac{\partial V}{\partial n'} + \frac{\partial \Omega'}{\partial n'}\right) = 0.$$

Die Funktionen Ω und Ω', welche die Oberflächenschicht bestimmen, sind durch dieselben Bedingungen wie oben bestimmt mit dem alleinigen Unterschiede, dass die Continuitätsgleichung (4) die Inductionscoefficienten der beiden Mittel enthält.

Die Flächendichte ist noch durch die Normalcomponenten gegeben

$$4\pi\sigma = F'_n - F_n = F_n\left(\frac{\mu}{\mu'} - 1\right).$$

Setzt man

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\mu'} = 1 + 4\pi k_1,$$

also

$$k_1 = \frac{\mu - \mu'}{4\pi\mu'} = \frac{k - k'}{1 + 4\pi k'},$$

so geht der Ausdruck für die Dichte über in

$$4\pi\sigma = F_n(\mu_1 - 1) \quad \text{oder} \quad \sigma = k_1 F_n.$$

Diese Oberflächenschicht bestimmt die Bewegung des Körpers A in dem Mittel. Und zwar erfolgt die Bewegung so, wie wenn das äussere Mittel unterdrückt oder genauer durch Luft und der Inductionscoefficient des Körpers durch einen andern Wert μ_1 oder der Coefficient der Magnetisirung k durch einen andern Wert k_1 ersetzt wird. Die scheinbare Magnetisirung I_1 des Körpers hätte dann als Normalprojection

$$I_1 \cos\theta = \sigma = \frac{1}{4\pi}(\mu_1 - 1)F_n = k_1 F_n.$$

382. — Die Discussion dieser Aufgabe liefert einige Folgerungen, die denen analog sind, die man aus dem Archimedischen Princip für die in Flüssigkeiten tauchenden Körper ableitet.

Denn man kann k_1 als den auf die Magnetisirung des Körpers bezüglichen Coefficienten für das denselben umgebende Mittel auffassen, während k und k' die Coefficienten der beiden Mittel gegen die Luft sind. Ist der Coefficient k des Körpers grösser als der Coefficient k' des Mittels, so ist der Wert von k_1 positiv, und die scheinbare Magnetisirung des Körpers ist positiv. Ist dagegen $k < k'$, so ist der Wert von k_1 negativ, und der Körper erscheint diamagnetisch. Wären die Coefficienten k und k' gleich, so würde

die Magnetisirung des Körpers A als Null erscheinen, da er dann in einem mit ihm selbst identischen Mittel läge, und da der inducirte Magnetismus nur an der Trennungsfläche verschiedener Medien hervortritt.

So gelangt man zu der Annahme, dass überhaupt kein qualitativer Gegensatz zwischen den magnetischen und den diamagnetischen Körpern besteht, und dass der Unterschied in den Wirkungen nur von der mehr oder weniger magnetischen Natur des äusseren Mittels herrührt. Da die diamagnetischen Körper ihre charakteristischen Eigenschaften auch im vollkommensten Vacuum zeigen, muss man von diesem Gesichtspunkte aus annehmen, dass das Vacuum ein magnetisches Mittel ist, und dass sein Magnetisirungscoefficient dem absoluten Werte nach grösser ist als der der bekannten diamagnetischen Körper.

Will man dagegen den Wert Null für den Magnetisirungscoefficienten im luftleeren Raume annehmen, so muss man denen aller diamagnetischen Körper einen negativen Wert beilegen. In diesem Falle ist der Coefficient μ der Induction grösser als Eins für die magnetischen Körper und kleiner als Eins für die diamagnetischen Körper. Man kennt übrigens keinen Körper, für den μ negativ ist, denn der Magnetisirungscoefficient der diamagnetischen Körper ist dem absoluten Werte nach niemals grösser als $\frac{1}{4\pi}$; wir haben bereits angeführt, dass für das Wismuth, den diamagnetischsten Körper, den man kennt, k ungefähr gleich $\frac{1}{400000}$ ist. Der Inductionscoefficient der diamagnetischen Körper ist demnach von der Einheit um eine äusserst kleine Grösse verschieden. Für das weiche Eisen ist der Wert von μ nahe an 500, da k zwischen 30 und 40 liegt; das Verhältnis der beiden absoluten Werte des k für Eisen und für Wismuth stehen demnach in dem Verhältnis von nahezu

$$40.400000 = 1{,}6.10^7 \text{ zu } 1.$$

Wir bemerken indessen, dass der Einfluss eines magnetischen Mittels nicht in voller Strenge mit der einer Flüssigkeit verglichen werden kann, und dass man das Archimedische Princip nur anwenden kann, wenn $k_1 = k - k'$ ist. Allerdings ist nach dem eben Angeführten diese Beziehung sehr nahe erfüllt für alle diamagnetischen Körper und für alle sehr schwach magnetischen Körper; aber dieselbe wäre sehr weit von der Wirklichkeit entfernt, wenn das umgebende Mittel einen der Einheit nahen Magnetisirungscoefficienten hätte und namentlich, wenn die magnetischen Eigenschaften mit denen des weichen Eisens vergleichbar wären.

383. Magnetische Aufnahmefähigkeit und Permeabilität. — Die Erscheinungen der magnetischen Induction können, wie man sieht, mittels zweier Coefficienten ausgedrückt werden.

Der *Coefficient der inducirten Magnetisirung* k drückt das Verhältnis der Intensität der Magnetisirung zur magnetischen Kraft oder in andern Worten die Intensität der Magnetisirung in einem der Einheit gleichen

Felde aus. Dieser Coefficient ist zuerst von Neumann angewandt und trägt oft dessen Namen. W. Thomson nennt denselben *Coefficient der magnetischen Aufnahmefähigkeit.*

Der zweite, mit μ bezeichnete Coefficient ist der *Coefficient der magnetischen Induction;* er ist das Analogon für die specifische inductive Capacität eines Dielektricums in der Elektricität. Derselbe ist gleich dem Verhältnisse der normalen Kraftcomponenten innerhalb und ausserhalb des betrachteten Mittels und mit dem vorigen Coefficienten verbunden durch die Beziehung

$$\mu = 1 + 4\pi k.$$

W. Thomson hat diesen Coefficienten μ den *Coefficienten der magnetischen Permeabilität* genannt. Mit folgenden Worten begründet er die Wahl dieses Ausdruckes.

„Die leitende Kraft eines festen Körpers für die Wärme oder kurz seine „Wärmeleitungsfähigkeit“ hat ihre Analoga: bei der elektrostatischen Induction in der „specifischen inductiven Capacität“ des Dielektricums; im Magnetismus nicht in dem, was früher als magnetische inductive Capacität bezeichnet worden ist — eine Grösse, die bei den diamagnetischen Körpern negativ ist — sondern in dem, was Faraday „leitende Kraft der Kraftlinien“ genannt hat; in der Hydrodynamik ist dies die Strömung durch die Flächeneinheit bei der Einheit der Intensität der Energie. Der gemeinsame Ausdruck *Durchlässigkeit (Permeabilität)* scheint geeignet, die wesentliche Eigentümlichkeit in den vier einander analogen Fällen auszudrücken. Bei Annahme dieses Ausdruckes erscheint die thermische Permeabilität synonym mit der thermischen Leitungsfähigkeit, die Permeabilität für die elektrischen Kraftlinien synonym mit der elektrostatischen inductiven Capacität eines Leiters, die magnetische Permeabilität synonym mit der leitenden Kraft für die magnetischen Kraftlinien, und die hydrodynamische Permeabilität ist die Bezeichnung für die specifische Eigentümlichkeit eines porösen festen Körpers, vermöge deren er, wenn er in eine bewegte reibungslose Flüssigkeit gebracht ist, den Strom beeinflusst.“ (Reprint of papers, § 628.)

384. Anisotrope Körper. — Wir haben bisher nur die Induction auf isotrope Körper betrachtet. Die Versuche von Plücker über Körper von fadenförmiger Structur und über Krystalle haben gezeigt, dass die magnetischen Wirkungen in den verschiedenen Richtungen auch in ungleicher Weise erfolgen können. Poisson hatte die Existenz derartiger Körper vorausgesehen, und es genügt, um dieselben in seine Theorie mit aufzunehmen, statt der leitenden Kugeln, die in dem nicht leitenden Mittel verstreut sind, gleiche Ellipsoide anzunehmen, die sämmtlich in der gleichen Richtung angeordnet sind. Wäre der Körper von dieser Constitution „eine homogene Kugel, und liesse man dieselbe ohne ihren Schwerpunkt zu verschieben und ohne etwas weder an den äussern Kräften noch an der Funktion V zu ändern rotiren, so würden sich die magnetischen Eigenschaften dieses Körpers nichts desto weniger der Grösse und Richtung nach ändern. Da dieser besondere

Fall sich in den Beobachtungen noch nicht gezeigt hat, wollen wir ihn vorläufig von unsern Untersuchungen ausschliessen . . ." (Mémoire sur la théorie du magnétisme, Mém. de l'Institut 1821—22, tome V, pag. 278.)

Aus den Gründen, die wir bereits in der Elektricitätslehre entwickelt haben (**215**), müssen in diesem Falle drei rechtwinklige Hauptmagnetisirungsachsen vorhanden sein. Bringt man der Reihe nach jede in die Richtung des Feldes, so erhält man zwischen den Coefficienten k, k', k'' der Aufnahmefähigkeit und den Coefficienten μ, μ', μ'' der Permeabilität die Beziehungen

$$\mu = 1 + 4\pi k, \quad \mu' = 1 + 4\pi k', \quad \mu'' = 1 + 4\pi k''.$$

Ist der Körper in beliebiger Weise gegen das Feld angeordnet, so kann man das thatsächlich vorhandene Feld ersetzen durch drei Felder, deren Richtungen gegen einander senkrecht und den Hauptachsen parallel sind, und die wirklich eintretende Magnetisirung als die Resultante der drei Magnetisirungen auffassen.

Diese Addition ist augenscheinlich immer dann berechtigt, wenn es sich um schwach magnetische oder diamagnetische Körper handelt; dieselbe ist nur eine Folge des Satzes von der Proportionalität zwischen der Magnetisirung und der magnetisirenden Kraft.

385. Gleichförmige Magnetisirung. — Ist die Oberfläche eines Körpers so beschaffen, dass eine gleichförmige Magnetisirung in einer bestimmten Richtung eine constante innere Kraft hervorruft, und bringt man denselben in ein gleichförmiges Feld, dessen Kraft dieser Richtung parallel ist, so erhält derselbe eine gleichförmige Magnetisirung, da die magnetisirende Kraft in allen Punkten denselben Wert hat, und zwar in der Weise, dass man keine Einschränkung über die Grösse des Coefficienten k zu machen braucht. Da die magnetisirende Kraft F die Summe aus der Intensität des Feldes und einer von der inducirten Magnetisirung herrührenden Kraft CI ist, die augenscheinlich der Intensität der Magnetisirung proportional ist, so erhält man

$$I = kF = k(\varphi + CI)$$

und folglich

$$I = \frac{k}{1 - kC}\varphi.$$

Da die innere Wirkung eines gleichförmig magnetisirten Körpers durch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des Gravitationspotentials P einer homogenen Masse gegeben ist (**354**), kann die Kraft CI nur constant sein, wenn die Funktion P durch ein Polynom zweiten Grades gegeben ist, wenn also der Körper von einer Fläche zweiten Grades begrenzt wird. Ist der Coefficient k sehr klein, wie dies bei allen diamagnetischen und bei den schwach magnetischen Körpern der Fall ist, so erhält man merklich

$$I = k\varphi.$$

In diesem Falle folgt die inducirte Magnetisirung in einem gleichförmigen Felde denselben Gesetzen wie die Induction der Dielektrica, so dass alle Resultate, zu denen wir in der Elektrostatik gelangt sind, auf den Magnetismus übertragen werden können, und zwar ohne jede andere Aenderung als die Einsetzung des magnetischen Potentials an Stelle des elektrischen und des magnetischen Inductionscoefficienten an Stelle der specifischen inductiven Capacität.

386. Kugel. — Für eine gleichmässig magnetisirte Kugel erhält man (355)

$$C = -\frac{4}{3}\pi.$$

Die auf einer Kugel von einem gleichförmigen Felde hervorgerufene Magnetisirung ist demnach

$$I = \frac{k}{1 + \frac{4}{3}\pi k}\varphi = \frac{3}{4\pi}\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\varphi = \frac{3}{4\pi}h\varphi.$$

Der Coefficient h oder $\frac{\mu - 1}{\mu + 2}$ ist Eins für die elektrischen Leiter; derselbe ist stets positiv und kleiner als 1 für die magnetischen Körper und ist wenig von 1 verschieden, wenn μ gross ist. Dieser Coefficient ist dagegen negativ und sehr klein für die diamagnetischen Körper.

Das magnetische Moment der Kugel hat den Betrag

$$\varpi = uI = hR^3\varphi.$$

Im Innern der Kugel ist die resultirende Kraft

$$F = \varphi - \frac{4}{3}\pi I = \varphi(1 - h) = \varphi\frac{3}{\mu + 2},$$

und die Induction ist dort

$$F_1 = F\mu = \varphi\frac{3\mu}{\mu + 2}.$$

Der erste dieser Ausdrücke stellt gleichfalls die gesammte äussere Kraft in einem Punkte in der Nähe des Aequators dar, und der zweite in einem dem Pole nahen Punkte. Das Verhältnis dieser beiden Kräfte ist demnach gleich $\frac{1}{\mu}$.

In dem Falle, wo μ sehr gross ist, vereinfachen sich die Formeln, und man erhält merklich

$$F = \frac{3}{\mu}\varphi,$$

$$F_1 = 3\varphi,$$

$$\varpi = R^3\varphi.$$

387. Hypothese von Poisson. — Stellt man sich mit Poisson vor, dass ein magnetischer Körper aus einem System kleiner Kugeln von einer unendlichen magnetischen Leitungsfähigkeit ($\mu = \infty$) besteht, die in einem unmagnetischen Mittel verstreut sind, so wird das Verhältnis des von allen Kugeln eingenommenen Raumes zu dem Gesammtvolumen ausgedrückt (**167**) durch

$$h = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Nimmt man für das Eisen den Wert $\mu = 500$ an, so ergiebt sich

$$h = 1 - \frac{3}{500} = 1 - \frac{1}{167}.$$

Aber der grösste Wert, den das Verhältnis h bei gleichen Kugeln erreichen kann, ist $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3,86}$. Man müsste demnach im vorliegenden Falle annehmen, dass die Kugeln ungleiche Volumina besitzen, und dass die Zwischenräume zwischen den grösseren von Kugeln von kleinerem Radius ausgefüllt werden. Nur scheint es dann schwierig anzunehmen, dass die benachbarten Kugeln nicht auf einander einwirken, und dass die Magnetisirung einer jeden, wie dies die Poisson'sche Theorie annimmt, allein durch das äussere Feld bestimmt werden kann.

388. Ellipsoid. — Cylinder. — Für ein gleichförmig in beliebiger Richtung magnetisirtes Ellipsoid sind die den Achsen parallelen Componenten der inneren Kraft beziehungsweise gleich $-AL$, $-BM$ und $-CN$ (**356**).

Für ein gleichförmiges Feld, in dem die Kraft φ mit den Achsen Winkel bildet, deren Cosinus λ, λ', λ'' sind, werden demnach die Componenten der Magnetisirung sein

$$A = \frac{k}{1 + kL}\varphi\lambda,$$

$$B = \frac{k}{1 + kM}\varphi\lambda',$$

$$C = \frac{k}{1 + kN}\varphi\lambda''.$$

Diese Gleichungen setzen voraus, dass die Magnetisirung so schwach ist, dass man die in den verschiedenen Richtungen hervorgerufenen Wirkungen addiren darf.

Ist eine der Achsen des Ellipsoides der Richtung des Feldes parallel, beispielsweise die xAchse, so ist

$$I = \frac{k}{1 + kL}\varphi,$$

und die Magnetisirung ist, wie gross auch k ist, gleichförmig.

Man kann vermöge der (**357**) angegebenen Resultate diesen Ausdruck auf verschiedene besondere Fälle anwenden.

Für einen unendlichen zur Richtung des Feldes senkrechten Kreiscylinder (**358**) erhält man so

$$I = \frac{k}{1 + 2\pi k}\varphi.$$

389. Barlow'sche Aufgabe. — Der Fall einer von zwei concentrischen Kugeln eingeschlossenen und in einem gleichförmigen Felde gelegenen dielektrischen Schale (**166**) entspricht dem einer magnetischen Schicht von derselben Form, die sich unter denselben Umständen befindet. Die Frage nach der magnetischen Verteilung in einer solchen Schale ist als *Barlow'sche Aufgabe* bekannt.

Es entstehen dann, wie wir dies bei der Elektricität gesehen haben (**165**), zwei magnetische Schichten, die eine M_1 auf der inneren Oberfläche S_1 (Fig. 85) und die andere M_2 auf der äusseren Oberfläche S_2 des betrachteten Volumens.

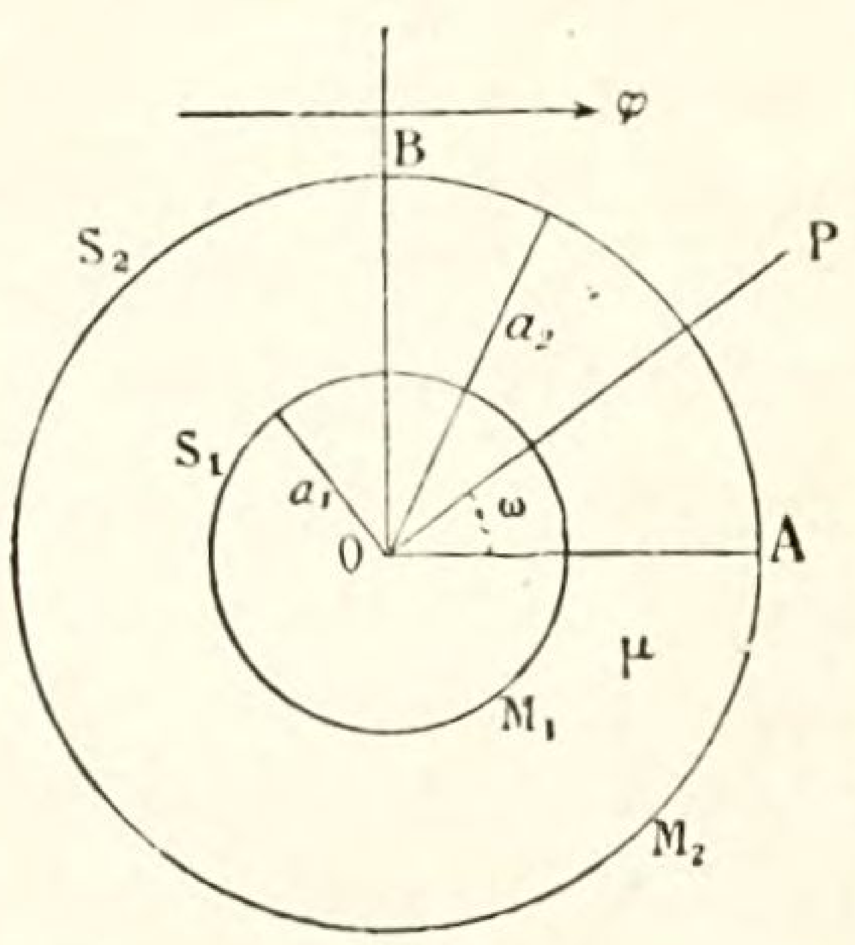


Fig. 85.

Die inneren Wirkungen F_1 und F_2 dieser beiden Schichten sind durch die Gleichungen bestimmt

$$\frac{F_1}{3(\mu - 1)} = \frac{-F_2}{(\mu - 1)[1 + 2\mu - 2(\mu - 1)\beta]} = \frac{\varphi}{9\mu + 2(\mu - 1)^2(1 - \beta)},$$

wo β das Verhältnis $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$ der Kuben der Radien bezeichnet.

Die Wirkung der beiden Schichten zusammen mit der der äusseren Kraft ist im Innern der kleinen Kugel S_1 constant und hat den Wert

$$F = \frac{\varphi}{1 + \frac{2(\mu - 1)^2}{9\mu}(1 - \beta)},$$

dieselbe ist aber weder in dem Raume der magnetischen Substanz noch ausserhalb constant.

Man erhält demnach für die Wirkung $\varphi - F$ der Schale allein im Innern

$$\frac{\varphi - F}{F} = \frac{2(\mu - 1)^2}{9\mu}(1-\beta) = \frac{8\pi k}{9\left(\frac{1}{4\pi k} + 1\right)}(1-\beta)$$

und wenn k sehr gross ist

$$\frac{\varphi - F}{F} = \frac{8}{9}\pi k(1-\beta).$$

Das äussere Potential der Schichten M_1 und M_2 in einem Abstande r vom Mittelpunkte und auf einem Radius, der mit der Kraft des Feldes den Winkel ω bildet, ist

$$V_a = -\frac{\cos\omega}{r^2}[F_1 a_1^3 + F_2 a_2^3] = -\frac{a_2^3\cos\omega}{r^2}[F_1\beta + F_2]$$

$$= \frac{a_2^3\cos\omega}{r^2}\,\frac{(\mu-1)(1+2\mu)(1-\beta)}{(1+2\mu)(\mu+2) - 2\beta(\mu-1)^2}\varphi = \frac{Aa_2^3\cos\omega}{r^2}\varphi,$$

wenn man setzt

$$A = \frac{(\mu-1)(1+2\mu)(1-\beta)}{(\mu+2)(1+2\mu) - 2\beta(\mu-1)^2}.$$

Man leitet hieraus für die Wirkung des inducirten Magnetismus in zwei im Abstande r auf der Linie OA und auf der Linie OB, d. h. auf dem Pole und dem Aequator gelegenen Punkten ab

$$X_p = 2\left(\frac{a_2}{r}\right)^3 A\varphi,$$

$$X_a = \left(\frac{a_2}{r}\right)^3 A\varphi.$$

390. — Für eine volle Kugel ist $\beta = 0$ und folglich

$$A_0 = \frac{(\mu-1)(1+2\mu)}{(1+2\mu)(\mu+2)} = \frac{\mu-1}{\mu+2} = h.$$

Das Verhältnis der auf denselben Punkt durch eine hohle und durch eine volle Kugel mit demselben äusseren Durchmesser ausgeübten Wirkungen ist demnach

$$\frac{A}{A_0} = \frac{(\mu+2)(1+2\mu)(1-\beta)}{(\mu+2)(1+2\mu) - 2\beta(\mu-1)^2} = \frac{1}{1 + \frac{9\mu}{(\mu+2)(1+2\mu)}\cdot\frac{\beta}{1-\beta}}.$$

Wendet man diese Formel auf das Eisen an, so ergiebt sich, wenn man $\mu = 500$ setzt,

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{1 + \frac{1}{112}\cdot\frac{\beta}{1-\beta}}.$$

Giebt man dem β verschiedene Werte, so findet man, dass, so lange die Dicke der Kugelschicht grösser als ein Fünftel des Radius ist, die magnetische Wirkung ausserhalb nicht mehr als 0,01 von der verschieden ist, welche eine Vollkugel von demselben Radius liefert.

Die alten Versuche von Barlow stimmen mit den Resultaten dieser Rechnung überein. Mit Kugeln von 10 Zoll äusserem Durchmesser hat Barlow keinen bemerkbaren Unterschied in den Wirkungen zweier Kugeln, einer vollen und einer hohlen, gefunden, wenn die letztere eine Dicke besass, die $\frac{2}{3}$ des Radius gleich war.

Dagegen war die Wirkung einer Hohlkugel nur $\frac{2}{3}$ von der einer Vollkugel, wenn die Dicke nur ungefähr $\frac{1}{30}$ Zoll betrug. Mit dem Werte $\mu = 500$ würde die Rechnung $\frac{1}{2}$ als Verhältnis der beiden Wirkungen ergeben.

391. — Wir haben (**386**) gesehen, dass die Gesammtwirkung in der Nähe einer Vollkugel nahe am Pole ist

$$F_p = \varphi \frac{3\mu}{\mu + 2},$$

und nahe am Aequator

$$F_a = \varphi \frac{3}{\mu + 2}.$$

Macht man auch hier $\mu = 500$, wie für das weiche Eisen, so ergiebt sich

$$F_p = 3\varphi \frac{1}{1 + \frac{2}{500}} = 3\varphi\left(1 - \frac{1}{250}\right),$$

$$F_a = 3\varphi \frac{1}{502} = 3\varphi \frac{1}{500}.$$

Die Kraft ist am Aequator nahezu Null, und nimmt am Pole einen Wert an, der drei Mal so gross ist, als die Kraft des Feldes.

Ist der Coefficient μ nahezu Eins, und setzt man

$$\mu = 1 + \alpha,$$

so erhält man ebenso

$$F_p = \varphi \frac{1 + \alpha}{1 + \frac{\alpha}{3}} = \varphi\left(1 + \frac{2\alpha}{3}\right),$$

$$F_a = \varphi \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{3}} = \varphi\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Innerhalb einer Hohlkugel ist die Kraft

$$F = \varphi \frac{1}{1 + \frac{2(\mu - 1)^2}{9\mu}(1 - \beta)}.$$

Für ein sehr grosses μ kann man setzen

$$F = \varphi \frac{1}{1 + \frac{2}{9}(\mu - 2)(1 - \beta)}.$$

Ist der Coefficient μ sehr nahe an Eins, und setzt man wiederum $\mu = 1 + \alpha$, so ergiebt sich

$$\frac{F}{\varphi} = \frac{1}{1 + \frac{2}{9}\alpha^2(1 - \beta)} = 1 - \frac{2}{9}\alpha^2(1 - \beta).$$

Eine in die Hohlkugel eingeführte kleine Magnetnadel verursacht allerdings eine neue inducirte Schicht, die sich zur ursprünglichen addirt, und deren Verteilung man leicht berechnen kann, da die Wirkung einer derartigen Nadel nach aussen mit der einer gleichförmig magnetisirten Kugel gleichwertig ist; aber die Wirkung dieser neuen Schicht ist stets der magnetischen Achse parallel und übt auf deren Richtung keinen Einfluss aus. Die Schwingungen dieser Nadel hängen demnach nur von der resultirenden Wirkung des äusseren Feldes und von den durch das Feld selbst inducirten Schichten ab.

392. Anisotrope Körper. — Wir fassen eine anisotrope Kugel in einem gleichförmigen Felde ins Auge. Sind k, k', k'' die drei Hauptcoefficienten der Magnetisirung und λ, λ', λ'' die Cosinus der Winkel der Intensität φ des Feldes gegen die Achsen, so haben, wenn die Magnetisirungscoefficienten als klein vorausgesetzt werden, die Intensitäten der drei partiellen Magnetisirungen die Werte

$$I = k\lambda\varphi,$$
$$I' = k'\lambda'\varphi,$$
$$I'' = k''\lambda''\varphi;$$

und die entsprechenden magnetischen Momente sind

$$m = uI = u\varphi k\lambda,$$
$$m' = uI' = u\varphi k'\lambda',$$
$$m'' = uI'' = u\varphi k''\lambda''.$$

Man leitet hieraus als resultirendes magnetisches Moment ab

$$M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 = u^2\varphi^2(k^2\lambda^2 + k'^2\lambda'^2 + k''^2\lambda''^2) = u^2\varphi^2 H^2.$$

Die resultirende magnetische Achse der Kugel bildet mit den Coordinatenachsen Winkel, deren Cosinus α, α', α'' durch die Gleichungen gegeben sind

$$\frac{\alpha}{k\lambda} = \frac{\alpha'}{k'\lambda'} = \frac{\alpha''}{k''\lambda''} = \frac{1}{H},$$

und diese Achse bildet mit der Richtung des Feldes einen Winkel θ, der durch die Beziehung bestimmt ist

$$\cos\theta = \alpha\lambda + \alpha'\lambda' + \alpha''\lambda'' = \frac{k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''\lambda''^2}{H}.$$

Bezeichnet man mit M' das Moment des von der Wirkung des Feldes an der Kugel hervorgerufenen Kräftepaares, so erhält man

$$M' = \varphi M \sin\theta,$$

oder wenn man M und θ durch ihre Werte ersetzt,

$$\begin{aligned} M'^2 &= \varphi^2 M^2 (1 - \cos^2\theta) = u^2\varphi^4 [H^2 - (k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''\lambda''^2)^2] \\ &= u^2\varphi^4 [(k^2\lambda^2 + k'^2\lambda'^2 + k''^2\lambda''^2)(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2) - (k^2\lambda^2 + k'^2\lambda'^2 + k''^2\lambda'')^2] \\ &= u^2\varphi^4 \left\{[\lambda'\lambda''(k' - k'')]^2 + [\lambda''\lambda(k'' - k)]^2 + [\lambda\lambda'(k - k')]^2\right\}. \end{aligned}$$

Die Kugel kann nur dann im Gleichgewichte sein, wenn das durch die Wirkung des Feldes hervorgerufene Kräftepaar Null ist; die drei eingeklammerten Quadrate müssen demnach einzeln Null sein. Da die Coefficienten k, k', k'' als verschieden vorausgesetzt sind, müssen, wenn Gleichgewicht bestehen soll, zwei der Cosinus λ, λ', λ'' der Null gleich sein und folglich muss eine der Hauptachsen der Magnetisirung mit der Richtung des Feldes zusammenfallen.

Die eben durchgeführte Rechnung gilt ebenso für einen homogenen Körper von beliebiger Form, der in einem gleichförmigen Felde liegt, da das magnetische Moment für die eine Hauptachse einfach dem Volumen des Körpers und der Kraftcomponente des Feldes proportional ist.

Ist das Feld veränderlich, so nimmt man das Volumen der betrachteten Substanz unendlich klein an; das Moment des Paares, welches dieselbe um ihren Schwerpunkt zu drehen sucht, behält seinen Wert als Funktion der Intensität in dem von dem Volumenelement eingenommenen Punkte bei.

393. Experimentelle Bestimmung der Magnetisirungscoefficienten. — Wird ein Cylinder parallel zur Achse gleichmässig magnetisirt, so hängt die Wirkung, die derselbe auf einen inneren Punkt ausübt, nur von den beiden Endschichten ab. Ist der Cylinder sehr lang, so kann diese Wirkung für alle Punkte, deren Abstand von den Enden gegen den Durchmesser gross ist, vernachlässigt werden; die resultirende Kraft wird dann lediglich von den äusseren Massen erzeugt. Ist das äussere Feld gleichförmig und der Achse parallel, so ist die Magnetisirung im grössten Teile des Cylinders gleichförmig und der Intensität des Feldes proportional. Nur in der Nähe der Endflächen ist die inducirte Magnetisirung etwas anders; die Oberflächen-

schicht ist nicht gleichförmig und auf die Endfläche beschränkt, sondern hat eine complicirtere Verteilung und breitet sich teilweise über die Seitenflächen aus.

Hiernach kann der Magnetisirungscoefficient einer Substanz definirt werden als der Quotient der Intensität der Magnetisirung, die ein unendlich dünner Cylinder aus dieser Substanz, der parallel zur Kraft in einem gleichförmigen Felde aufgestellt ist, erhält, durch die Kraft dieses Feldes, oder als die Magnetisirung, die derselbe in einem der Einheit gleichen Felde annimmt.

Ebenso ist der Coefficient der Magnetisirung eines anisotropen Mittels in einer bestimmten Richtung die longitudinale Magnetisirung, die ein unendlich dünner, dieser Richtung paralleler Cylinder in einem der Einheit gleichen Felde erhält.

394. Man sieht auch, dass man zur Bestimmung des Magnetisirungscoefficienten stark magnetischer Körper wie des Eisens die äussere Wirkung von Kugeln oder langgestreckten Körpern, die zum Felde senkrecht sind, nicht verwenden kann. Denn das Verhältnis der Magnetisirung zur Kraft ist beziehungsweise gleich

$$\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{4\pi k}},\quad \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4\pi k}},\quad \frac{2}{4\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{4\pi k}}$$

je nachdem der Körper eine Kugel, eine Platte oder ein sehr gestrecktes Rotationsellipsoid ist, und diese Verhältnisse unterscheiden sich zu wenig von den Näherungswerten, die man erhält, wenn man in ihnen k unendlich gross annimmt, als dass es möglich wäre, aus denselben den Wert des Coefficienten k mit einiger Genauigkeit abzuleiten.

Dagegen wird bei länglichen, den Kraftlinien parallelen Körpern die Magnetisirung merklich k proportional und von der Form des Körpers unabhängig.

395. Verschiebung der Körper in einem magnetischen Felde. — Anziehungen und Abstossungen. — Die potentielle Energie einer dielektrischen unendlich kleinen Kugel (**178**) in einem Felde ist

$$W = -\frac{uK}{2}\varphi^2 = -u\frac{3h}{4\pi}\frac{\varphi^2}{2}.$$

Dieser Ausdruck giebt auch die Energie einer unendlich kleinen magnetischen Kugel an und auch die eines beliebigen Volumenelementes einer homogenen und isotropen Substanz, deren positiver oder negativer Magnetisirungscoefficient sehr klein ist; man erhält dann

$$\frac{3h}{4\pi} = k \quad \text{und} \quad W = -uk\frac{\varphi^2}{2}.$$

Für eine sehr kleine Verschiebung ist die Energieänderung

$$dW' = -\frac{uk}{2} d(\varphi^2).$$

Ist der Körper magnetisch, der Coefficient k also positiv, so wird die Energie kleiner, wenn der Körper sich Punkten nähert, in denen der absolute Wert der Kraft ein Maximum ist. Ein sehr kleiner magnetischer Körper sucht also in einem veränderlichen magnetischen Felde sich nach den Punkten hin zu bewegen, in denen die Kraft ein Maximum ist. Da ein absolutes Kraftmaximum ausserhalb der wirkenden Massen nicht vorhanden ist (**180**), so folgt, dass der Körper, sich selbst überlassen, schliesslich an die Oberfläche der Magnete gelangt; er wird demnach von den Magneten *angezogen*.

Für die diamagnetischen Substanzen ist der Coefficient k negativ. Ein kleiner diamagnetischer Körper bewegt sich also nach den Punkten hin, in denen die Kraft ein Minimum ist; er sucht sich immer weiter von den Kraftcentren zu entfernen, er wird demnach von den Magneten *abgestossen*.

Da das Feld Punkte enthalten kann, in denen die Kraft Null ist, die also absolute Minima für den Wert von φ^2 sind, so sieht man, dass dort für einen diamagnetischen Körper in einem veränderlichen Felde stabiles Gleichgewicht herrschen kann, und zwar ausserhalb der wirkenden Massen.

Faraday hatte bereits als Versuchsresultat das Gesetz ausgesprochen, *dass die magnetischen Körper sich nach den Punkten hin bewegen, in denen die Kraft ein Maximum ist, und die diamagnetischen nach den Punkten hin, in denen die Kraft ein Minimum ist.* Die erschöpfende Deutung der Erscheinung rührt von W. Thomson her.

In einem gleichförmigen magnetischen Felde ist die Energie eines isotropen, sowohl eines magnetischen als eines diamagnetischen Körpers constant, und folglich ist die Kraft daselbst Null.

396. — Für einen magnetischen anisotropen Körper ist die Gesammtenergie die Summe der Energieen, die den magnetischen Momenten $u\varphi k\lambda$ $u\varphi k'\lambda'$, $u\varphi k''\lambda''$ entsprechen, die von den zu den drei Achsen parallelen Kraftcomponenten $\varphi\lambda$, $\varphi\lambda'$, $\varphi\lambda''$ herrühren; man erhält demnach

$$W = -\frac{u\varphi^2}{2}(k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''\lambda''^2).$$

Wird dem Körper nur gestattet, sich um seinen Schwerpunkt zu drehen, so entspricht das stabile Gleichgewicht dem Falle, wo die Energie ein Minimum ist, also dem Falle, wo der in Klammern geschlossene Faktor ein Maximum ist.

Da für das Gleichgewicht überhaupt die notwendige Bedingung die ist, dass zwei von den Cosinus λ, λ' und λ'' Null sind, so kann dieses Maximum nur eintreten, wenn die Klammer sich auf das Glied beschränkt, welches dem grössten unter den Coefficienten k, k', k'' entspricht. Dann ist die Achse der grössten Magnetisirung der Kraft des Feldes parallel.

Geht der Körper von einem Punkte, für den die Kraft und die Richtung des Feldes durch $\varphi_1, \lambda_1, \lambda_1', \lambda_1''$ gegeben sind, in eine andere Lage über, für welche die Werte derselben Grössen $\varphi_2, \lambda_2, \lambda_2', \lambda_2''$ sind, so ist die Aenderung der Energie

$$W_2 - W_1 = -\frac{u}{2}\left\{\varphi_2^2\,[k\lambda_2^2 + k'\lambda_2'^2 + k''\lambda_2''^2] - \varphi_1^2\,[k\lambda_1^2 + k'\lambda_1'^2 + k''\lambda_1''^2]\right\}.$$

Diese Aenderung ist negativ, und die Verschiebung sucht unter dem ausschliesslichen Einfluss der magnetischen Kräfte zu erfolgen, wenn die Klammer positiv ist.

Wird der Körper gezwungen, sich parallel mit sich selbst zu verschieben, so wird der letzte Ausdruck

$$W_2 - W_1 = -\frac{u}{2}\,[k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''\lambda''^2]\,(\varphi_2^2 - \varphi_1^2).$$

Man sieht, dass der Körper unter allen Umständen die Tendenz hat, sich nach den Punkten hin zu bewegen, in denen die Kraft ein Maximum ist. Diese Tendenz ist um so mehr ausgeprägt, je grösser der zweite Faktor ist; dieselbe ist ein Maximum, wenn die Hauptachse der stärksten Magnetisirung dem Felde parallel ist, ein Minimum, wenn sie gegen dieselbe senkrecht ist.

397. — Ist der Körper diamagnetisch, so sind die Werte von k, k', k'' negativ, und man gelangt zu Schlüssen, die den eben besprochenen entgegengesetzt sind. Das stabile Gleichgewicht tritt in einem gleichförmigen Felde ein, wenn die Achse der schwächsten Magnetisirung der Richtung des Feldes parallel ist. In einem ungleichmässigen Felde sucht der Körper sich in Richtung der abnehmenden Kraft zu verschieben, und die Wirkung ist ein Maximum, wenn die Achse der schwächsten Magnetisirung den Kraftlinien parallel ist. Diese beiden Umstände können einander entgegenwirken und verschiedene Wirkungen hervorrufen, je nachdem der eine oder der andere vorherrscht. So kann man viele Versuche erklären, die lange als widersprechend oder paradox erschienen sind.

Die Resultate wären noch complicirter für Körper, deren Hauptmagnetisirungscoefficienten nicht alle drei dasselbe Zeichen besässen.

Derartige Körper wären unter gewissen Bedingungen magnetisch, unter andern diamagnetisch. Man kennt kein Beispiel hierfür; aber der Fall könnte künstlich hergestellt werden, indem man in ein ungleichförmiges Feld eine krystallische magnetische Kugel bringt und dieselbe mit einer gleichfalls magnetischen Flüssigkeit umgiebt, deren Magnetisirungscoefficient zwischen dem grössten und dem kleinsten Magnetisirungscoefficienten der Kugel liegt. Die Kugel ist dann magnetisch in Richtung der grössten Magnetisirungsachse und diamagnetisch in Richtung der kleinsten; dieselbe würde sich in Richtung der wachsenden Kräfte einstellen, wenn die erste dieser Achsen dem Felde parallel ist, entgegengesetzt, wenn es die zweite ist. Diese

Wirkungen sind übrigens so schwach, dass es zweifellos mit grossen Schwierigkeiten verknüpft wäre, dieselben zur Erscheinung zu bringen.

398. Gleichgewicht länglicher Massen in einem gleichförmigen Felde. — Wir haben in der Elektrostatik (**185**) gesehen, dass, wenn ein länglicher leitender Cylinder sich in einem gleichförmigen Felde im Gleichgewicht befindet, wenn die Achse des Cylinders senkrecht oder parallel der Kraft des Feldes ist, dieses Gleichgewicht im ersten Falle labil, im zweiten stabil ist.

Es muss sich ebenso mit einem länglichen Cylinder von weichem Eisen verhalten, der sich in einem gleichförmigen magnetischen Felde befindet, da die Magnetisirung einer Kugel von weichem Eisen ein der Einheit sehr naher Bruch, $h = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}$, der Elektrisation ist, die diese Kugel in einem elektrischen Felde erhalten würde, in dem die Kräfte dieselben absoluten Werte besitzen.

Man weiss in der That seit Gilbert, dass eine Nadel von weichem Eisen, die um eine verticale Achse drehbar ist, im magnetischen Meridian ins Gleichgewicht kommt, und dass dieselbe, wenn sie um ihren Schwerpunkt beweglich ist, die Richtung der Inclinationsnadel annimmt.

Es reicht immerhin zur Erklärung dieses Versuches nicht aus zu sagen, dass das weiche Eisen in jedem Punkte parallel zur Kraft des Feldes magnetisch wird, denn dann müsste die Nadel in allen Lagen im Gleichgewichte sein; die Magnetisirung der Masse muss demnach eine ungleichförmige sein.

Das Paar, welches auf die Nadel einwirkt, wenn dieselbe gegen die Kraft des Feldes schräg steht, rührt davon her, dass die Wirkungen der verschiedenen Partikel auf einander die Magnetisirung geändert haben; die dem Felde parallele Richtung ist die, welche infolge dieser Wirkungen dem Maximum der Magnetisirung entspricht.

399. — Zum Beweise fassen wir eine Reihe von Kugeln aus weichem Eisen ins Auge, $B, B', B'' \ldots$, die auf einer nicht magnetischen Achse befestigt in ein gleichförmiges Feld gebracht sind: α sei der Winkel der Achse gegen die Richtung des Feldes.

Sind die Kugeln genügend weit von einander entfernt, so dass sie nicht auf einander wirken, so ist die Magnetisirung einer jeden dem Felde parallel, und die resultirende Wirkung ist Null. Wenn aber der Abstand der Kugeln gegen ihre Dimensionen nicht sehr gross ist, so wird, wie man leicht einsieht, die Magnetisirung einer jeden durch ihre gegenseitigen Einwirkungen grösser, und dieselbe erfolgt in Richtungen, die mit der Achse Winkel ω, $\omega' \ldots$ bilden, die kleiner sind als α und sich von einer Kugel zur andern ändern. Die einzelnen Kugeln sind nicht mehr im Gleichgewicht, dieselben werden vielmehr von einem Kräftepaare angegriffen, und die Gesammtheit dieser Kräftepaare sucht die gemeinsame Achse in die Richtung des Feldes zu bringen. In dieser Lage ist die Magnetisirung ein Maximum.

Ist dagegen die Achse senkrecht zur Richtung des Feldes, so suchen die gegenseitigen Einwirkungen die Magnetisirung der einzelnen isolirten

Kugeln zu schwächen; es besteht labiles Gleichgewicht, und die Magnetisirung der Gesammtheit der Kugeln ist ein Minimum.

Demnach beweist das Vorhandensein einer Lage stabilen Gleichgewichts für eine magnetische Nadel in einem magnetischen Felde die Existenz von Wirkungen zwischen den verschiedenen magnetischen Elementen, aus denen dieselbe besteht; es steht demnach im Widerspruch mit der Poisson'schen Hypothese über die Constitution der magnetischen Körper, welche annimmt, dass diese Wirkungen nicht vorhanden sind.

400. — Die Folgerungen wären für das Gleichgewicht eines diamagnetischen Körpers ungefähr dieselben, obwohl die Reaktionen in entgegengesetzter Richtung wirken.

Denn die Magnetisirung ist in diesem Falle der magnetisirenden Kraft entgegengesetzt gerichtet. Eine Kugelreihe B, B', B''..., die auf einer zum Felde senkrechten Geraden angeordnet ist, wird in einer der Richtung des Feldes entgegengesetzten Richtung magnetisch; die gegenseitigen Einwirkungen vergrössern demnach die magnetisirende Kraft auf jeder einzelnen Kugel. Diese Richtung entspricht dann einem Maximum der Magnetisirung und einem Gleichgewichtszustande.

Wir nehmen nunmehr an, dass die Linie der Kugeln mit der Richtung des Feldes einen Winkel α einschliesst; da die Richtung der Magnetisirung eine entgegengesetzte ist, und da jeder Pol in dem nächstgelegenen Teile einer andern Kugel einen gleichnamigen Pol hervorzurufen sucht, so verkleinern diese Wirkungen die magnetisirende Kraft und ändern die Richtung derselben. Die Wirkung tritt um so deutlicher ein, je kleiner der Winkel α ist. Die Paare, welche auf die Kugeln wirken, suchen auch jetzt der Achse eine Richtung zu geben, die dem Felde parallel ist. Die Magnetisirung ist dann ein Minimum.

So muss auch eine diamagnetische Nadel in einem gleichförmigen Felde, um im stabilen Gleichgewichte zu sein, eine Richtung annehmen, die der des Feldes parallel ist.

Jedoch ist der Coefficient der Magnetisirung für die diamagnetischen Körper so klein, dass die Reaktionen der Partikel unberücksichtigt bleiben können, und dass die Wirkung derselben jedem Mittel der Beobachtung entgehen müssen.

In Wirklichkeit ist jede diamagnetische Nadel, wenn sie nicht krystallisch ist, in einem gleichförmigen magnetischen Felde im indifferenten Gleichgewicht; in allen Versuchen, in denen man Richterscheinungen findet, rührt die Wirkung von den *magneto-krystallischen* Eigenschaften (**397**) des beobachteten Körpers her.

401. Gleichgewicht der Körper in einem ungleichmässigen Felde. — In einem ungleichmässigen Felde sind die Erscheinungen verwickelter.

Die diamagnetischen Körper folgen einfach dem Faraday'schen Gesetze, jedes Volumenelement sucht sich nämlich nach den Punkten hin zu bewegen,

in denen die Kraft ein Minimum ist, und die Bewegung des ganzen Systems wird durch diese Tendenz der einzelnen Elemente bestimmt.

Wir nehmen zum Beispiel an, dass das Feld durch zwei entgegengesetzte Pole A und A' zweier identischer Magnete oder durch die beiden Pole eines Hufeisenmagnets hervorgerufen ist, oder wir fassen einfacher das Feld zweier entgegengesetzt gleicher Massen (Fig. 34) ins Auge.

Im Mittelpunkte O der Figur, in gleichem Abstande von den beiden Magneten, hat die Kraft ihren kleinsten Wert für die Verbindungslinie AA' und ihren grössten Wert für eine zu dieser senkrechte Richtung Oy. Eine kleine isotrope magnetische Kugel, die sich nur längs der Linie Oy bewegen kann, bewegt sich nach dem Punkte O hin, wo dieselbe sich in stabilem Gleichgewichte befindet; eine diamagnetische Kugel befände sich unter denselben Umständen im Punkte O in labilem Gleichgewichte, und hätte die Tendenz sich von demselben ins Unendliche zu entfernen. Wäre dieselbe Kugel vollkommen frei und befände sie sich auf der Geraden Oy in kleiner Entfernung vom Punkte O, so würde sie sich von diesem Punkte auf der Geraden Oy, also *senkrecht zu den Kraftlinien* entfernen, da dies die Richtung ist, in der die Kraft sich am schnellsten ändert.

402. — Eine längliche magnetische Nadel, die um den Punkt O beweglich ist, stellt sich parallel der Pollinie in stabiles Gleichgewicht, da sich jedes einzelne Volumenelement nach den Punkten hin bewegt, in denen die Kraft ein Maximum ist.

Für eine diamagnetische Nadel dagegen entspricht die Lage des stabilen Gleichgewichts der zur Verbindungslinie der Pole senkrechten Richtung.

Die Nadeln stellen sich also *parallel* oder *transversal* zur Verbindungslinie zweier ungleichnamiger Pole, je nachdem der Magnetisirungscoefficient positiv oder negativ ist. Daher rührt die von Faraday den Körpern, die der ersten bez. der zweiten Gruppe angehören, beigelegte Bezeichnung als *paramagnetische* bez. als *diamagnetische*.

403. — Wir haben eben gesehen, dass auch in einem gleichförmigen Felde eine magnetische Nadel sich den Kraftlinien parallel stellt, und dass andererseits die verschiedenen Elemente sich nach den Punkten hin zu bewegen suchen, wo die Kraft ein Maximum ist.

Haben diese beiden Arten von Wirkungen dieselbe Richtung, wie in dem eben besprochenen Falle, so kann man die Gleichgewichtslage leicht bestimmen; aber es kann vorkommen, dass die Tendenz jedes einzelnen Elementes, sich nach den Kraftmaxima hin zu bewegen, zur Folge hat, das System in eine Richtung zu bringen, die den Kraftlinien nicht parallel ist. Dann hängt die Gleichgewichtslage von den Bedingungen des Versuchs ab. Wir denken uns zum Beispiel eine Reihe von identischen Nadeln von weichem Eisen, die in gleichen Abständen von einander auf einem nicht magnetischen Stab normal zu demselben angebracht sind, und bringen dieses System zwischen die entgegengesetzten Pole zweier Magnete. Sind die Nadeln weit von einander entfernt, so sucht sich jede einzelne den Kraftlinien parallel

zu stellen, und das ganze System befindet sich senkrecht zu der Verbindungslinie der Pole im Gleichgewichte. Nähert man dagegen die Nadeln immer mehr einander, und bringt man deren so viele an, dass sie sich fast bis zur Berührung nahe kommen, so tritt der Moment ein, wo die Tendenz jeder einzelnen sich nach den Maximumspunkten der Kraft zu bewegen vorherrschend wird, und das ganze System stellt sich dann parallel den Kraftlinien ein, also längs der Verbindungslinie der Pole.

Man sieht ein, dass alle Zwischenlagen eintreten können, und dass für ein gegebenes magnetisches System die parallele oder transversale Gleichgewichtsrichtung von dem Veränderungsgesetze des Feldes, in dem sich dasselbe befindet, abhängt.

404. Schwingungen einer unendlich kleinen isotropen Nadel. — Die Aufgabe ist mit der identisch, die oben (**183, 184**) für die Dielektrica behandelt worden ist.

Ist insbesondere das System gegen den Mittelpunkt der Nadel symmetrisch, so ist die Schwingungsdauer durch die Formel gegeben

$$t^2 = \pi^2 \frac{\rho}{K} \frac{1}{A + B}$$

und von der Länge der Nadel unabhängig. Diese letztere Thatsache ist experimentell von Matteucci für nicht krystallische Wismuthnadeln gefunden worden; die Erklärung derselben ist von W. Thomson gegeben.

Im vorliegenden Falle wird der Coefficient

$$K = \frac{k}{1 + \frac{4}{3}\pi k}$$

für grosse Werte von k merklich constant und für kleine Werte von k gleich k. Die Methode der Schwingungen in einem symmetrischen Felde kann zur Bestimmung des Magnetisirungscoefficienten demnach für stark magnetische Körper, wie für das Eisen, nicht verwendet werden; dagegen ist dieselbe für den Fall schwach magnetischer oder diamagnetischer Körper sehr wohl geeignet.

Aendert sich das Feld in beliebiger Weise, so liefert die Methode der Schwingungen selbst für Körper mit kleinem Coefficient schwerlich gute Bestimmungen für den Wert von k. Die Gleichgewichtslage der Nadel hängt dann, wie wir gesehen haben, von dem Gesetze der Veränderlichkeit des Feldes und von der Länge der Nadel ab; ebenso verhält es sich mit der Schwingungsdauer.

405. Einfluss der Temperatur. — Die Temperatur übt einen wohl ausgeprägten Einfluss auf den Wert des Coefficienten k aus; indessen herrscht noch viel Unsicherheit über die Gesetze dieser Wirkungen der Temperatur.

Die am längsten bekannte und am besten bestimmte Thatsache ist in dieser Beziehung die, dass weiches Eisen in der Rotglut fast vollkommen

seine magnetischen Eigenschaften verliert. Dasselbe zeigt sich für Nickel von 300° ab; es tritt dagegen für das Kobalt erst in der Nähe der Schmelztemperatur des Kupfers ein.

Zieht man nur Temperaturen zwischen — 20° und 150° in Betracht, so findet man, dass die Inductionskraft des Eisens merklich constant bleibt, obwohl man zu der Anschauung gelangen kann, dass dieselbe zunächst wächst und durch ein Maximum geht, dass die des Nickels continuirlich abnimmt, die des Kobalts endlich constant wächst. Die Existenz eines Maximums in der Nähe der Rotglut ist für dieses letzte Metall sicher.

Die Wärme wirkt auch auf die krystallischen, magnetischen und diamagnetischen Körper, nicht blos in der Weise, dass sie die Coefficienten verkleinert, sondern auch so, dass sie die magneto-krystallischen Eigenschaften, die ja hauptsächlich von der Verschiedenheit der Coefficienten in verschiedenen Richtungen herrühren, schwächt. Für das Wismuth verkleinert sich der Unterschied der Coefficienten zwischen 30° und 140° um die Hälfte, und für Eisencarbonat zwischen denselben Temperaturgrenzen um zwei Drittel.

5. Capitel.

Die Magnete.

406. Magnetisirung. — Um einen mit Coercitivkraft behafteten Körper, einen Stahlstab zum Beispiel, zu magnetisiren, kann man denselben in ein constantes Feld bringen oder die verschiedenen Punkte desselben nach einander der Wirkung eines variabeln Feldes aussetzen, das man etwa dadurch erhält, dass man den Stab mit einem Magnet streicht.

Dieses letztere Verfahren ist das am längsten und häufigsten angewandte. Jeder Punkt des Stabes erhält in jedem Augenblicke eine Magnetisirung, die von der bereits erhaltenen Magnetisirung, von der vorhandenen resultirenden Kraft, und bis zu einem gewissen Grade von der Zeit abhängt, während welcher dieselbe wirkt.

Welche Methode man dabei auch anwenden mag, ein Teil des entwickelten Magnetismus ist *temporär* und verschwindet mit den äusseren Kräften. Ein anderer Teil ist *dauernd* oder *remanent*, und alle Versuche zeigen, dass diese beiden Arten der Magnetisirung eine Maximumsgrenze haben.

Für das Eisen ist die temporäre Magnetisirung grösser und die remanente Magnetisirung kleiner als für Stahl; aber beide Magnetisirungsarten haben ein Maximum, welches allein von der Beschaffenheit der Substanz abhängt. In dem Falle sehr schwacher Kräfte erscheint die Magnetisirung ebenso für den Stahl wie für das Eisen rein temporär.

Die allgemeine Aufgabe über die Magnetisirung besteht demnach darin, für einen Körper von gegebener Form und Natur, der bekannten Kräften ausgesetzt ist, zu bestimmen, welches in jedem Punkte die temporäre, und welches nach Unterdrückung der äusseren Kräfte die remanente Magnetisirung ist. Diese Aufgabe ist theoretisch nur in einer kleinen Anzahl von Fällen gelöst worden.

407. Induction des Magnets auf sich selbst. — Entmagnetisirende Kraft. — Der endgiltig vorhandene Magnetismus eines Magnets muss als aus zwei Teilen bestehend betrachtet werden, der eine, den man *starren Magnetismus* nennen kann, rührt von den durch die Coercitivkraft fest-

gehaltenen magnetischen Massen her, der andere, der den *inducirten Magnetismus* ausmacht, resultirt aus der Induction der ersten Masse auf den magnetischen Körper.

Die innere Wirkung des inducirten Magnetismus ist augenscheinlich der Kraft, welche ihn hervorruft, entgegengesetzt; es folgt hieraus, dass die Induction eines Magnets auf sich selbst stets die Magnetisirung zu verkleinern sucht und als *entmagnetisirende Kraft* wirkt.

Der *scheinbare* Magnetismus, dessen Wirkungen wir beobachten, rührt von der Summirung dieser beiden Magnetismen her. Auch die Bestimmung der Intensität und der Verteilung des scheinbaren Magnetismus bietet im Allgemeinen grosse Schwierigkeiten.

Die Aufgabe vereinfacht sich, wenn die entmagnetisirende Kraft in jedem Punkte dem starren Magnetismus, der in diesem Punkte vorhanden ist, proportional ist; das Gesetz der Verteilung ist dann dasselbe, wie wenn die Nebenwirkung der Induction nicht vorhanden wäre.

Insbesondere ist in dem Falle, dass der starre Magnetismus gleichförmig ist, der scheinbare Magnetismus ebenfalls gleichförmig, wenn die inducirende Nebenwirkung im Innern des Magnets constant ist.

Diese Bedingung ist, wie wir oben gesehen haben, für eine gleichförmig magnetisirte Kugel realisirt; dieser Fall tritt ebenso für ein Ellipsoid ein, dessen gleichförmige Magnetisirung einer Achse parallel ist, und für einen geraden unendlichen Kreiscylinder, der senkrecht zur Achse magnetisirt ist.

408. — Wir betrachten zunächst eine Kugel. Bezeichnen wir mit I die starre Magnetisirung, mit I' die inducirte und mit I_1 die scheinbare Magnetisirung, so ist die entmagnetisirende Kraft (**355**) gleich $\frac{4}{3}\pi I_1$, und man erhält

$$I' = kF_1 = k\frac{4}{3}\pi I_1 = k\frac{4}{3}\pi(I - I').$$

Man findet hieraus

$$(1) \qquad I' = I\frac{1}{1+\frac{3}{4\pi k}} = I_1\frac{4}{3}\pi k$$

Für ein zu einer Achse parallel magnetisirtes Ellipsoid hat die entmagnetisirende Kraft den Wert $I_1 L$, $I_1 M$ oder $I_1 N$, je nach der Achse, um die es sich handelt (**356**). Dieselbe ist $4\pi I_1$ oder $\pi^2\sqrt{1-e^2}\,I_1$ für eine Platte, je nachdem dieselbe transversal oder einem Durchmesser parallel (**358**) magnetisirt ist. Für ein gestrecktes Rotationsellipsoid ist dieselbe $2\pi I_1$, wenn die Magnetisirung transversal ist, und $4\pi I_1\frac{b^2}{a^2}\left(l_n\frac{2a}{b}-1\right)$, wenn die Magnetisirung longitudinal ist (**358**).

Dieser letztere Ausdruck nähert sich der Null, wenn das Verhältnis $\frac{b}{a}$ immer kleiner wird. Die entmagnetisirende Kraft wäre für einen langen Cylinder noch kleiner (**373**).

Die Form dünner Platten oder sehr gestreckter Cylinder eignet sich demnach am besten für permanente Magnete, da die entmagnetisirende Kraft dann möglichst schwach ist. Diese Formen werden auch in der Praxis gewählt. Die Erfahrung zeigt ausserdem, dass der Einfluss der Härtung dann viel geringer ist als in dem Falle dicker, kurzer Magnete. Schon Coulomb hat gefunden, dass bei einem Stahldraht die Härtung nur einen kaum bemerkbaren Einfluss auf die magnetische Starrheit besitzt.

409. Specielle Fälle der Magnetisirung — Kugel. — Aus der eben gemachten Auseinandersetzung folgt, dass eine homogene, isotrope Vollkugel aus Stahl, die in ein gleichförmiges magnetisches Feld gebracht wird, eine gleichförmige temporäre Magnetisirung empfängt, und dann eine gleichförmige remanente Magnetisirung dauernd behält.

Die temporäre Magnetisirung wird gegeben durch einen Ausdruck von der Form

$$I = \frac{k}{1 + \frac{4}{3}\pi k} F, \tag{2}$$

in dem der Coefficient k nicht mehr als constante Grösse, sondern als Funktion der Intensität F des thatsächlich bestehenden Feldes aufgefasst werden muss; der Bruch, mit dem man die Kraft F multipliciren muss, um die Magnetisirung I zu erhalten, wird immer mehr F umgekehrt proportional, also gleich $\frac{I_0}{F}$, je mehr F zunimmt, da die Magnetisirung einem Maximum I_0 zustrebt.

Ebenso ist die remanente Magnetisirung ein Bruchteil der temporären Magnetisirung, und zwar ein veränderlicher Bruchteil, der sich einem Grenzwerte $\frac{1}{m}$ nähert, da die remanente Magnetisirung ein Maximum besitzt; diese ist dann ein Bruchteil $\frac{I_0}{m}$ des Maximums der temporären Magnetisirung.

In allen Fällen ist das Verteilungsgesetz dasselbe; die Dichte in jedem Punkte ist gleich der Normalprojection der Magnetisirung auf den der Magnetisirung parallelen Durchmesser, also der vom Mittelpunkte aus gezählten Abscisse des Punktes proportional. Die lineare Dichte längs derselben Achse ist ebenfalls der Abscisse proportional. Das Moment der Kugel ist uI_1, die Gesammtmasse jeder einzelnen Schicht ist $\frac{3}{4}\frac{uI_1}{a}$, der Abstand der Pole $\frac{4a}{3}$, und jeder Pol ist vom Mittelpunkte um $\frac{2}{3}$ des Radius entfernt.

410. Ellipsoid. — Ebenso verhält es sich mit einem homogenen, isotropen Ellipsoide, dessen eine Achse während der Magnetisirung mit der Richtung des gleichförmigen Feldes zusammenfiel; man muss nur den Faktor $\frac{4}{3}\pi$ durch einen Coefficienten L ersetzen, der von der Form des Ellipsoides abhängt (**357**).

Das Magnetisirungsmaximum I_0 und der Bruch $\frac{1}{m}$, welcher das Maximum der remanenten Magnetisirung bestimmt, haben Werte, die mit den für die Kugel giltigen durch Beziehungen verknüpft sind, die von der Form des Ellipsoides abhängen.

Das Verteilungsgesetz ist auch in diesem Falle bekannt, und die Pole liegen in einem Abstande vom Mittelpunkte, welcher gleich $\frac{2}{3}$ der der Magnetisirung parallelen Halbachse ist.

Man kann ebenso einen gleichförmigen Magnet erhalten aus einer senkrecht zu einer Ebene oder parallel zu einem Durchmesser magnetisirten Platte (**358**).

411. Ring. — Ein leicht experimentell zu verwirklichender Fall ist der eines von einer geschlossenen Kanalfläche begrenzten Körpers, zum Beispiel eines Ringes, in dem die Magnetisirung in jedem Punkte der Achse parallel ist. Der Magnet kann dann als aus einfachen Solenoiden bestehend aufgefasst werden, die der Achse parallel und in sich geschlossen sind; die Aussenwirkung des Systems ist stets genau Null (**371**).

412. Cylinder. — Man kann noch zu den bereits angeführten Beispielen, die Körpern mit begrenztem Rauminhalt entsprechen und in aller Strenge realisirt werden können, das eines unendlichen homogenen und isotropen Kreiscylinders hinzufügen, welcher in einem gleichförmigen zur Achse senkrechten Felde liegt; die Magnetisirung wird dann durch den Ausdruck dargestellt

$$I = \frac{k}{1 + 2\pi k} F.$$

Die eben untersuchten Fälle scheinen die einzigen zu sein, für die man theoretisch die Verteilung des Magnetismus bestimmen kann, wenigstens wenn der Coefficient k nicht von der magnetisirenden Kraft unabhängig ist.

413. Beliebige Magnete. — Experimentelle Methoden. — Für beliebig geformte Körper kann die Aufgabe über die Magnetisirung nur experimentell durch Untersuchung der äusseren Wirkungen in Angriff genommen werden; aber wir haben schon darauf aufmerksam gemacht, dass die Kenntnis des äusseren Feldes eines Magnets nichts über die Verteilung des Magnetismus im Innern kennen lehren kann, dieselbe würde nur die Bestimmung der Verteilung der idealen Schicht ermöglichen, die der wirklichen Magnetisirung gleichwertig ist.

Wir wollen die wichtigsten experimentellen Methoden, die man angewandt hat, kurz vorführen, um ihre theoretische Bedeutung zu erklären.

414. Schwingungen. — Diese von Coulomb benutzte Methode besteht darin, dass man eine sehr kleine horizontale Nadel vor den einzelnen Punkten eines vertical in der Meridianebene der Nadel aufgestellten Stabes schwingen lässt. Bezeichnet man mit n bez. N die Anzahl der von der Nadel unter dem Einfluss der Erde allein bez. unter den zusammenwirken-

den Einflüssen der Erde und des Stabes gemachten Schwingungen, dann ist die Einwirkung des Stabes auf die Nadel, deren Magnetismus man als unveränderlich voraussetzt, proportional der Differenz $N^2—n^2$, der Quadrate der beiden Zahlen. Man misst so die Normalcomponente der magnetischen Kraft in dem betrachteten Punkte. Coulomb nahm an, dass diese Normalcomponente der Dichte der idealen Oberflächenschicht in dem der Nadel nächsten Punkte proportional ist, ausser in der Nähe der Endflächen; in diesem Falle bestimmte er die Dichte entweder durch ein graphisches Verfahren, oder indem er den durch die Schwingungen der Nadel erhaltenen Wert verdoppelte. Es lässt sich nicht verkennen, dass in dieser Art der Correction etwas Willkürliches liegt. Die Annahme, dass die Normalkraft in einem Punkte der Dichte der entsprechenden idealen Schicht proportional ist, und dass dieselbe unmittelbar die Verteilung des Magnetismus liefert, ist übrigens, wie man weiter unten (**419**) sehen wird, unter allen Umständen ungenau.

415. Torsionswaage. — Eine zweite, ebenfalls von Coulomb herrührende Methode besteht in der Messung der von jedem Punkte des Magnets in einem constanten, sehr kleinen Abstande ausgeübten Abstossung des Poles einer langen, in einer zur Achse des Stabes senkrechten Ebene beweglichen Nadel. Betrachtet man den Pol der Nadel als unveränderlich, so misst die Torsion, die man dem Aufhängungsfaden geben muss, um die Nadel in der gewünschten Position festzuhalten, ebenfalls mit einer gewissen Annäherung der Normalcomponente der magnetischen Kraft.

416. Anwendung weichen Eisens. — In den bisherigen Fällen nimmt man an, dass der Magnetismus des Hilfsmagnets unveränderlich ist, so dass die Wirkung, der derselbe ausgesetzt wird, der Intensität des Feldes einfach proportional ist. Besteht die schwingende Nadel aus weichem Eisen, und ist die Magnetisirung dieser Nadel der Intensität des Feldes proportional, so ist die Wirkung, der dieselbe unterzogen wird, dem Quadrate der Normalcomponente proportional.

Ebenso kann man ein Stück weichen Eisens (einen Jamin'schen *Probenagel)* an die verschiedenen Punkte des Magnets bringen und die zum Abreissen desselben nötige Kraft bestimmen; diese Abreisskraft ist ebenfalls unter gewissen Einschränkungen dem Quadrat der Normalcomponente proportional.

Immerhin berücksichtigt man in beiden Methoden weder die Aenderung des Coefficienten k mit der Intensität der magnetischen Kraft noch die durch die Anwesenheit des weichen Eisens hervorgerufenen Aenderungen in dem magnetischen Zustande des Stabes gerade an der Stelle, an der man denselben untersucht. Die durch Benutzung des weichen Eisens erhaltenen Resultate erscheinen demnach nicht einmal so gut bestimmt wie die, welche man mit permanenten Magneten erhält.

417. Messung der Strömung durch Inductionsströme. – Diese Methode ist die einzige, die genaue Resultate liefert; wir werden weiter unten die

Theorie derselben angeben. Hier genügt es darauf hinzuweisen, dass dieselbe mittels inducirter Ströme die Bestimmung der Kraftströmung oder der magnetischen Inductionsströmung, die durch einen geschlossenen Kreis geht, ermöglicht.

Legt man um den Stab in einem Punkte einen aus einem oder mehreren Windungen bestehenden Ring, der mit einem Galvanometer verbunden ist, und hebt man durch irgend ein Verfahren plötzlich die Magnetisirung auf, dann misst der in dem Ringe entstandene momentane Strom die Gesammtströmung der Induction, die durch die von dem Ringe in dem betrachteten Punkte begrenzte Ebene hindurchging; umfasst der Ring den Stab ganz eng, so ist die Inductionsströmung, die durch den Ring geht, die, welche in dem Querschnitte des Stabes selbst vorhanden ist.

Nachdem man dann den Ring an dieselbe Stelle gebracht hat, lässt man ihn längs der Achse des Stabes gleiten, und führt ihn in eine Entfernung, die man als unendlich gross betrachten kann; der Strom misst diesmal die gesammte Kraftströmung, die von dem Magnet von dem Ausgangspunkte der Bewegung an ausgeht.

Der Versuch zeigt, dass der Strom, wie man dies nach dem Satze von der Erhaltung der Induction erwarten musste, derselbe ist wie im vorigen Falle.

Indem man auf die eine oder andere Art die den verschiedenen Punkten entsprechende Strömung misst, kann man eine Curve construiren, die den magnetischen Zustand des Stabes darstellt. Die Curve hat eine Maximumsordinate, die der neutralen Linie entspricht; sie sinkt zu beiden Seiten und wird eine Asymptote zur Achse des Stabes, wenn man sich letztere unendlich verlängert denkt. Man kann dieselbe mit Gaugain *Curve der Entmagnetisirung* nennen.

Bringt man den Ring an eine Stelle, deren Abscisse x ist, und lässt ihn um eine Grösse dx gleiten, so misst der Strom die äussere Kraftströmung, die dieser Länge dx entspricht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Aenderung der inneren Induction. Verschiebt man den Ring successiv um gleiche Grössen, so kann man die Curve construiren, deren Ordinaten die äussere Strömung und demnach die Normalcomponente in den verschiedenen Punkten darstellen. Die Ordinaten dieser Curve sind die Ableitungen der Ordinaten der Entmagnetisirungscurve.

Diese Methode liefert demnach wie die vorhergehenden, aber in genauer Weise, die Werte der Normalcomponente in jedem Punkte des Stabes.

418. Verteilung der idealen Schicht. — Die ideale Schicht ist keineswegs eine Gleichgewichtsschicht, aber man weiss (**39**), dass ihre Dichte in jedem Punkte der Gleichung genügt,

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(F_n - F'_n),$$

in der F_n und F'_n für zwei unendlich nahe zu beiden Seiten der Oberfläche

angenommene Punkte, von denen der erste innerhalb, der zweite ausserhalb liegt, die Normalcomponenten der von den äusseren Massen und von der Schicht ausgeübten Wirkungen bedeuten. Die eben angeführten Methoden liefern die Componente F_n, aber die Componente F_n' ist im Allgemeinen unbekannt; folglich geben dieselben nur in gewissen speciellen Fällen das Mittel, die Dichte der idealen Schicht zu bestimmen.

Denn der Fall kann eintreten, dass die ideale Schicht die thatsächlich im Magnet vorhandenen magnetischen Massen nicht blos für die äusseren, sondern auch für die inneren Punkte ersetzen kann; dies tritt bei den magnetischen Inductionserscheinungen ein, wenn der Coefficient k constant ist. Dann besteht ein constantes Verhältnis μ zwischen der inneren und der äusseren Componente, und die Dichte wird ausgedrückt durch

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu} F_n = \frac{k}{1 + 4\pi k} F_n .$$

In diesem Falle ist die Verteilung vollständig bekannt, wenn man die äussere Normalcomponente in jedem Punkte kennt. Die Sache verhält sich nicht mehr so, wenn der Coefficient k veränderlich ist, und noch viel weniger, wenn starrer Magnetismus vorhanden ist.

Die gewöhnlichen Methoden geben, wie gesagt, nicht direkt die Verteilung der idealen Schicht auf einem magnetisirten Stabe; es ist insbesondere ungenau die Abscisse des Schwerpunktes der Curve der Normalcomponenten als die der Lage des Poles aufzufassen. Man überzeugt sich hiervon, wenn man den Fall eines gleichförmig in einer zur Achse parallelen Richtung magnetisirten Cylinders untersucht. Wir haben gesehen (**373**), dass dessen Wirkung durch die zweier Schichten, einer positiven und einer negativen, dargestellt werden kann, die gleichförmig auf den beiden Grundflächen verteilt sind. Man sieht leicht ein, dass die Kraftströmung für die Mantelfläche nicht Null ist, obwohl die Dichte daselbst Null ist. Der Schwerpunkt der Curve, welche die durch die Mantelfläche gehende Strömung darstellt, fällt in das Innere des Magnets, während sich der Pol genau auf der Endfläche befindet.

Wir bemerken noch, dass, obwohl die Normalcomponenten nicht die Verteilung liefern, sie doch vermöge des Green'schen Satzes die Berechnung der Gesammtmasse des Magnetismus ermöglichen. Für den ganzen Magnet ist diese Gesammtmasse augenscheinlich Null; aber die gesammte Kraftströmung auf der einen oder anderen Seite der neutralen Linie ist gleich dem Produkt aus 4π in die Masse der idealen Schicht, die dieser Seite entspricht. Diese Gesammtmasse wird durch den Flächeninhalt der Curve gegeben, die man erhält, wenn man als Ordinaten die für die Normal-Componente in allen Punkten der Magnetachse gefundenen Werte nimmt, wenn die letztere als ins Unendliche verlängert gedacht wird, oder einfacher gleich dem Produkt aus 4π in die Maximumsordinate der Entmagnetisirungscurve.

419. Cylindrische Magnete. — Coulomb hat durch den Versuch mittels der oben angeführten Methoden das bestimmt, was er die Verteilung des Magnetismus in cylindrischen Nadeln nennt.

Er hat zunächst gefunden, dass für *kurze* Magnete, für solche, deren Länge kleiner als der fünfzigfache Durchmesser ist, die Normalkraft in jedem Punkte (die er mit der Dichte zusammenwarf), dem Abstande von der Mitte proportional ist.

Die lineare Dichte wäre hiernach dieselbe wie für eine Kugel oder für ein gleichförmig magnetisirtes Ellipsoid.

Die Verteilungscurve wird dann durch eine Gerade OB (Fig. 86) gegeben,

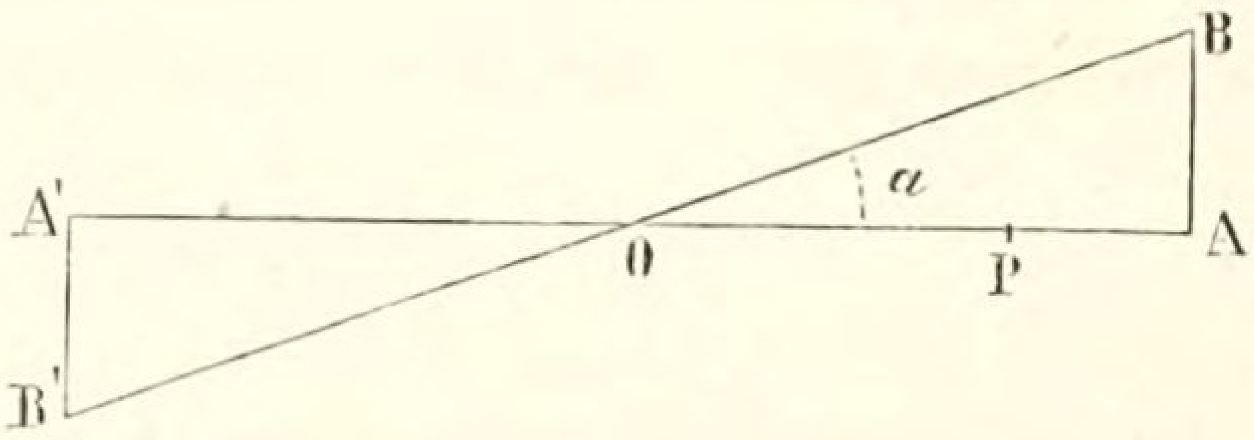


Fig. 86.

die mit der Achse OA des Stabes einen bestimmten Winkel α bildet. Eine Gerade OB' in der Verlängerung von OB würde den negativen Magnetismus der andern Hälfte des Stabes darstellen. Der Schwerpunkt der Oberflächenschicht fällt wie bei der Kugel in ein Drittel der halben Stablänge von den Endflächen ab gerechnet.

Dieses Gesetz muss die wirkliche Verteilung des Magnetismus mit genügender Genauigkeit angeben, denn Coulomb hat bewiesen, dass unter sonst gleichen Umständen das magnetische Moment kurzer Stäbe dem Kubus der Länge proportional ist.

Ist der Stab *lang*, übersteigt die Länge L desselben den Durchmesser d um das Fünfzigfache, so ist der Magnetismus auf eine gewisse Länge zu beiden Seiten der Mitte unmerklich, und derselbe kann auch jetzt noch durch ein Dreieck CAA' (Fig. 87) wiedergegeben werden, dessen Grundlinie

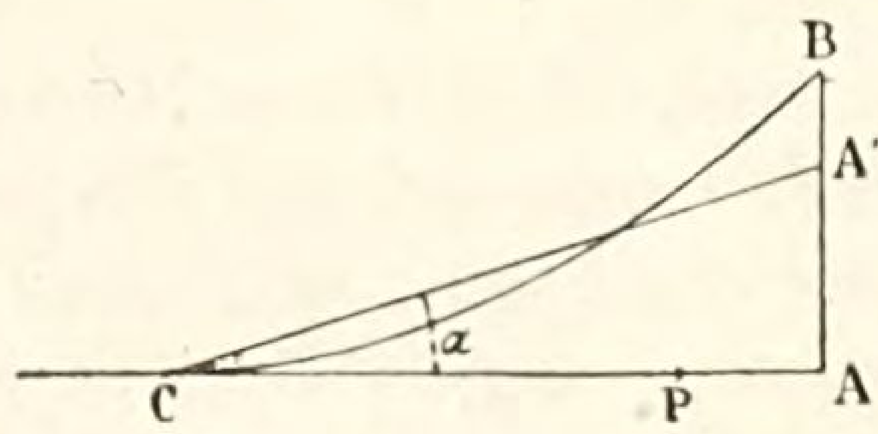


Fig. 87.

den 25fachen Durchmesser beträgt. Der Winkel α der die Dichten darstellenden Geraden gegen AC ist für Stäbe, die sich nur in der Länge unterscheiden, constant. Die Menge des Magnetismus ist dann constant und dieselbe wie in dem Grenzfalle, in dem $L = 50d$ ist; diese Menge kann demnach gegeben werden durch $\alpha\,(50d)^2$ und das Moment durch $\alpha\left(L - \frac{50}{3}d\right)(50d)^2$.

Coulomb betrachtet immerhin diese Resultate nur als erste Annäherung. Er hat gefunden, dass, wenn man vom Endpunkte A äquidistante Punkte annimmt, die von diesen an die entsprechenden Punkte der darstellenden Curve gezogenen Tangenten mit einander gleiche Winkel bilden. Die Curve, welche dieser Bedingung genügt, ist durch die Gleichung $e^{-\beta y} = \cos \beta x$ gegeben, die für kleine Werte von x merklich mit einem Parabelbogen CB (Fig. 87) zusammenfällt, den die Achse in einem Punkte C in einem Abstande l vom Ende berührt; die Menge des Magnetismus ist dann l^3 proportional, sie sei bl^3, und der Pol liegt in einem Abstande $\frac{l}{4}$ vom Endpunkte. Das magnetische Moment erhält den Wert $\left(L - \frac{l}{2}\right) bl^3$.

Man sieht, dass das magnetische Moment für einen sehr langen Cylinder allmälig der Länge proportional wird, wie in dem Falle der inducirten Magnetisirung.

420. Empirische Formeln. — Die für die beiden Hälften des Magnets so construirten Parabelteile stellen die Verteilung des Magnetismus nicht durch eine stetige Funktion dar. Biot hat gefunden, dass man die Versuche Coulomb's sehr genau darstellt durch die Exponentialfunktion

$$(3) \qquad y = a\,(\mu^{x} - \mu^{2l-x}),$$

in der y der Magnetismus in einem im Abstande x von einem Endpunkte gelegenen Punkte ist, a und μ Constanten sind.

Biot gelangt zu dieser Formel, indem er den Magnet mit einer Volta'schen Säule vergleicht, die er ihrerseits als eine Reihe von Platten auffasst, in denen die Elektricitäten der Endplatten A und B Elektricitätsmengen von entgegengesetztem Zeichen *binden*, die sich in geometrischer Progression mit der Plattenzahl ändern. Nennt man N die Gesammtzahl der Platten, dann bindet die positive Elektricität von A in der nten Platte eine negative Elektricitätsmenge, die durch $a\alpha^n$ ausgedrückt wird, und die negative Elektricität in B bindet in demselben Elemente eine positive Elektricitätsmenge, die durch $a\alpha^{N-n}$ angegeben wird, so dass die freie Elektricitätsmenge in diesem Elemente, wenn man voraussetzt, dass die letzten Ladungen einander gleich sind, ist

$$y = a(\alpha^n - \alpha^{N-n})$$

Um von dieser Formel zur vorigen zu gelangen, braucht man nur $N = 2lp$ und folglich $n = xp$ zu setzen, indem man p die Anzahl der Platten in der Längeneinheit nennt, und $\mu = \alpha^p$ zu wählen.

Es ist schwer eine Schlussweise zu discutiren, die als Grundlage nur den unbestimmten Begriff der gebundenen Elektricität hat.

Wir bemerken noch, dass, wenn man den Coordinatenanfang in der Mitte des Stabes statt an einem Ende annimmt, die Gleichung (3) geschrieben werden kann.

$$z = a\,(\mu^{l+x} - \mu^{l-x}) = a\,\mu^{l}(\mu^{x} - \mu^{-x}).$$

421. — Indem Green von einer besonderen Auffassung der Coercitivkraft ausging, fand er, dass für einen Kreiscylinder, der sich unter denselben Bedingungen befindet, die lineare Dichte im Abstande x, der von der Mitte eines Stabes von der Länge $2l$ und dem Radius a aus gemessen wird, ausgedrückt werden muss durch die Formel

$$\lambda = \pi k F q a \frac{e^{\frac{q}{a}x} - e^{-\frac{q}{a}x}}{e^{\frac{q}{a}l} + e^{-\frac{q}{a}l}} \tag{4}$$

oder wenn man $\frac{q}{a} = \beta$ setzt,

$$\lambda = \pi k F q a \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}},$$

n der F die Intensität des Feldes und q eine durch die Gleichung

$$0{,}231863 - 2l_n q + 2q = \frac{1}{\pi k q^2}$$

gegebene Constante bedeuten. Green nimmt an, dass der Magnetisirungscoefficient k in der ganzen Ausdehnung des Körpers constant ist; in diesem Falle ist die lineare Dichte der Normalcomponente proportional. Maxwell hat folgende Tabelle für die zusammengehörigen Werte von q und k berechnet:

k	q	k	q
∞	0,00	11,80	0,07
336,4	0,01	9,13	0,08
62,02	0,02	7,52	0,09
48,41	0,03	6,32	0,10
29,47	0,04	0,143	1,00
20,18	0,05	0,0002	10,00
14,79	0,06	0,0000	∞

Für negative Werte von k wird q imaginär; die Formel dürfte demnach für die diamagnetischen Körper nicht anwendbar sein.

Diese Formel von Green scheint sowohl die Verteilung des temporären Magnetismus im weichen Eisen, wie die des dauernden Magnetismus in Stäben von cylindrischer Form sehr genau anzugeben. Green hat gezeigt, dass der Wert des Momentes, welches man für eine Nadel von dieser Form aus dieser Formel ableitet,

$$m = \pi a^2 k F \left(2l - \frac{2}{\beta} \frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}} \right), \tag{5}$$

in sehr bemerkenswerter Weise mit den von Coulomb an Nadeln, die sich nur in ihrer Länge unterschieden, gemachten Bestimmungen übereinstimmt. Die Uebereinstimmung hört aber auf eine vollständige zu sein, wenn die Länge kleiner ist als der fünfundzwanzigfache Durchmesser.

Der Flächeninhalt der Curve, welche der Formel von Green entspricht, wird ausgedrückt durch

$$S = \pi a^2 Fk \left(1 - \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}\right);$$

dieselbe giebt den Wert der gesammten seitlichen Strömung an. Für einen sehr langen Cylinder reducirt sich dieselbe bis auf Grössen höherer Ordnung auf $\pi a^2 Fk$; die Strömung, die von den Endflächen ausgeht, kann in diesem Falle vernachlässigt werden.

Hätte man angenommen, dass die Abscisse des Schwerpunktes dieser Fläche die Lage des Poles bestimmt, so hätte man den Abstand $2d$ der beiden Pole erhalten durch Division des Momentes m durch die Masse S; man hätte so erhalten

(6) $$2d = \frac{2l - \frac{2}{\beta}\frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}}{1 - \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}}$$

Für sehr lange Nadeln reducirt sich dieser Ausdruck auf $2\left(l - \frac{1}{\beta}\right)$ $= 2\left(l - \frac{a}{q}\right)$, woraus erhellt, dass die Pole sich im Abstande $\frac{a}{q}$ von den Enden befinden.

422. — Jamin erhielt einen analogen Ausdruck. Ist y die *Spannung* oder die Dichte in einem Punkte, bedeuten p bez. s den Umfang bez. den Querschnitt des Stabes, A und c endlich zwei Constanten, dann findet Jamin, indem er die Erscheinung mit der Ausbreitung der Wärme vergleicht, vermöge des Fourier'schen Satzes folgende mit den Resultaten seiner Versuche übereinstimmende Formel:

$$y = Ac\sqrt{\frac{s}{p}}\, e^{-cl\sqrt{\frac{p}{s}}}\left(1 - e^{-2cl\sqrt{\frac{p}{s}}}\right)\left[e^{cx\sqrt{\frac{p}{s}}} - e^{-cx\sqrt{\frac{p}{s}}}\right].$$

Ist der Querschnitt des Stabes ein Kreis mit dem Radius a, so ist $\sqrt{\frac{p}{s}} = \sqrt{\frac{2}{a}}$, und die Formel geht, wenn man noch $c\sqrt{2} = B$ setzt, über in

(7) $$y = \frac{AB}{2}\sqrt{a}\, e^{-\frac{B}{\sqrt{a}}l}\left(1 - e^{-\frac{B}{\sqrt{a}}2l}\right)\left(e^{\frac{B}{\sqrt{a}}x} - e^{-\frac{B}{\sqrt{a}}x}\right);$$

diese Formel wird mit der von Green identisch, wenn man setzt

$$B = \frac{q}{\sqrt{a}} \quad \text{und} \quad A = \frac{2\pi akF}{1 - e^{-4\frac{q}{a}l}}.$$

Für lange Stäbe geht diese letztere Bedingung über in

$$A = 2\pi akF = pkF,$$

und man sieht, dass die Constante A dem Umfange proportional ist.

423. — Die Formel von Green gilt für den Fall eines in einem gleichförmigen, seiner Achse parallelen Felde befindlichen Cylinders, für den der Magnetisirungscoefficient constant ist. Prof. Rowland hat auf die Analogie hingewiesen, die zwischen dieser Formel und der besteht, welche den seitlichen Verlust einer Kette von derselben Form angiebt, die sich in einem leitenden Mittel befindet (268). Wir nehmen an, dass die Strömung der magnetischen Induction sich wie die Strömung der Elektricität fortpflanzt; behalten die Grössen ρ, ρ' und R_1 die nämlichen Bedeutungen wie in dem citirten Falle, wird ε durch die Kraft F des Feldes ersetzt, und nennt man Q die Strömung der magnetischen Induction durch einen Querschnitt des Stabes im Abstande x von der Mitte, so ist die innere Strömung

$$Q = \frac{F}{\rho}\left[1 - \frac{\beta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})}{\left(\frac{\rho}{R_1} + \beta\right)e^{\frac{\beta l}{2}} - \left(\frac{\rho}{R_1} - \beta\right)e^{-\frac{\beta l}{2}}}\right], \tag{8}$$

und die seitliche Strömung ist

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{F}{\rho}\,\frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{\left(\frac{\rho}{R_1} + \beta\right)e^{\frac{\beta l}{2}} - \left(\frac{\rho}{R_1} - \beta\right)e^{-\frac{\beta l}{2}}}.$$

Diese Formeln gelten auch für den Fall, dass der Magnet solenoidal ist, wenn derselbe von einer in sich geschlossenen Kanalfläche begrenzt wird, und wenn seine Magnetisirung überall senkrecht gegen seinen Normalschnitt gerichtet ist. In diesem Falle ist $R_1 = 0$, $Q = \frac{F}{\rho}$, und die seitliche Inductionsströmung ist Null.

Ist F_1 die magnetische Induction, s der Querschnitt eines Magnetstabes und μ der Coefficient der Permeabilität, so ist weiter

$$Q = sF_1 = s\mu F$$

und folglich $\mu = \frac{1}{\rho s}$.

424. — Alle Versuche zeigen, dass die Magnetisirung sich einem Maximum nähert, wenn die magnetisirende Kraft ohne Grenze wächst. Wählt man die Werte dieser Kraft als Abscissen und die zugehörigen Beträge der Magnetisirung als Ordinaten, so erhält man eine Curve, wie sie OBL (Fig. 90, S. 376) darstellt, die eine der Abscissenachse parallele Asymptote und einen Inflexionspunkt in der Nähe des Coordinatenanfanges besitzt.

Professor Rowland stellt die Erscheinungen anders dar. Indem er die Beträge der Induction F_1, wie sie durch den Versuch direkt gegeben werden, als Abscissen und die Werte von μ als Ordinaten wählt, findet er, dass die Versuche sehr genau durch die Formel

$$\mu = a \sin \frac{F_1 + b\mu + c\mu^2}{d} \tag{9}$$

dargestellt werden, wo a, b, c und d von der Natur und dem physikalischen Zustande des Metalles abhängige Constanten sind.

Die durch diese Gleichung dargestellte Curve hat die allgemeine Form einer Parabel, deren Durchmesser der Abscissenachse conjugirt ist; dieselbe schneidet diese Achse in zwei Punkten, und die Neigung des Durchmessers hängt von der Constanten b ab. Die Lage der Schnittpunkte mit der Achse wird durch die Werte von c und d bestimmt. Die Constante a giebt augenscheinlich den grössten Wert von μ an. Die Versuche Rowlands ergeben für dieses Maximum bei gewöhnlichen Temperaturen Zahlen zwischen 3000 und 5000 für Eisen und 300 für Nickel. Die Curve erhält eine andere Form, wenn die Temperatur sich ändert, und ihre Deformation mit wachsender Temperatur ist für Nickel weit grösser als für Eisen.

425. Hypothesen über die Constitution der Magnete. — Nach der Poisson'schen Theorie wird die Magnetisirung eines Körpers durch die Trennung magnetischer Fluida im Innern der einzelnen Partikel verursacht, und da für die Menge des neutralen Fluidums, die in einem bestimmten Volumen bestehen kann, keine Grenze vorhanden ist, kann die Magnetisirung selbst ohne Grenzen wachsen.

Wir werden weiter unten sehen, wie Ampère, von den magnetischen Eigenschaften der elektrischen Ströme ausgehend, zu der Annahme gelangt ist, dass jedes Partikel eines magnetischen Körpers im natürlichen Zustande von einem unendlich kleinen elektrischen Strome umflossen wird und so einen Elementarmagnet bildet. In einem jeder äusseren Kraft entzogenen magnetischen Körper sind diese Elementarmagnete nur ihren gegenseitigen Einwirkungen ausgesetzt und sind nach allen Richtungen ohne Unterschied orientirt.. Wird der Körper der Einwirkung eines magnetischen Feldes ausgesetzt, so suchen die Achsen der verschiedenen magnetischen Partikel in jedem Punkte die Richtung des Feldes anzunehmen, und die hiervon für ein Mittel herrührende Magnetisirung ist um so grösser, je mehr diese Partikel von ihrer ursprünglichen Richtung abweichen. Wenn einmal die Achsen aller Partikel einander parallel wären, dann würde die Magnetisirung des Mittels damit einen Maximumwert erreichen.

Allein diese Lage kann nie erreicht werden wegen der Einwirkungen der Moleküle auf einander. Wilhelm Weber hat gezeigt, wie diese Einwirkungen in Rechnung gezogen werden können.

426. Theorie von Weber. — Wir wollen mit Weber annehmen, dass jede Volumeneinheit des Körpers n magnetische Moleküle enthält, und dass das Moment jedes einzelnen gleich m sei. Wären alle diese Moleküle parallel, so wäre das Moment der Volumeneinheit $M = nm$, und die Magnetisirung des Mittels wäre ein Maximum.

Wenn sich das Mittel im neutralen Zustande befindet, dann sind die Moleküle nach allen Richtungen ohne Unterschied orientirt. Um diese Eigentümlichkeit mathematisch auszudrücken, ziehen wir durch den Mittelpunkt einer Kugel, deren Volumen der Einheit gleich ist, zu jeder der Achsen

der n Moleküle einen parallelen Radius; die Enden dieser Radien sind dann auf der Kugel gleichmässig verteilt.

Die Anzahl der Moleküle, deren Achsen mit einer bestimmten Achse, die wir als xAchse wählen, einen Winkel bilden, der kleiner ist als α, ist $\frac{n}{2}(1 - \cos\alpha)$; die Anzahl der Moleküle, deren Winkel mit der xAchse zwischen α und $\alpha + d\alpha$ liegen, ist demnach $\frac{n}{2}\sin\alpha d\alpha$.

Wir nehmen jetzt an, dass sich dieses Mittel in einem gleichförmigen Felde befindet, dessen Intensität X der xAchse parallel ist, und fassen die Wirkung ins Auge, die auf ein Molekül ausgeübt wird, dessen Achse einen Winkel α mit der Richtung des Feldes bildet.

Wäre dieses Molekül frei, so würde es sich der Kraft des Feldes parallel stellen, und da alle andern Moleküle eine analoge Drehung erfahren, so würde das Mittel das Maximum der Magnetisirung unter dem Einfluss irgend einer äusseren Kraft, selbst einer unendlich schwachen, erreichen.

Da es sich aber nicht so verhält, muss man annehmen, dass jedes Molekül vermöge einer Gegenkraft, die entweder von der Constitution des Mittels selbst herrührt oder durch die Einwirkungen, die die magnetisirten Moleküle auf einander ausüben, entsteht, seine ursprüngliche Lage wieder anzunehmen sucht.

Die einfachste Hypothese ist die, dass diese Gegenkraft D für alle Moleküle gleich gross ist, von der magnetisirenden Kraft nicht abhängt und in Richtung der ursprünglichen Achse jedes einzelnen Moleküls wirkt.

Die neue Richtung der Achse eines Moleküls in seiner Gleichgewichtslage ist dann durch die der Resultante von D und X gegeben.

427. — Um die Richtung des Moleküls zu erhalten, construiren wir eine Kugel, deren Radius gleich der Reaktion des Mittels ist, und tragen

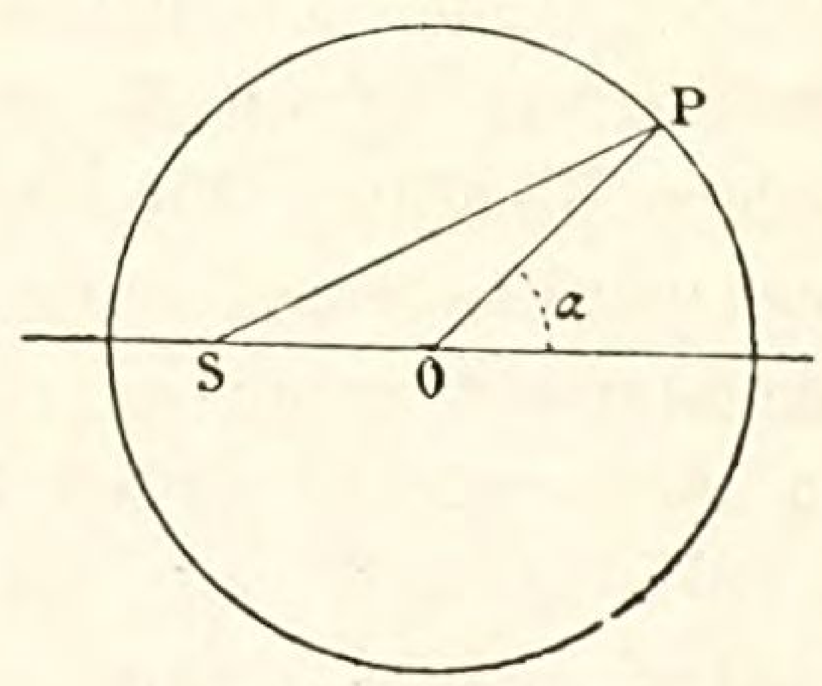


Fig. 88.

vom Mittelpunkte aus eine Länge OS ab, die der Intensität des Feldes gleich und entgegengesetzt ist (Fig. 88).

Ein Molekül, dessen Achse ursprünglich längs OP gerichtet war, ist der Wirkung zweier Kräfte $-SO$ und OP ausgesetzt, deren Resultante SP ist. Liegt der Punkt S innerhalb der Kugel, d. h. ist die Reaktion des Mittels grösser als die Intensität des Feldes, so bleiben die Achsen der gedrehten Moleküle noch immer nach allen Richtungen orientirt, aber nicht mehr gleichmässig.

Ist die Kraft des Feldes grösser als die Reaktion des Mittels, so liegt der Punkt S ausserhalb der Kugel (Fig. 89), und die Achsen der abgelenkten Moleküle sind alle in dem Berührungskegel TST' der Kugel enthalten.

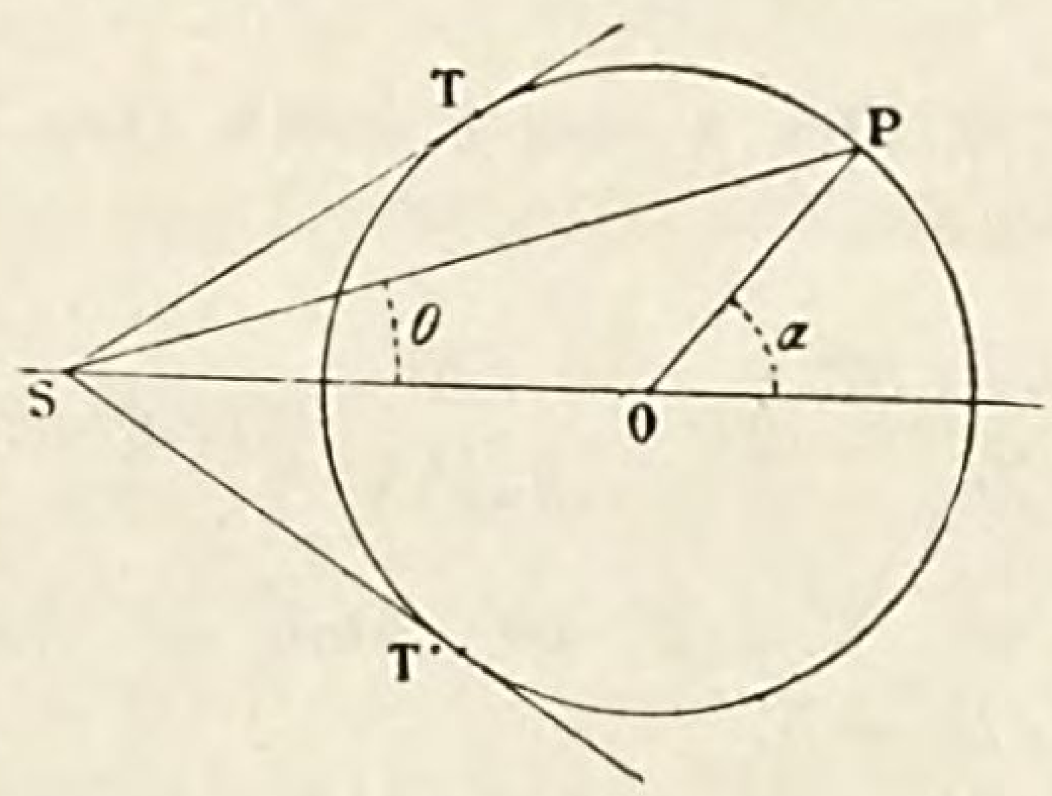


Fig. 89.

Es seien:

- α die ursprüngliche Neigung der Achse eines Moleküls gegen die xAchse,
- θ die schliessliche Neigung,
- β die Ablenkung $\alpha - \theta$,
- R die Resultante der magnetisirenden Kraft X und der Reaktion D des Feldes.

Die Gleichgewichtsbedingung ist dann

$$mX \sin\theta = mD \sin\beta = mD \sin(\alpha - \theta),$$

und man findet hieraus

(11) $$\operatorname{tg}\theta = \frac{D \sin\alpha}{X + D\cos\alpha}.$$

428. — Da die Structur des Mittels gegen die xAchse symmetrisch ist, wird die Intensität der Magnetisirung gegeben durch die Summe der Projectionen der magnetischen Momente aller Moleküle auf die xAchse.

Die Projection des Momentes eines Moleküls wird ausgedrückt durch $m\cos\theta$; die Zahl der Moleküle, die ursprünglich mit der Achse den Winkel α bildeten, ist $\frac{n}{2}\sin\alpha d\alpha$; die Resultante ist demnach

$$I = \int_0^\pi m\cos\theta \frac{n}{2} \sin\alpha d\alpha = -\int_\pi^0 \frac{mn}{2} \cos\theta \sin\alpha d\alpha,$$

oder

$$I = -\frac{M}{2}\int_\pi^0 \cos\theta \sin\alpha d\alpha.$$

Das Dreieck SOP liefert die Gleichung

$$R^2 = D^2 + X^2 + 2DX\cos\alpha,$$

woraus sich ergiebt

$$RdR = - DX \sin \alpha d\alpha.$$

Ausserdem ist

$$D^2 = R^2 + X^2 - 2RX \cos \theta.$$

Drückt man so die Winkel α und θ durch ihre Werte als Funktionen von R aus, so ergiebt sich

$$I = \frac{M}{4} \int \frac{R^2 + X^2 - D^2}{X^2 D} dR = \frac{M}{12 D X^2} \left[R(R^2 + 3X^2 - 3D^2) \right]_{R_1}^{R_2}.$$

Im ersten Falle, wo $X < D$ ist, sind die Grenzen des Integrales $R_2 = D + X$ und $R_1 = D - X$.

Im zweiten Falle, wo $X > D$ ist, sind die Integrationsgrenzen $R_2 = X + D$ und $R_1 = X - D$.

Nimmt man sämmtliche Reductionen vor, so ergiebt sich

$$\text{für } X < D,\ I = \frac{2}{3} M \frac{X}{D};$$

$$\text{„ } X = D,\ I = \frac{2}{3} M;$$

$$\text{„ } X > D,\ I = M \left[1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2} \right];$$

$$\text{„ } X = \infty,\ I = M.$$

Nach dieser Theorie ist die Magnetisirung zunächst der magnetisirenden Kraft proportional, bis diese der Reaktion des Mittels gleich wird, in welchem Falle die Magnetisirung zwei Drittel ihres Maximumswertes erreicht. Wenn dann die magnetische Kraft grösser wird, dann wächst die Magnetisirung weniger schnell und nähert sich einer endlichen Grenze.

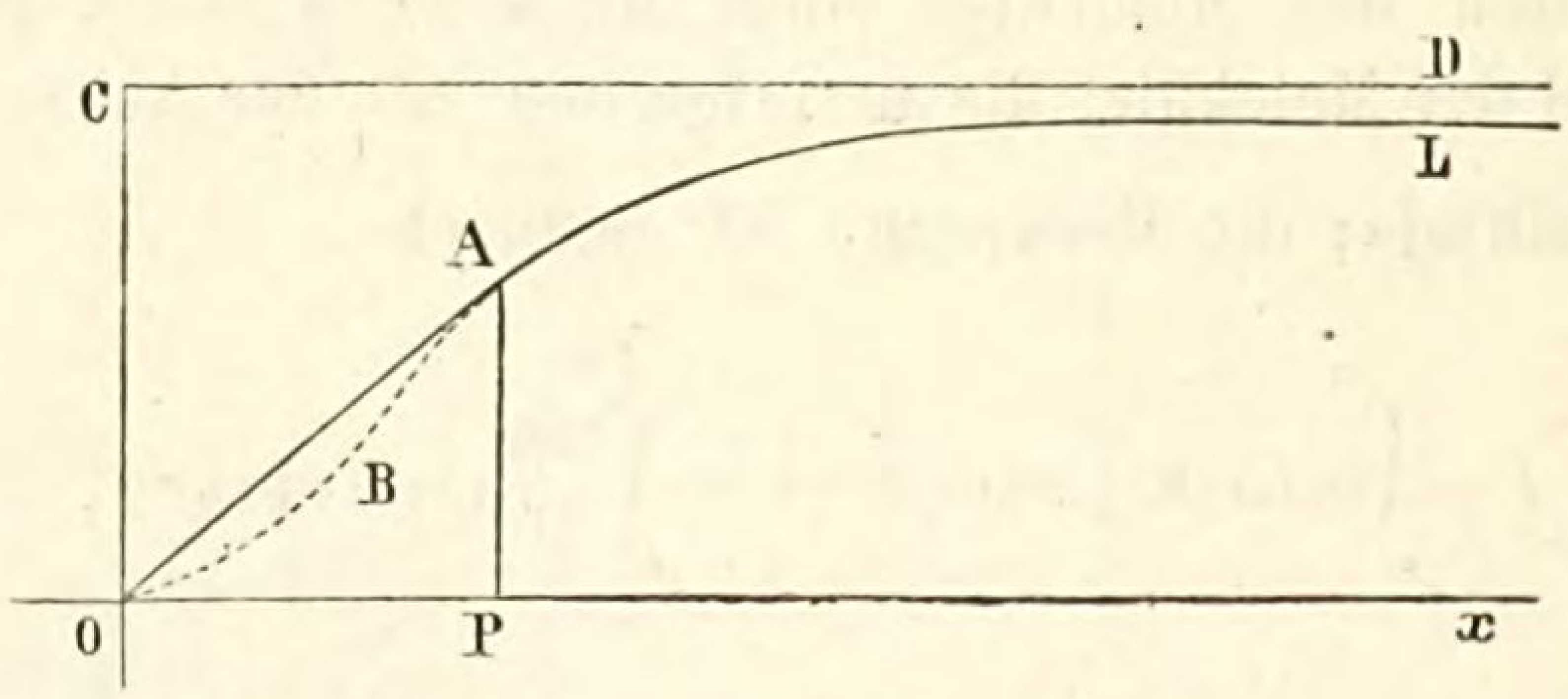


Fig. 90.

Die Curve OL (Fig. 90), die diese Magnetisirung als Funktion der magnetischen Kraft darstellt, besteht demnach aus einem geradlinigen Teile OA, an den sich eine krumme Linie AL schliesst, die sich einer horizontalen Geraden CD asymptotisch nähert.

429. — Die Versuche von Weber selbst stimmen mit diesem Gesetze in befriedigender Weise überein.

Immerhin haben aber neuere Versuche gezeigt, dass der Wert von k nicht für constant angesehen werden kann, auch nicht für kleine Kräfte. Dieser Coefficient wächst zunächst regelmässig, erreicht ein Maximum und nimmt dann ab.

Die Magnetisirung des Eisens als Funktion des Feldes muss demnach durch eine Curve, ähnlich OBA (Fig. 90) dargestellt werden, die einen Inflexionspunkt besitzt; man hat oft diesen ersten Teil der Curve durch die Tangente ersetzt, die durch den Anfangspunkt geht und für k den grössten Wert liefert. Die Weber'sche Theorie trägt dieser Veränderlichkeit des Magnetisirungscoefficienten für kleine Kräfte nicht Rechnung; ebenso wenig giebt dieselbe andererseits Aufschluss über das Wesen der remanenten Magnetisirung.

430. Theorie von Maxwell. — Um diese eben erwähnte Lücke auszufüllen, ohne darum diese Auffassungsweise aufzugeben, nimmt Maxwell in dem Mittel eine Art unvollkommene Elasticität an. Er nimmt an, dass die Achsen der magnetischen Moleküle nach Aufhören der magnetisirenden Kraft in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren, so lange die Drehung, die sie erlitten habe, unter einem gewissen Werte β_0 bleibt, dass diese Achsen aber eine dauernde Ablenkung $\beta - \beta_0$ erleiden, wenn die Drehung β grösser als die untere Grenze β_0 gewesen ist. Diese Ablenkung $\beta - \beta_0$ charakterisirt den dauernden Zustand des Moleküls.

Diese Hypothese stellt zweifellos nicht das wahre Wesen der Erscheinungen dar, aber sie kann eine annähernde Vorstellung von denselben geben und macht die Aufgabe der Rechnung zugänglich.

Nach Maxwell kann man durch eine der eben durchgeführten analoge Rechnung die temporäre Magnetisirung I und die dauernde I' ableiten. Setzt man

$$L = D \sin \beta,$$

so erhält man

Für $X < L$

$$I = \frac{2}{3} M \frac{X}{D}, \quad I' = 0.$$

Für $X = L$

$$I = \frac{2}{3} M \frac{L}{D}, \quad I' = 0.$$

Für $L < X < D$

$$I = M \left\{ \frac{2}{3} \frac{X}{D} + \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right) \left[\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{X^2}{D^2} - \frac{L^2}{D^2}} \right] \right\},$$

$$I' = M \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right) \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right).$$

Für $X = D$

$$L = M\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right],\quad I' = M\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^2.$$

Für $X > D$

$$I = M\left[\frac{1}{3}\frac{X}{D} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{D^2}{X^2} + \frac{(D^2 - L^2)^{\frac{3}{2}}}{6X^2D} - \frac{\sqrt{X^2 - L^2}}{6X^2D}(2X^2 - 3XD + L^2)\right]$$

$$I' = \frac{M}{4}\left[1 - \frac{L^2}{XD} + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right]^2.$$

Endlich für $X = \infty$

$$I = M,\quad I' = \frac{M}{4}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right)^2.\text{*)}$$

Die Figur 91 stellt den Verlauf der Erscheinung für die speciellen Werte $M = 1000$, $L = 3$, $D = 5$ dar. Die magnetisirenden Kräfte sind zu

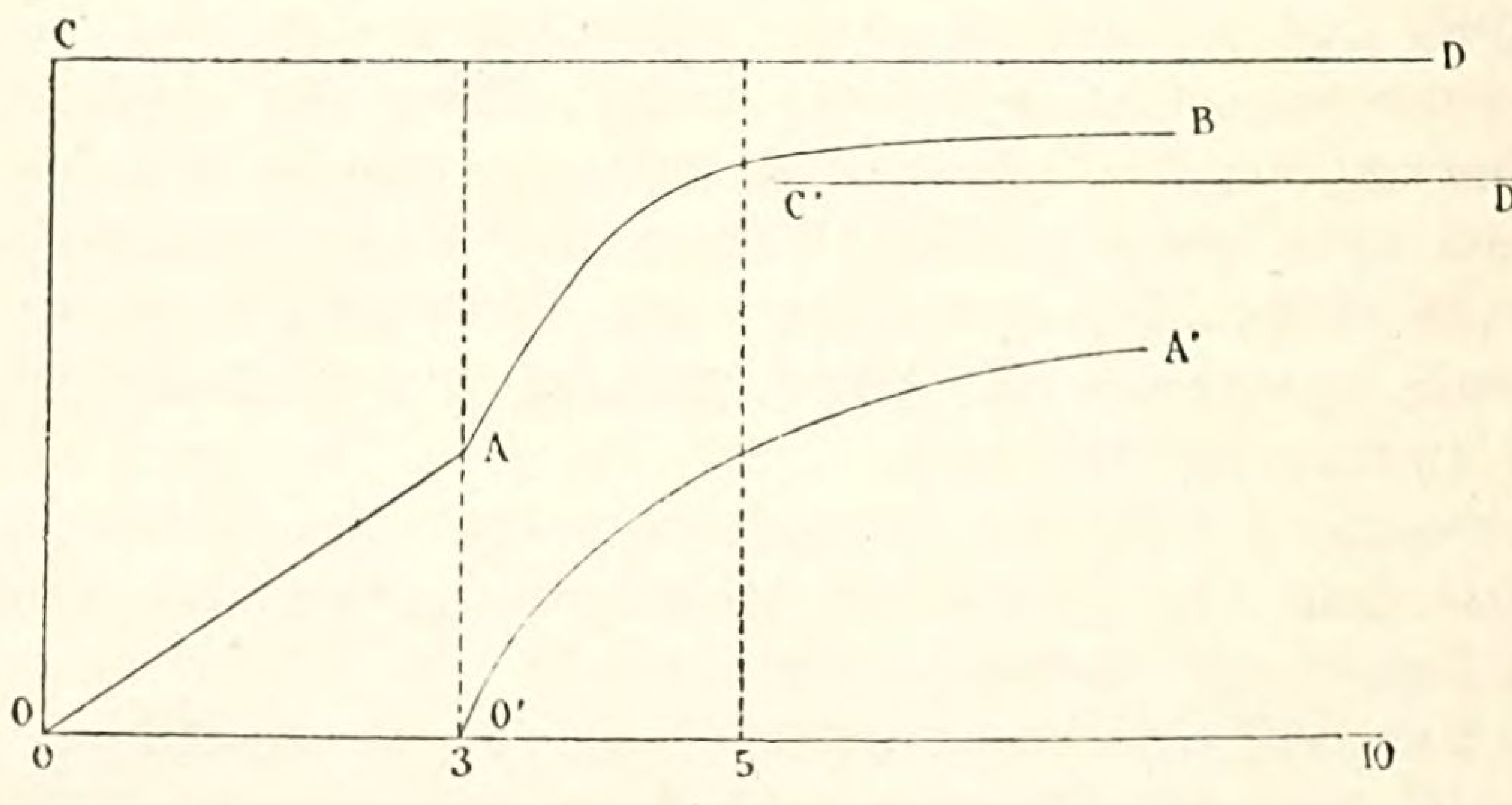


Fig. 91.

Abscissen gemacht; die Ordinaten der Curve OAB geben den temporären, die der Curve $O'A'$ den remanenten Magnetismus an. Die erstere enthält zunächst einen geradlinigen Teil, der den Werten von X zwischen 0 und 3 entspricht, dann steigt die Curve plötzlich und nähert sich ihrer Asymptote. Die Curve des remanenten Magnetismus beginnt erst, wenn $X = L$ ist; das Maximum M', dem sie sich nähert, und welches durch die Gerade $C'D'$ dargestellt wird, ist gleich 0,81 M.

Es ist wohl darauf zu achten, dass der so berechnete remanente Magnetismus dem Falle entspricht, wo die Magnetisirung des Körpers selbst nur eine unmerkliche entmagnetisirende Kraft hervorruft; diese Resultate gelten demnach nur für einen sehr gestreckten, longitudinal magnetisirten Körper.

*) Vgl. Maxwell: Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, übersetzt von Weinstein. Bd. II, p. 103.

Es ist schwer anzunehmen, dass eine discontinuirliche Curve, wie die, welche den temporären Magnetismus darstellt, der genaue Ausdruck der Erscheinung ist. Immerhin führt diese Theorie zu eigentümlichen Folgerungen über die Wirkung einander folgender magnetisirender Kräfte von entgegengesetztem Zeichen, die durch die Erfahrung bestätigt sind.

Nehmen wir an, dass ein Eisenstück, nachdem es der Einwirkung einer Kraft X_0 ausgesetzt war, eine dauernde Magnetisirung erhalten hat, so bleibt eine neue Kraft von derselben Richtung ohne Wirkung, so lange sie kleiner als X_0 ist. Ist dieselbe grösser als X_0, so ist der remanente Magnetismus derselbe, wie wenn die ursprüngliche Kraft gar nicht gewirkt hätte.

Hat die neue Kraft $-X_2$ das entgegengesetzte Zeichen, so ruft sie eine dauernde Wirkung hervor, auch ehe sie X_0 erreicht; für einen gewissen Wert dieser Kraft erscheint die remanente Magnetisirung des Eisens vernichtet, aber das Metall befindet sich nicht im neutralen Zustande, denn sie ist gegen die Einwirkung einer Kraft $-X$ unempfindlich, so lange X unterhalb X_2 liegt, während eine schwächere positive Kraft eine permanente Magnetisirung in der ursprünglichen Richtung hervorruft.

431. Beobachtungen von Jamin. — Jamin giebt für diese Erscheinungen eine andere Erklärung. Er nimmt an, dass die Einwirkung des Feldes auf einen Stab bis auf eine mehr oder weniger grosse Tiefe fühlbar wird. Wenn die zu Tage tretende Magnetisirung Null geworden ist, dann ist der Magnetismus nicht zerstört; es ist vielmehr nur eine Uebereinanderlagerung zweier entgegengesetzter Magnetisirungen eingetreten. Ein entgegengesetztes Feld, dessen Intensität unterhalb X_2 liegt, übt keine Wirkung auf die Oberflächenschicht, aber ein gleichartiges Feld von geringerer Intensität verursacht die Entstehung einer neuen Oberflächenmagnetisirung, deren Wirkung sich zu der, die in der Tiefe bestehen geblieben ist, addirt.

Jamin bestätigte diese theoretischen Anschauungen dadurch, dass er die Oberflächenschicht der entgegengesetzten Magnetisirung aufhob und die darunter liegende Schicht der ersten Magnetisirung blosslegte. Er gelangte dazu sowohl durch ein mechanisches Verfahren, indem er die äussere Oberfläche des Magneten abschliff oder abfeilte, als durch chemische Mittel, indem er diese Oberfläche durch eine Säure auflöste.

Immerhin muss darauf hingewiesen werden, dass dieses Vorherrschen der Oberflächenschichten vielleicht als eine dem Stahl eigentümliche accidentelle Erscheinung aufgefasst werden muss, wenn man nämlich einfach die Constitution dieses Metalles berücksichtigt. Denn da es sich um stark gehärtete Stäbe wie die, welche man mit Vorliebe für die Herstellung der Magnete wählt, handelt, ist die Härtung notwendig sehr ungleichmässig; dieselbe wird insbesondere in der Nähe der Oberfläche erzeugt, wo die Abkühlung sehr schnell ist, so dass die Coercitivkraft ihr Maximum der Wirkung in den Oberflächenschichten hat. Die inducirende Wirkung und die entmagnetisirende Kraft treten dann unter ganz anderen Bedingungen auf, als die sind, die bei den homogenen Körpern vorhanden sind.

432. Einfluss der Temperatur. — Der durch die Wirkung eines Magnets auf sich selbst inducirte Magnetismus bietet vielleicht auch das einfachste Mittel, den Einfluss der Temperatur zu erläutern.

Es liegt nahe anzunehmen, dass der starre Magnetismus nicht durch schwache Temperaturänderungen alterirt wird, da die Magnetisirung ihren ursprünglichen Wert wieder annimmt, wenn der Magnet auf seine Anfangstemperatur zurückkommt; man begreift schwer, wie der starre Magnetismus seine Verluste wieder ersetzen soll, denn alle inneren Wirkungen suchen ihn zu verkleinern. Bei der eben angedeuteten Anschauungsweise würde die vorübergehende Schwächung des Magnetismus einfach von einem Wachsen des inducirten Magnetismus herrühren, und folglich müsste der Magnetisirungscoefficient k zunächst mit der Temperatur zunehmen.

Bei höheren Temperaturen, bei solchen über 100° zum Beispiel, erleidet der Magnetismus eine endgiltige Schwächung; der starre Magnetismus wird demnach selbst geändert. Unter diesen Umständen kann man nicht sagen, ob der Magnetisirungscoefficient mit der Temperatur weiter wächst, da die Schwächung von zwei Ursachen herrührt. Da Eisen und Stahl in der Rotglut vom Magnete nicht einmal mehr angezogen werden, muss man annehmen, dass der Magnetisirungscoefficient dann Null oder wenigstens äusserst schwach ist.

Es scheint demnach, dass für Stahl und Eisen der Magnetisirungscoefficient zunächst mit der Temperatur wachsen muss, um dann bis zur Null abzunehmen, so dass er bei einer bestimmten Temperatur durch ein Maximum geht.

Wenn es sich wirklich so verhält, dann muss ein bei einer unterhalb der Maximumstemperatur liegenden Temperatur magnetisirter Stab durch Erwärmen Magnetismus verlieren, und das Umgekehrte muss bei einem bei einer Temperatur magnetisirten Stabe eintreten, die höher ist als die des Maximums.

Der Versuch zeigt, dass die Erscheinungen in der That beim Kobalt so verlaufen. Für Eisen und Stahl stimmen die bis jetzt bekannten Thatsachen teilweise mit dieser Auffassung überein; aber es sind zu wenig unter genügend bestimmten Bedingungen angestellte Versuche vorhanden, als dass man schätzen könnte, wie weit sich diese Anschauung der Wahrheit nähert. Indessen weist alles darauf hin, dass die wirklichen Erscheinungen complicirter sind.

6. Capitel.

Magnetischer Zustand der Erde.

433. Methode von Gauss. — Die Darstellung des Erdmagnetismus durch die Annahme eines Centralmagnets oder durch gleichbedeutende Hypothesen giebt nur eine erste, ziemlich grobe Annäherung: die Aufgabe ist in der That viel weniger einfach. Gauss hat dieselbe vollkommen allgemein auf Grund der Hypothese behandelt, dass die an der Erdoberfläche beobachteten Wirkungen allein von der Wirkung magnetischer Massen herrühren.

Welches auch die Verteilung dieser Massen sein möge, ob sie sich innerhalb oder ausserhalb der Erde befinden, da die Elementarwirkungen im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung erfolgen, ist die Kraft in jedem Punkte durch ein Potential bestimmt. Der Raum, der die Erde umgiebt, bildet das magnetische Feld des Systems, und man kann sich denselben durch Niveauflächen, die um gleiche Grössen von einander verschiedenen Werten des Potentials entsprechen, in Blätter zerschnitten denken. Die Fläche, die einem gegebenen Werte entspricht, kann aus einem oder mehreren Blättern bestehen; aber wir wissen, dass zwei Flächen von verschiedenen Potentialen sich nicht schneiden, und dass die Normalkraft in jedem Punkte dem Abstande zweier auf einander folgender Flächen umgekehrt proportional ist.

434. Magnetische Parallele. — Eine gewisse Anzahl dieser Flächen schneidet die Erdkugel; man nennt die entsprechenden Schnittlinien mit der Erdoberfläche *magnetische Parallele*; diese Linien sind Niveaulinien. Da dieselben zugleich der als kugelförmig angenommenen Erdoberfläche und der Niveaufläche angehören, sind sie in jedem Punkte zur Verticalen und zur magnetischen Kraft normal; sie sind demnach Normalen zu dem Meridianschnitt, der durch den Schnittpunkt der Niveaulinie mit der Verticalen geht, und folglich zum Schnitt dieses Meridians mit der Erdoberfläche, d. h. zum magnetischen Meridian. Die magnetischen Parallele bilden so auf der Oberfläche der Erdkugel ein zu den magnetischen Meridianen senkrechtes Liniensystem.

Wir fassen die zwei unendlich nahen Niveauflächen V_1 und V_2 entsprechenden Parallele (Fig. 92) ins Auge; *ds* sei der von den Niveauflächen begrenzte Bogen des Meridians und *dn* der normale Abstand der beiden Flächen in demselben Punkte. Nennt man F die magnetische Kraft und I die Inclination, so erhält man augenscheinlich

$$F = -\frac{dV}{dn} = -\frac{dV}{ds\cos I};$$

man findet hieraus

$$(1) \qquad F\cos I = H = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Die Horizontalcomponente, die in jedem Punkte zu dem durch ihn gehenden magnetischen Parallel normal wirkt, ist demnach dem Abstande

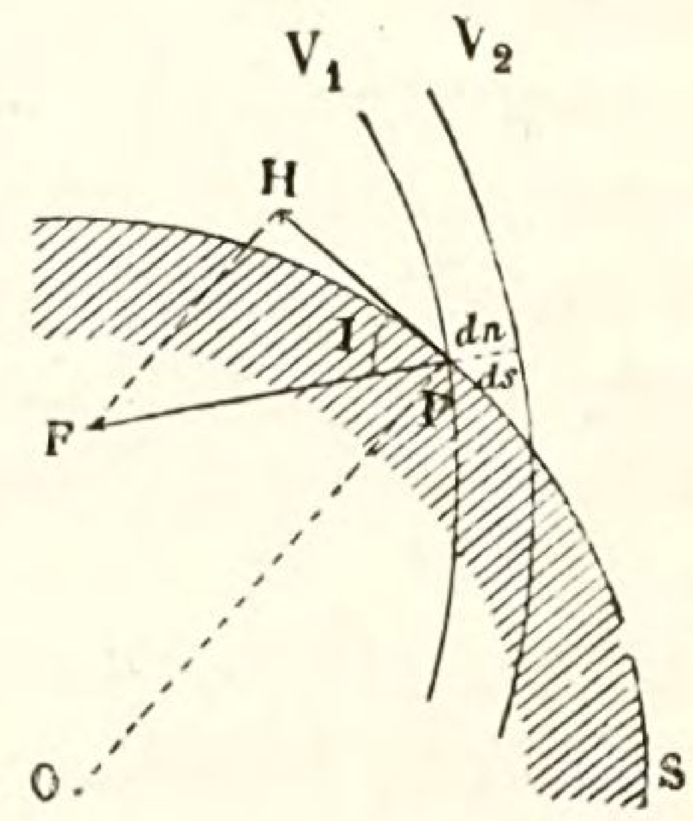


Fig. 92.

zweier auf einander folgender Parallele umgekehrt proportional; aber die Gesammtkraft und die Horizontalcomponente sind nicht notwendig einem magnetischen Parallel entlang constant, wie dies die Theorie von Biot erforderte.

435. Magnetischer Aequator. — Da die Summe der magnetischen Massen für das Gesammtsystem und ebenso für jeden der magnetisirten Körper einzeln Null ist, existirt eine Niveaufläche, für welche $V = 0$ ist; diese Niveaufläche schneidet die Erdkugel in der neutralen Linie derselben, wenn die Erde der einzige magnetische Körper ist, oder in der Nähe dieser Linie, wenn die andern magnetischen Körper genügend weit entfernt sind.

Der Parallel des Potentials Null heisst der *magnetische Aequator:* längs dieses Aequators ist die Kraft nicht constant, ebensowenig ist dieselbe notwendig horizontal. In der Theorie von Biot war der Aequator eine Linie von der Inclination Null.

Der magnetische Aequator scheidet auf der Erdoberfläche die Punkte, für welche das Potential positiv ist, von denen, wo dasselbe negativ ist. Vom Aequator ab wächst das Potential nach beiden Seiten continuirlich.

436. Magnetische Erdpole. — Man bezeichnet gewöhnlich als *magnetische Erdpole* die Punkte der Oberfläche, wo das Potential ein Maximum

oder Minimum ist. Ein Pol ist ein Punkt, wo eine Niveaufläche die Erdoberfläche berührt; die Kraft ist dort augenscheinlich vertical gerichtet.

Die Erde hat wenigstens zwei Pole, da wenigstens zwei Punkte vorhanden sind, wo die Niveauflächen die Kugelfläche berühren; aber es kann auch eine grössere Anzahl vorhanden sein. Wir nehmen beispielsweise an, dass zwei Pole P und P' (Fig. 93) vorhanden sind, die auf der positiven Seite, also auf der südlichen Halbkugel liegen. Diese Pole könnten derselben Niveaufläche angehören, die dann zwei Berührungspunkte mit der Kugelfläche gemein hätte; wir fassen dieselben aber allgemeiner als zwei verschiedenen Niveauflächen zugehörig auf, deren Potentiale V_m und V'_m sind, wo V_m grösser als V'_m sein möge.

Da die Punkte P und P' Maximumspunkte sind, nimmt das Potential um jeden derselben herum nach allen Richtungen ab, und man kann stets

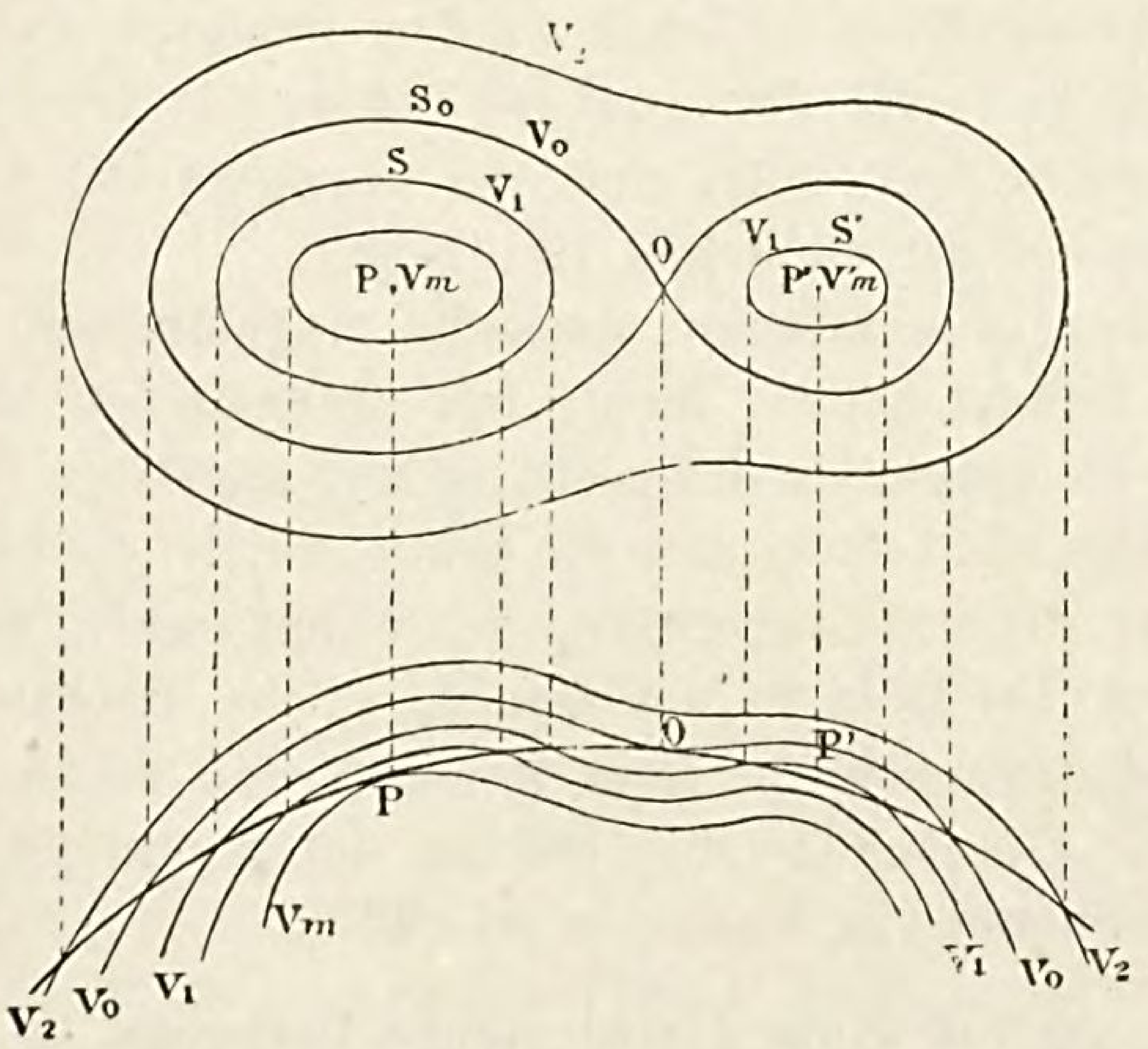


Fig. 93.

einen Wert V_1, der kleiner ist als V'_m, so wählen, dass der Schnitt der Niveaufläche V_1 mit der Kugel zwei geschlossene Curven S und S' liefert, die von einander vollständig getrennt sind, und von denen jede einen der Punkte einschliesst; man kann auch einen Wert V_2 so klein annehmen, dass eine und dieselbe Schnittcurve beide Punkte einschliesst.

Lässt man das Potential sich stetig von V_1 bis V_2 ändern, so findet man einen Wert V_0, für welchen die beiden Curven, die vorher getrennt waren, sich treffen, so dass sie sich zu einer einzigen S_0 verbinden; die Verbindung kann entweder in einem einfachen Kreuzungspunkte erfolgen, wie dies in Figur 93 angedeutet ist, oder in einer grösseren Anzahl von Schnitt- oder Berührungspunkten. O sei einer dieser Punkte. Es ist zunächst klar, dass die Horizontalcomponente dort Null ist, und dass der Punkt folglich der gewöhnlichen Definition der Pole entspricht; nur ist zu bemerken, dass man, wenn man sich von demselben entfernt, in gewissen Rich-

tungen wachsende, in andern abnehmende Potentiale findet: für die ersteren Richtungen verhält sich der Punkt O wie ein Südpol, für die andern wie ein Nordpol. Dies nennt man einen *falschen Pol.*

So können auf derselben Halbkugel nicht zwei gesonderte Pole vorhanden sein, ohne dass zugleich noch mindestens ein falscher Pol da wäre. Aber die Beobachtungen zeigen nichts Aehnliches, und nur durch eine ungenaue Erklärung der Erscheinungen hat man manchmal aus den Beobachtungen die Existenz zweier Pole auf der nördlichen Halbkugel ableiten zu können geglaubt.

In der That haben in der Nähe der Pole die Parallele eine elliptische Form; ihre Normalen, die magnetischen Meridiane also, treffen sich allerdings nicht in einem Punkte, aber die Convergenzpunkte, auf welche sie mehr oder weniger deutlich hinweisen, sind die Krümmungsmittelpunkte und stehen augenscheinlich in keiner Beziehung zu den Polen.

Die Beobachtung führt demnach zu dem Schlusse, dass, abgesehen von vollkommen zufälligen und localen Umständen, nur zwei magnetische Pole auf der Erdoberfläche vorhanden sind, ein negativer Pol auf der nördlichen und ein positiver auf der südlichen Halbkugel.

Es ist wichtig hinzuzufügen, dass die magnetischen Erdpole, wie wir dieselben eben definirt haben, nichts mit Magnetpolen im engeren Sinne, die man als die Schwerpunkte der positiven und negativen Massen betrachtet, gemein haben. Man sieht auch, dass die Sehne, welche die beiden Erdpole verbindet, nicht für die erdmagnetische Achse angesehen werden darf. Die magnetische Achse der Erde ist die Gerade, welche die beiden Schwerpunkte verbindet, von denen eben die Rede gewesen ist; es ist dies die Gerade, längs welcher die Summe der Projectionen der magnetischen Momente der verschiedenen Elemente ein Maximum ist (297).

437. Eigenschaften eines geschlossenen Polygons. — Wir wissen, dass, wenn man eine der Einheit gleiche magnetische Masse aus einem Punkte P_1, dessen Potential V_1 ist, auf einen Punkt P_2 überführt, dessen Potential V_2 ist, wenn man ferner mit F die Kraft, mit ds das von der Masse zurückgelegte Wegelement und mit ε den Winkel der Kraftrichtung gegen dieses Element bezeichnet, die magnetische Arbeit durch die Gleichung ausgedrückt wird

$$V_1 - V_2 = \int_{P_1}^{P_2} F ds \cos \varepsilon.$$

Diese Arbeit ist von dem durchlaufenen Wege unabhängig und ist immer Null, wenn man auf die ursprüngliche Niveaufläche zurückkommt, indem man die Masse irgend eine geschlossene Curve beschreiben lässt. Nehmen wir an, dass die beiden Punkte P_1 und P_2 auf der Erdoberfläche liegen, und dass man die Masse in dieser Fläche verschiebt, so ist die Arbeit der Verticalcomponente in jedem Augenblicke Null, und der Ausdruck für die

Arbeit hängt nur von der Horizontalcomponente ab und reducirt sich auf

$$(2) \qquad V_1 - V_2 = \int_{P_1}^{P_2} H ds \cos \varepsilon,$$

wo das Integral auf der rechten Seite immer Null wird, wenn man die Masse einen geschlossenen Kreis beschreiben lässt.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir ein Polygon aus grössten Kreisen, die durch die Punkte $P_0, P_1, P_2 \ldots$ (Fig. 94) gehen. Wir zeichnen in diesen verschiedenen Punkten die geographischen Meridiane $P_0 M_0$, $P_1 M_1$, $P_2 M_2 \ldots$ und die magnetischen Meridiane $P_0 D_0$, $P_1 D_1$, $P_2 D_2 \ldots$.

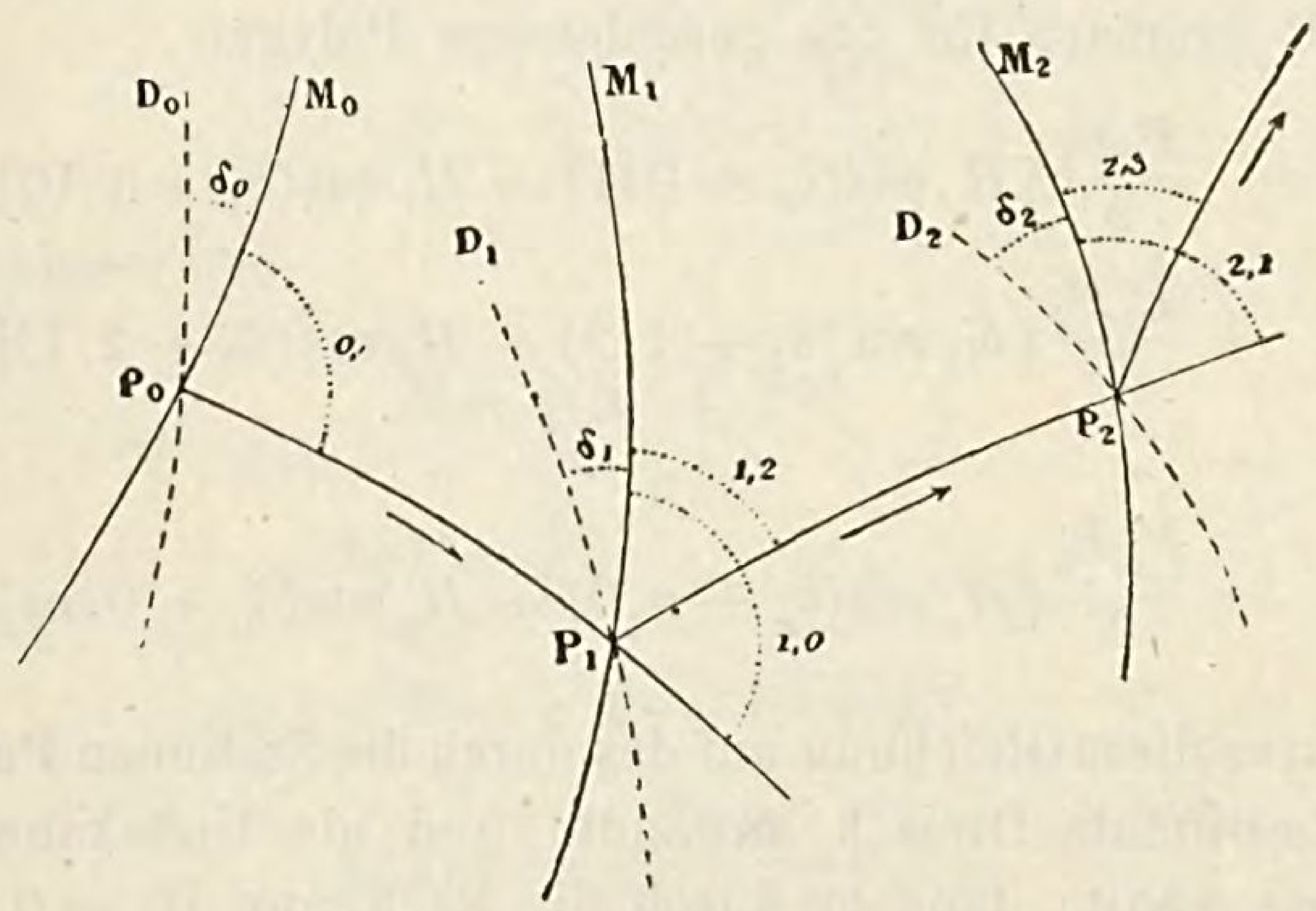


Fig. 94.

Es seien

$\delta_0, \delta_1, \delta_2 \ldots$ die von Norden nach Westen positiv gerechneten Declinationen,

0.1 das Azimuth des Bogens $P_0 P_1$ im Punkte P_0, wo dieses Azimuth von Norden nach Osten positiv gerechnet wird,

1.0 das Azimuth des Bogens $P_0 P_1$ im Punkte P_1, wenn dasselbe in derselben Richtung als positiv gerechnet wird u. s. f.,

$\varepsilon_{0\cdot1}, \varepsilon_{1\cdot0} \ldots$ die Werte des Winkels ε in diesen verschiedenen Punkten.

Man erhält:

im Punkte P_0, $\varepsilon_{0\cdot1} = \delta_0 + 0.1;$

„ P_1, $\varepsilon_{1\cdot0} = \delta_1 + 1.0,$

$\varepsilon_{1\cdot2} = \delta_1 + 1.2;$

„ P_2, $\varepsilon_{2\cdot1} = \delta_2 + 2.1,$

$\varepsilon_{2\cdot3} = \delta_2 + 2.3$ u. s. f.

Auf der Seite $P_0 P_1$ ist die Horizontalcomponente H nicht constant, weder der Grösse noch der Richtung nach; wenn diese Seite indessen sehr

klein ist gegen die Dimensionen der Erdkugel, so kann man annehmen, dass der Wert von H auf ihr constant bleibt gleich dem Mittel der Werte, die H in den Punkten P_0 und P_1 besitzt, und man kann setzen

$$H \cos \varepsilon = \frac{1}{2}(H_0 \cos \varepsilon_{0\cdot 1} + H_1 \cos \varepsilon_{1\cdot 0}).$$

Der durch die Gleichung (2) ausgesprochene Satz ergiebt dann für den Bogen $P_0 P_1$

$$\int_{P_0}^{P_1} H ds \cos \varepsilon = \frac{P_0 P_1}{2} [H_0 \cos(\delta_0 + 0.1) + H_1 \cos(\delta_1 + 1.0)].$$

Man erhält demnach für das geschlossene Polygon

$$\begin{aligned} 0 = \; & \frac{P_0 P_1}{2} [H_0 \cos(\delta_0 + 0.1) + H_1 \cos(\delta_1 + 1.0)], \\ + & \frac{P_1 P_2}{2} [H_1 \cos(\delta_1 + 1.2) + H_2 \cos(\delta_2 + 2.1)], \\ + & \dots\dots\dots\dots \\ + & \frac{P_n P_0}{2} [H_n \cos(\delta_n + n.0) + H_0 \cos(\delta_0 + 0.n)]. \end{aligned}$$

Indem Gauss diese Gleichung auf das durch die Stationen Paris, Göttingen und Mailand bestimmte Dreieck anwandte und als Unbekannte den Wert von H_0 zu Paris wählte, fand er durch die Rechnung $H_0 = 0{,}517$, während die Beobachtung 0,518 ergab.

438. Einführung geographischer Coordinaten. — Wir fassen einen beliebigen Punkt P in der Entfernung r vom Erdmittelpunkte ins Auge;

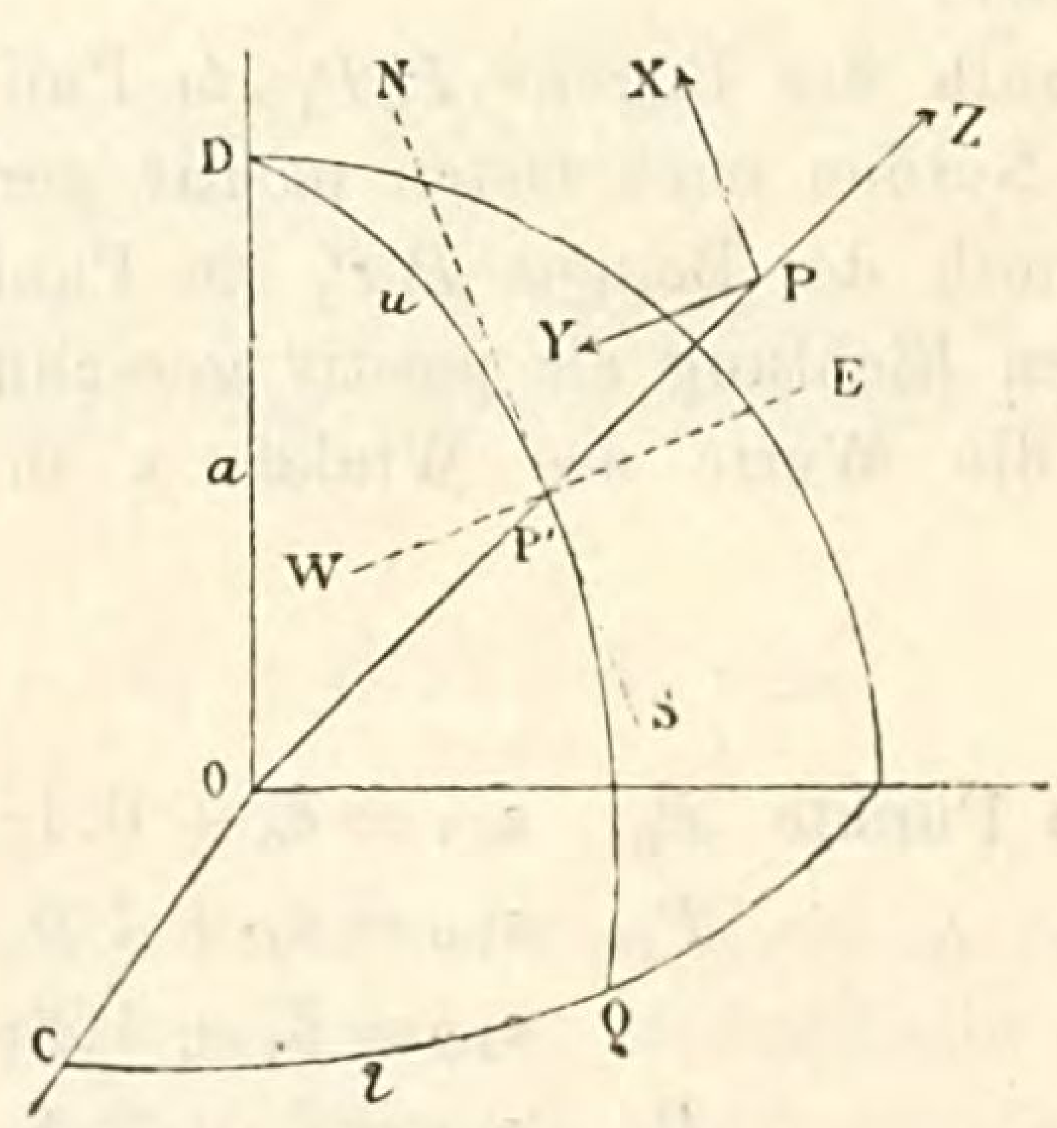


Fig. 95.

u (Fig. 95) sei das Complement $P'D$ der Breite und l die nach Osten gerechnete Länge CQ. Wir zerlegen die magnetische Kraft F im Punkte P

in drei andere, zu einander rechtwinklige, in eine Kraft Z in Richtung der Verticalen, die nach dem Zenith hin positiv gerechnet wird, in eine zweite X, im Meridian nach Norden gerichtet, und in eine dritte Y, die nach Westen gerichtet ist.

Berücksichtigt man die Beziehungen

$$dx = -rdu,\quad dy = -r\sin u dl,\quad dz = dr,$$

so werden die Kraftcomponenten

$$(4)\qquad \begin{aligned} X &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial u}, \\ Y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{r\sin u}\frac{\partial V}{\partial l}, \\ Z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial r}. \end{aligned}$$

Nun ist ausserdem

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{X^2+Y^2}, \\ \operatorname{tg}\delta &= \frac{Y}{X}, \\ F &= \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \\ \operatorname{tg} I &= \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}. \end{aligned}$$

Liegt der Punkt P an der Erdoberfläche in P', so muss man $r = a$ nehmen, und die Gleichungen (4) liefern

$$\begin{aligned} aX &= \frac{\partial V}{\partial u}, \\ aY\sin u &= \frac{\partial V}{\partial l}. \end{aligned}$$

Da ausserdem ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial l} = \frac{\partial^2 V}{\partial l\,\partial u},$$

so ergiebt sich

$$\frac{\partial X}{\partial l} = \frac{\partial(Y\sin u)}{\partial u},$$

und folglich

$$Y\sin u = \int^{u} \frac{\partial X}{\partial l}\,du + f(l).$$

Für $u=0$, also am Nordpol, ist $Y \sin u = 0$ und folglich $f(l)=0$ Es ergiebt sich demnach

$$(6) \qquad Y \sin u = \int_0^u \frac{\partial X}{\partial l} du.$$

Man gelangt so zu dem bemerkenswerten Satze von Gauss:

Es genügt für alle Punkte der Erdoberfläche, den nach Norden gerichteten Teil der Horizontalcomponente zu kennen, um auch den nach Westen gerichteten Teil derselben und demnach die gesammte Horizontalcomponente zu kennen.

439. Ausdruck des Potentials. — Welches auch die Magnetisirung der Erde sein mag, so kann das äussere Potential, wie wir gesehen haben (**369**), durch den Ausdruck angegeben werden

$$V = a\left[A_1\left(\frac{a}{r}\right)^2 + A_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \cdots\right],$$

der für einen auf der Oberfläche gelegenen Punkt sich reducirt auf

$$V = a(A_1 + A_2 + \cdots).$$

Man findet hieraus für die Componenten der magnetischen Kraft

$$(7) \qquad \begin{aligned} X &= \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial A_1}{\partial u} + \frac{\partial A_2}{\partial u} + \cdots, \\ Y &= \frac{1}{a \sin u}\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{1}{\sin u}\left[\frac{\partial A_1}{\partial l} + \frac{\partial A_2}{\partial l} + \cdots\right], \\ Z &= -\frac{\partial V}{\partial r} = 2A_1 + 3A_2 + 4A_3. \end{aligned}$$

Die Coefficienten A_1, A_2, A_3 sind Funktionen der beiden Winkel l und u. A_n wird (**369**) durch $2n+1$ Glieder, welche Sinus und Cosinus enthalten, ausgedrückt. Will man demnach den Zustand der Erde durch eine Reihe von dieser Form darstellen, so sind für A_1 3 numerische Coefficienten zu bestimmen, für A_2 deren 5, für A_3 deren 7 u. s. f.

Gauss hat gefunden, dass es bei den vorhandenen magnetischen Bestimmungen unnütz wäre, die Entwickelung über das vierte Glied hinauszutreiben, so dass dann nur 24 numerische Coefficienten zu berechnen sind.

Jeder Punkt der Oberfläche liefert für die Werte der Componenten X, Y, Z drei Gleichungen; es genügt demnach diese drei Elemente an acht beliebigen Punkten der Erde zu kennen, um eine vollständige Lösung der Aufgabe zu erhalten. Um Irrtümer zu vermeiden, die von den fortgelassenen Gliedern und von ungenauen Beobachtungen herrühren, wandte Gauss auf die auf vierundzwanzig Punkte, die zur Erleichterung der Rechnung auf zwölf äquidistanten Meridianen und auf sieben Parallelen gewählt waren, bezüglichen

Daten die Methode der kleinsten Quadrate an. Die erhaltenen Resultate wurden dann auf neunundneunzig andere Punkte übertragen.

Die von Gauss berechneten Formeln bezeichnen für die beiden Pole für das Jahr 1838 folgende Positionen:

Nordpol: Breite 70° 35′ Länge 95° 39′ W. L.,
Südpol: „ 78° 35′. „ 152° 30′ O. L.;

wie man sieht, entsprechen dieselben keineswegs den Endpunkten desselben Durchmessers.

Was die wahre magnetische Achse betrifft, die durch die Bedingung bestimmt ist, dass die Summe der Projectionen der Momente auf sie ein Maximum ist, so ist dieselbe dem Erddurchmesser parallel, der dem Punkte der nördlichen Halbkugel entspricht, dessen Breite 77° 50′ und dessen Länge 63° 31′ W. L. ist. Die Richtung derselben fällt nicht genau mit der Linie zusammen, welche die Pole verbindet.

Diese Richtung ist die, für welche der Coefficient A seinen grössten Wert hat (**370**). Was das magnetische Moment der Erde betrifft, so ist dasselbe gleich a^3K. Bei einer Vergleichung dieses Momentes mit dem eines Stahlstabes, der ungefähr 500 g wog und der zur absoluten Bestimmung des Erdmagnetismus gedient hatte, hat Gauss gefunden, dass jenes nahezu 8.10^{21} Mal so gross war. Nimmt man die Erde als gleichförmig magnetisirt an, so findet man aus dieser Zahl, dass das magnetische Moment jedes Kubikmeters Erde dasselbe ist, wie das von acht solchen Stäben, wie ihn Gauss benutzt. War also die Magnetisirung des Stabes ebenfalls eine gleichförmige, so betrug seine Intensität etwa 2200 Mal so viel als die des Erdballes.

440. Befindet sich der Erdmagnetismus nur im Innern der Erde? — Wir erinnern daran, dass das Potential, wenn die wirksamen Massen sich teils innerhalb, teils ausserhalb einer Fläche befinden, durch die Summe zweier Reihen dargestellt werden kann

$$V = A_1\left(\frac{a}{r}\right)^2 + A_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \cdots + A_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cdots$$
$$+ B_1\left(\frac{r}{a}\right) + B_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \cdots + B_n\left(\frac{r}{a}\right)^n \cdots,$$

wo sich der erste Teil auf die inneren, der zweite auf die äusseren Massen bezieht. Bezeichnet man mit V_n das allgemeine Glied der Reihe, so erhält man demnach

$$V_n = A_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + B_n\left(\frac{r}{a}\right)^n$$

und findet hieraus

$$\frac{\partial V_n}{\partial r} = -\frac{n+1}{r} A_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + \frac{n}{a} B_n\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}.$$

Für einen Punkt auf der Oberfläche erhält man einfach

$$V_n = A_n + B_n,$$

(8)
$$\frac{\partial V_n}{\partial r} = -\frac{n+1}{a} A_n + \frac{n}{a} B_n.$$

Die Verticalcomponente

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\left(\frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{\partial V_2}{\partial r} + \cdots\right) = -(Z_1 + Z_2 \cdots + Z_n \cdots)$$

hat hiernach auf der Erde als allgemeines Glied

(9)
$$Z_n = \frac{1}{a}[nB_n - (n+1) A_n].$$

Diese Gleichung mit den früheren (8) verbunden, liefert

$$B_n = \frac{1}{2n+1}[aZ_n + (n+1) V_n], \quad A_n = \frac{1}{2n+1}[nV_n - aZ_n],$$

und man kann so die von der inneren Masse herrührende Wirkung von der trennen, welche die äusseren Massen verursachen.

Da die Rechnungen von Gauss gezeigt haben, dass den Beobachtungen schon durch die Coefficienten A allein genügt wird, so folgt, dass die Coefficienten B merklich Null sind, folglich scheint kein merklicher Teil der Erdkraft von äusseren magnetischen Massen herzurühren.

441. Einfluss der Sonne und des Mondes. — Immerhin scheinen einige periodische Aenderungen der Elemente des Erdmagnetismus mit den scheinbaren Bewegungen der Sonne und des Mondes in Zusammenhang zu stehen oder von gewissen Nebenerscheinungen, wie den Sonnenflecken, abzuhängen. Der Einfluss dieser Gestirne scheint nicht zweifelhaft; dennoch drängt Alles zu der Ansicht, dass dieselben nicht direkt wirken, etwa wie magnetische Körper, sondern dass ihre Einwirkung eine indirekte ist, und dass dieselben nur den magnetischen Zustand des Erdballes beeinflussen.

Ein Gestirn ist, welches auch die Verteilung des Magnetismus sein mag, den es besitzt, für die sehr entfernten Punkte mit einem unendlich kleinen Magnet oder einer gleichförmig magnetisirten Kugel gleichwirkend.

Wir bezeichnen mit:

I die mittlere Intensität der Magnetisirung der Erde,
R ihren Radius,
ϖ ihr magnetisches Moment,
I' die mittlere Intensität der Magnetisirung eines Gestirns,
R' dessen Radius,
ϖ' das magnetische Moment desselben,
D' den Abstand desselben von der Erde.

Die Wirkung am Aequator der Erde, wo dieselbe ein Minimum ist, hat zum Werte (**153**)

$$F_a = \frac{\varpi}{R^3} = \frac{4}{3}\pi I.$$

Nimmt man an, dass die Pollinie des betrachteten Gestirns nach der Erde hin gerichtet ist, welcher Fall der günstigste ist, so ist die Kraft F_p, die dasselbe auf die Erde ausübt (**153**),

$$F_p = 2\frac{\varpi'}{D^3} = 2\cdot\frac{4}{3}\pi I'\left(\frac{R'}{D}\right)^3.$$

Das Verhältnis des Maximums der Wirkung des betrachteten Gestirns gegen das Minimum der Wirkung der Erde ist sonach

$$\frac{F_p}{F_a} = 2\frac{I'}{I}\left(\frac{R'}{D}\right)^3 = \frac{1}{4}\frac{I'}{I}\left(\frac{2R'}{D}\right)^3.$$

Dieses Verhältnis ist demnach der Magnetisirung des Gestirns und dem Kubus seines scheinbaren Durchmessers proportional.

Der scheinbare Durchmesser der Sonne und der des Mondes sind ungefähr 30′, also $\frac{2R'}{D}$ kleiner als 0,01, so dass man erhält

$$\frac{F_p}{F_a} < \frac{1}{4}\frac{I'}{I}10^{-6}.$$

Sind diese Gestirne ebenso magnetisch wie die Erde, so ist demnach die grösste Variation, die sie am Aequator in der Declination hervorrufen können, kleiner als $\frac{10^{-6}}{4}$ oder $\frac{1''}{20}$, also absolut unmerklich. Um zu Variationen von 10′ zu gelangen, wie man dieselben häufig bemerkt, müsste die Intensität der Magnetisirung der Sonne und des Mondes 12000 Mal so gross sein als die der Erde. Aber der am kräftigsten magnetisirte Stahl hat keine 10000 Mal so grosse Magnetisirung als die Erde; die Sonne und der Mond müssten demnach, um eine Störung von 10′ hervorzurufen, eine kräftigere Magnetisirung besitzen, als die besten Stahlstäbe.

Man würde zu denselben Schlüssen gelangen, wenn man annimmt, dass der Mond beispielsweise von der Erde magnetisirt wird. Steht der Mond in der Ebene des Aequators, so ist die Einwirkung, die er von der Erde erleidet,

$$f = \frac{4}{3}\pi I\left(\frac{R}{D}\right)^3,$$

und die Intensität der Magnetisirung hat zum Werte

$$I' = kf = \frac{4}{3}\pi Ik\left(\frac{R}{D}\right)^3.$$

Man findet hieraus

$$\frac{I'}{I} = k \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{D}\right)^3 = k \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{60}\right)^3 = \frac{k}{54000}.$$

Welchen Wert man auch für den Coefficienten k annimmt, selbst wenn man voraussetzt, dass man den Mond mit dem weichesten Eisen vergleichen kann, das Verhältnis der Magnetisirungen bleibt stets sehr klein, und die Wirkung des Mondes auf die Erde bleibt absolut unmerklich. In noch viel höherem Grade gilt dies von der Sonne.

Vierter Teil.

Elektromagnetismus.

1. Capitel.

Ströme und magnetische Blätter.

442. Versuch von Oersted. — Aeltere Versuche über elektrische Entladungen hatten bereits gezeigt, dass der Durchgang des Stromes durch einen Leitungsdraht die Wirkung hat, den Magnetismus einer Stahlnadel zu beeinflussen. Diese Erscheinungen, denen man anfangs nur wenig Beachtung schenkte, waren ein erstes Zeichen für die Beziehungen, die zwischen der Elektricität und dem Magnetismus bestehen. Erst 1820 ist die Existenz dieser Beziehungen, infolge des Oersted'schen Versuches, durch die unsterblichen Arbeiten Ampère's vollständig beleuchtet worden.

Wird ein von einem Strome durchflossener geradliniger Leiter einer Magnetnadel genähert, so wird die Nadel im Allgemeinen von ihrer Gleichgewichtslage abgelenkt. Um in jedem Falle die ziemlich complicirten Wirkungen, die je nach der Lage des Magnets und des Stromes gegen einander zu Tage treten, genau zu bestimmen, hat Ampère eine sehr einfache Regel festgestellt: Man denke sich einen Beobachter in dem Drahte so liegend, dass der Strom durch seine Füsse eintritt und durch den Kopf austritt; wenn dann der Beobachter sein Gesicht nach der Nadel richtet, dann sieht er stets den Nordpol sich nach links bewegen; wir nennen deshalb die Seite, nach der der Nordpol vom Strome hinbewegt wird, von jetzt ab die *linke Seite des Stromes.* Wäre die Nadel der Einwirkung der Erde und jeder anderen Einwirkung ausser der des Stromes entzogen, so würde sie sich senkrecht zu demselben stellen.

443. Magnetisches Feld eines Stromes. — Die grundlegende Thatsache, die aus dem Versuche Oersted's folgt, ist also die, dass ein elektrischer Strom von beliebiger Form um sich herum ein wirkliches *magnetisches Feld* schafft.

Dieses Feld besitzt alle bei einem gewöhnlichen magnetischen Felde beobachteten Eigenschaften; denn die Wirkungen, die dasselbe in einem Punkte auf entgegengesetzt gleiche Massen ausübt, sind gleich und einander genau entgegengesetzt. Die Kraft ist ausserdem der betrachteten magnetischen Masse proportional; denn wenn man in die Nähe eines Stromes eine kleine zugleich der Einwirkung der Erde unterliegende Magnetnadel bringt, dann

ist die Richtung, in welcher dieselbe sich einstellt, von ihrem magnetischen Momente unabhängig; die Resultante der beiden Kräfte, die einerseits von dem Erdfelde, andererseits von dem vom Strome geschaffenen Felde herrühren, hat eine feste Richtung, und demnach besteht zwischen den beiden Kräften ein constantes Verhältnis.

Ferner wechselt die Wirkung des Stromes ihr Zeichen, ohne ihre Grösse zu ändern, wenn man einfach die Richtung des Stromes umkehrt; wenn demnach der Leitungsdraht zusammengebogen ist, dann zeigen die beiden sich berührenden Teile desselben, da sie von entgegengesetzt gleichen Strömen durchflossen werden, keine Einwirkung auf einen Magnetpol.

Die Existenz des durch den Strom geschaffenen Feldes kann durch die Herstellung der magnetischen Streifen unzweideutig gezeigt werden. Breitet man nämlich auf einem Papierblatt, durch dessen Mitte senkrecht zu ihm ein geradliniger Strom hindurchgeht, Eisenfeilspäne aus, so verteilen sich dieselben in concentrischen Kreisen, deren Mittelpunkt in der Spur des Stromes liegt. Man schliesst hieraus, dass die Kraftlinien concentrische Kreise sind, deren Mittelpunkt in der Achse des Stromes liegt. Die Kraft ist demnach in jedem Punkte zu der Ebene normal, die durch diesen Punkt und durch den Strom geht, und sie ist nach der linken Seite des Ampère'schen Beobachters gerichtet.

Die einander folgenden Niveauflächen um einen geradlinigen Strom herum bestehen demnach aus einer Reihe von Ebenen, die durch die Achse des Drahtes gehen und mit einander gleiche Winkel bilden. Ebenso verhält es sich in der Nähe eines irgendwie gestalteten Stromes: um jeden Teil des Drahtes entstehen rings herum Niveauflächen, die in der Achse des Drahtes mit einander gleiche Winkel einschliessen.

444. Einwirkung eines geradlinigen Stromes auf einen Pol. — Versuche von Biot und Savart. — Biot und Savart haben durch den Versuch bestimmt, wie die von einem langen, geradlinigen Strom ausgeübte Kraft von Punkt zu Punkt variirt. Sie setzten eine kleine horizontale Magnetnadel, die in verschiedenen Abständen auf einer durch einen verticalen Strom gehenden, zum magnetischen Meridian senkrechten Leiste angebracht wurde, der Einwirkung dieses Stromes aus. Unter diesen Umständen ist die wirksame resultirende Kraft die Summe der horizontalen Componente der Erdkraft und der Kraft φ des Stromes.

Man lässt zunächst die Nadel unter dem Einflusse der Erde allein schwingen, dann in Abständen a und a' vom Drahte unter dem gleichzeitigen Einflusse der Erde und des Stromes. Nennt man n, N und N' die Schwingungszahlen der Nadel während einer und derselben Zeit t in diesen drei Versuchen, so erhält man, wenn man mit K eine Constante bezeichnet, die von der Magnetisirung der Nadel und von deren Trägheitsmomente abhängt,

$$n^2 = KH$$
$$N^2 = K(H + \varphi)$$
$$N'^2 = K(H + \varphi'),$$

woraus folgt

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{N^2 - n^2}{N'^2 - n^2}.$$

Nun hat der Versuch gezeigt, dass, wenn man die Methode alternirender Ströme anwendet, um den Einfluss der Intensitätsänderungen zu eliminiren, man stets erhielt

$$\frac{N^2 - n^2}{N'^2 - n^2} = \frac{a'}{a}.$$

Es folgt hieraus $\varphi a = \varphi' a'$, dass also die Wirkung des Stromes in einem Punkte seinem Abstande von demselben umgekehrt proportional ist.

Andererseits haben die auf die Entladung der Batterieen bezüglichen Versuche, insbesondere die von Colladon und Faraday, und die mit dem Voltameter gemachten genaueren Messungen gezeigt, dass die magnetische Wirkung eines Stromes der Elektricitätsmenge proportional ist, die während der Zeiteinheit hindurchfliesst, also der Intensität i des Stromes.

Die von einem geradlinigen Strome auf eine magnetische Masse m, die in der Entfernung a liegt, ausgeübte Wirkung kann demnach durch den Ausdruck dargestellt werden

$$(1) \qquad \varphi = \frac{kim}{a},$$

in welchem k ein von i, m und a unabhängiger, durch die Wahl der Einheiten bestimmter Coefficient ist.

Zwar ist die in diesem Versuche ebenso wie in dem von Oersted beobachtete Wirkung stets die eines geschlossenen Stromes; aber man sieht leicht ein, dass wenn der betrachtete geradlinige Teil genügend gross und der übrige Teil des Stromes genügend weit entfernt ist, dieser letztere Teil des Kreises nur einen unmerklichen Einfluss ausübt, und dass die beobachtete Wirkung allein von dem dem Punkte nächsten Teile des Stromkreises herrührt. Die Einwirkung des geradlinigen Teiles kann als die eines unendlichen, geradlinigen Stromes aufgefasst werden. Es ergiebt sich demnach folgendes von Biot und Savart aufgestellte Gesetz:

Die Wirkung eines geradlinigen, unendlichen Stromes auf einen Pol ist zu der Ebene normal, die durch den Strom und den Pol geht, ist nach der linken Seite des Stromes gerichtet und steht im umgekehrten Verhältnisse zum Abstande des Stromes vom Pole.

Ein, wenigstens theoretisch, einfacherer Versuch würde zu demselben Resultate führen. Denkt man sich einen verticalen Teil eines Stromkreises und einen Magnet, der in beliebiger Weise auf einem um eine Achse, die mit der des Stromes zusammenfällt, beweglichen Apparat angebracht ist, so findet man, dass das bewegliche System für alle Lagen des Magnets in Ruhe bleibt, welches auch die Richtung und die Intensität des Stromes sein möge. Es folgt hieraus, dass die Momente der auf die verschiedenen Massen des Magnets ausgeübten Wirkungen in Bezug auf die Achse eine der Null gleiche Summe besitzen.

Ist m die im Abstande a von der Achse gelegene magnetische Masse, so erhält man demnach

$$\Sigma m\varphi a = 0.$$

Denkt man sich den Magnet auf zwei entgegengesetzt gleiche Massen $\pm m$ reducirt, die in den Abständen a und a' vom Strome liegen, so geht die Gleichung über in

$$m(\varphi a - \varphi' a') = 0 \text{ oder } \varphi a = \text{Const.},$$

welche Gleichung das Gesetz von Biot und Savart ausdrückt.

Der Versuch schliesst seine Probe sogleich mit ein; denn sowie man die Rotationsachse nicht mehr mit der Stromachse zusammenfallen lässt, verschiebt sich das System und sucht sich in dem einen oder anderen Sinne zu drehen, bis es eine Gleichgewichtslage erreicht hat.

445. Potential eines unbegrenzten, geradlinigen Stromes. — Wir wollen zeigen, dass das magnetische Feld eines Stromes durch ein Potential bestimmt ist, also durch eine Funktion, deren partielle Ableitungen nach den Coordinatenachsen die entsprechenden Kraftcomponenten mit entgegengesetztem Zeichen darstellen.

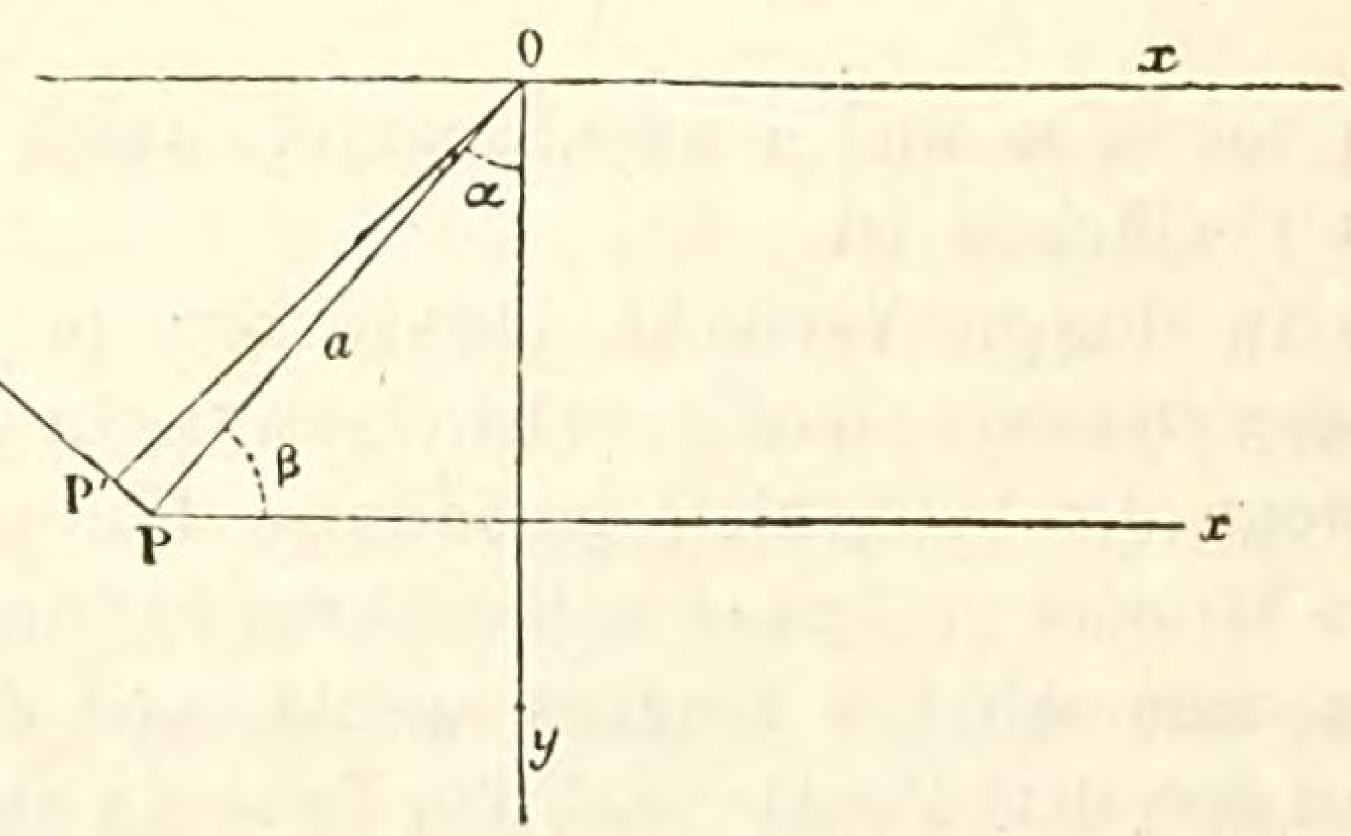


Fig. 96.

In dem Falle eines geradlinigen Stromes sind die Niveauflächen Ebenen, die durch den Strom gehen. Wir wählen die Bahn des Stromes als zAchse und als xyEbene eine zum Strome normale Ebene, die durch den Punkt P geht (Fig. 96). Denkt man sich den Strom hinter der Ebene der Zeichnung, in dieselbe eintretend, so ist die Kraft φ in einem Punkte P der Ebene nach der Ampère'schen Regel zu PO senkrecht und sucht diesen Punkt um den Strom in Richtung der Zeiger einer Uhr zu drehen. Wir bezeichnen mit α den Winkel POy. Für eine sehr kleine Verschiebung PP' in Richtung der Kraft ist die Arbeit auf eine positive, der Einheit gleiche Masse

$$dT = \varphi . PP' = \varphi a d\alpha = ki d\alpha.$$

Da der Winkel β, den die Gerade PO mit einer Parallelen zur xAchse, Px', bildet, der Complementwinkel von α ist, so kann man setzen

$$dT = -ki d\beta.$$

Diese Arbeit ist der entsprechenden Verkleinerung $-dV$ des Potentials gleich; man findet daraus

$$dV = ki\,d\beta$$

und folglich

$$V = ki\,\beta + \text{Const.}$$

Berücksichtigt man, dass der Linienwinkel β zugleich der Neigungswinkel zwischen den beiden vom Punkte P ausgehenden Ebenen ist, von denen die eine durch den Strom geht, die andere zum Strom und zur xAchse parallel ist, so misst das Doppelte dieses Winkels β die Oberfläche ω des von diesem Flächenwinkel auf einer Kugel vom Radius Eins, deren Mittelpunkt in P liegt, ausgeschnittenen Kugelzweiecks; man kann demnach setzen

$$V = \frac{ki}{2}\,\omega + \text{Const.}$$

Die Fläche ω ist nichts anderes als der Körperwinkel, unter dem man vom Punkte P aus die einseitig unendliche, vom Strome begrenzte xzEbene sieht, also die scheinbare Grösse dieser Halbebene.

Man schliesst hieraus, dass *das Potential eines geradlinigen, unendlichen Stromes in einem Punkte bis auf eine Constante dem Produkte aus der Intensität in die scheinbare Grösse einer einseitig unendlichen Halbebene ist, die den Strom zur Kante hat.*

Um das Zeichen dieser scheinbaren Fläche zu bestimmen, erinnern wir daran, dass im Versuche der unendliche geradlinige Strom notwendig einen Teil eines geschlossenen Kreises bildet, und dass, wenn der nicht geradlinige Teil vom Punkte P sehr weit entfernt ist, der Winkel, unter dem man den ganzen Kreis, den wir als eben annehmen können, sieht, sich nur um eine unmerkliche Grösse von der unendlichen Ebene unterscheidet, von der jener Kreis einen Teil ausmacht. Wir wollen *positive Seite* der vom Strome umkreisten Fläche die nennen, die sich zur Linken eines mit dem Strome schwimmenden und nach dem Innern des Kreises schauenden Beobachters befindet, *negative Seite* die, welche sich zu seiner Rechten befindet, und wir nehmen den Winkel ω als positiv oder negativ, je nachdem man vom Punkte P aus die positive oder die negative Fläche des Stromes sieht.

446. Das Potential eines unendlich langen Stromes ist keine eindeutige Funktion der Coordinaten. — In einem gegebenen Punkte liefert der Winkel ω den Wert des Potentials eines unendlichen Stromes nur bis auf eine Constante. Man sieht leicht, welches die Bedeutung dieser Constanten ist. Nehmen wir an, dass die positive der Einheit gleiche Masse im Punkte P (Fig. 96) einen Kreis um den Punkt O in Richtung der Kraft beschreibt und in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so hat der Winkel ω denselben Wert wieder erhalten, den er im Beginn der Bewegung besass, aber die Kraft φ hat eine Arbeit $\varphi.2\pi a$, also $2\pi ki$ oder $4\pi\,\frac{ki}{2}$ geleistet, und die Masse hat die Ebene des Stromes von der negativen Seite aus passirt.

Für n Umgänge der Masse wäre diese Arbeit gleich $4\pi n \frac{ki}{2}$, und das Potential hätte sich um dieselbe Grösse $-4\pi n \frac{ki}{2}$ verkleinert.

Andererseits ist der Ausdruck $\frac{ki}{2}\omega$ die Arbeit, die man gegen die magnetischen Kräfte aufwenden muss, um die Masse vom Punkte P aus ins Unendliche überzuführen, ohne die Ebene des Stromes zu durchschneiden.

Nennt man demnach, wegen der Analogie mit den Eigenschaften der magnetischen Blätter, Potential in einem Punkte die Arbeit, die nötig ist, um eine positive, der Einheit gleiche Masse aus dem Unendlichen auf diesen Punkt überzuführen, so wird dieses Potential ausgedrückt durch

$$(2) \qquad V = \frac{ki}{2}\omega - 4\pi n \frac{ki}{2} = \frac{ki}{2}(\omega - 4\pi n).$$

Das magnetische Potential des Stromes in einem Punkte P ist demnach nicht eine eindeutige Funktion der Coordinaten, sondern eine Funktion mit einer unendlichen Anzahl von Werten, die sich von einander um ein Vielfaches von $4\pi \frac{ki}{2}$, also um ein Vielfaches der Arbeit, die einem vollen Umlaufe einer der Einheit gleichen magnetischen Masse entspricht, unterscheiden. Diese Eigenschaften kann man leicht verallgemeinern.

447. Potential eines Winkelstromes. — Fassen wir zwei unendliche, geradlinige Ströme AA' und BB' (Fig. 97) von derselben Intensität, die in derselben Ebene liegen und in den durch die Pfeile angedeuteten Richtungen

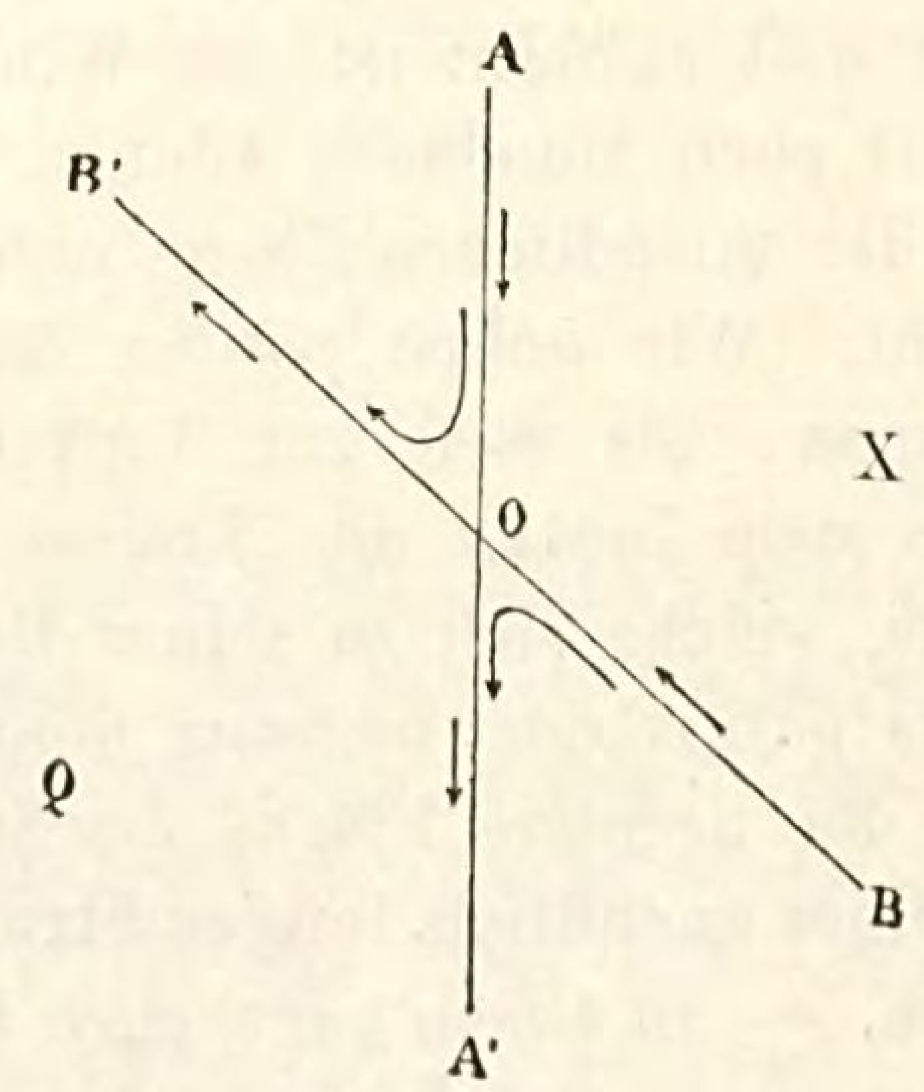


Fig. 97.

fliessen, ins Auge, so ist, wenn Q noch die Projection des Poles P auf die Stromebene bezeichnet, das Potential des Stromes AA' im Punkte P proportional der scheinbaren Grösse der Ebene $AA'X$, das von BB' proportional der scheinbaren Grösse der Ebene $BB'X$.

Bei den angenommenen Stromrichtungen müssen diese beiden scheinbaren Grössen, wenn man voraussetzt, dass die Ebenen der Stromkreise sich

nach rechts ins Unendliche erstrecken, mit entgegengesetzten Zeichen versehen werden, und das resultirende Potential ist der Differenz derselben proportional. Da der gemeinschaftliche Teil $AOBX$ sich forthebt, so ist das Potential demnach proportional der scheinbaren Grösse des Winkels BOA' vermindert um die scheinbare Grösse des Winkels AOB'.

Andererseits ist das System zweier solcher unendlicher Ströme identisch mit dem zweier Winkelströme BOA' und AOB', von denen der erstere seine positive Seite, der andere seine negative Seite dem Punkte zukehrt.

Man kann demnach sagen, dass das Potential eines Winkelstromes wie BOA' auf einen Punkt P der scheinbaren Grösse desselben proportional ist, bis auf eine Funktion der Coordinaten des Scheitels des Winkels, eine Funktion, deren Zeichen von dem Zeichen der dem Punkte zugekehrten Seite des Stromes abhängt, und die übrigens in den Anwendungen, wo es sich um geschlossene Ströme handelt, fortfällt.

448. Potential eines Dreiecksstromes. — Wir nehmen nunmehr an, dass ausserdem in derselben Ebene noch ein dritter Strom CC' (Fig. 98) vorhanden ist, der mit den ersten beiden gleiche Stärke besitzt und mit denselben das Dreieck abc bildet.

Das Potential der beiden ersten auf P ist proportional der scheinbaren Grösse des Winkels BcA' vermindert um den Winkel AcB'. Das Potential des Stromes CC' ist der scheinbaren Grösse der Ebene $CC'X$ proportional, wo diese letztere mit dem Zeichen — versehen ist. Addirt man die Wir-

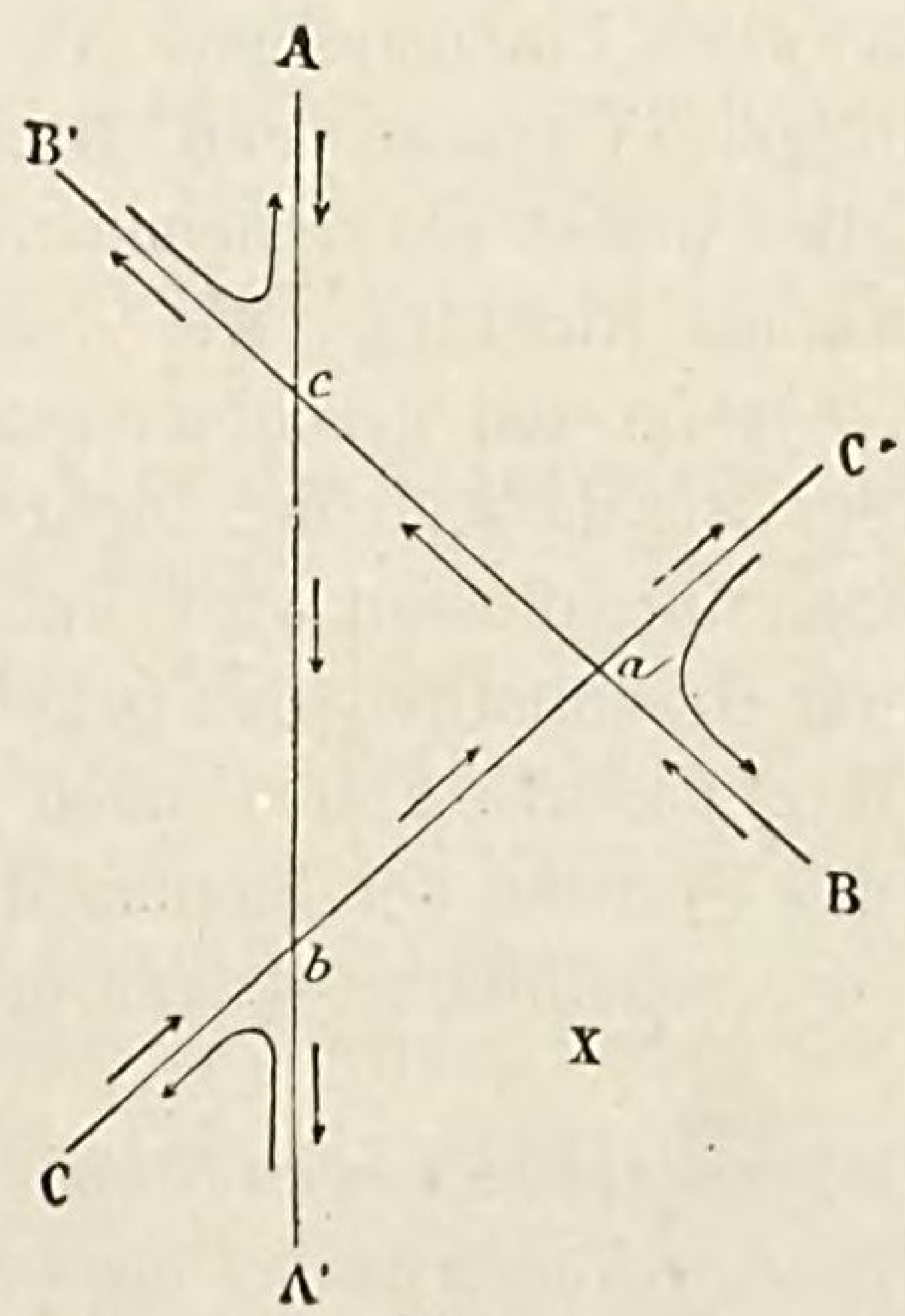


Fig. 98.

kungen der drei Ströme, so hebt sich der gemeinsame Teil $BabA'$ fort, und es bleibt schliesslich in dem Ausdrucke für das Potential die scheinbare Grösse des Dreiecks abc und die der äusseren Winkel AcB', CbA' und BaC', wobei die drei letzteren negativ zu nehmen sind.

Fügen wir zu dem angenommenen Stromsysteme drei Winkelströme von derselben Intensität, wie sie durch die gekrümmten Pfeile angedeutet

sind, hinzu, so führen dieselben in das Potential die scheinbaren Grössen derselben Winkel ein, die diesmal positiv zu setzen sind, so dass nur die scheinbare Grösse des Dreiecks übrig bleibt. Es bleibt aber auch von allen Strömen nur der als wirksam übrig, der um das Dreieck fliesst, da jede der Aussenlinien von entgegengesetzt gleichen Strömen durchflossen wird.

Demnach *ist das Potential eines geschlossenen Dreiecksstromes auf einen Punkt P bis auf eine Constante der scheinbaren Grösse des vom Strome eingeschlossenen Dreiecks oder dem körperlichen Winkel proportional, unter welchem man das Dreieck vom Punkte P aus sieht.*

Bezeichnet man diesen Körperwinkel mit ω, so erhält man demnach

$$V = \frac{ki}{2}\omega + \text{Const.}$$

Der Satz gilt augenscheinlich auch für ein beliebiges Viereck; denn man kann das Viereck stets in zwei Dreiecke zerlegen und annehmen, dass in der Diagonale zwei entgegengesetzt gleiche Ströme vorhanden sind. Durch diese Hinzufügung ändert man nichts an dem elektrischen Systeme; man zerlegt dadurch nur den gegebenen Strom in zwei Dreiecksströme, die ihre positiven Flächen auf derselben Seite haben. Das Potential ist durch die Summe der scheinbaren Grössen der beiden Dreiecke oder durch die scheinbare Grösse des Vierecks gegeben.

449. Potential eines beliebigen geschlossenen Stromes. — Durch die Grenzlinie eines geschlossenen Stromes können wir eine beliebige Fläche legen und dieselbe durch zwei Liniensysteme in eine beliebige Anzahl unendlich kleiner geradliniger Vierecke und Dreiecke zerlegen. Denkt man sich die Grenzlinien aller dieser Figurenelemente von Strömen von derselben Intensität und derselben Richtung, wie der Hauptstrom ist, durchflossen, so erhält man ein System von geschlossenen Strömen, welches dem gegebenen Strome äquivalent ist, da jede der inneren Linien von zwei entgegengesetzt gleichen Strömen durchflossen wird, und da die allein wirksamen Teile die sind, welche in ihrer Gesammtheit den gegebenen Strom ausmachen. Da alle Elementarströme ihre positive Fläche nach derselben Seite gekehrt haben, ist das Potential des Systems der Summe der scheinbaren Grössen der Elementarströme, also der scheinbaren Grösse des vorliegenden Stromes proportional.

Das Potential eines beliebigen geschlossenen Stromes auf einen Punkt P ist bis auf eine Constante durch den Körperwinkel gegeben, unter dem man vom Punkte P aus die Grenzlinie des Stromes sieht.

450. Gleichwertigkeit eines geschlossenen Stromes mit einem magnetischen Blatte. — Ampère'scher Lehrsatz. — Ist ω der Wert des Körperwinkels, unter dem man vom Punkte P aus die Grenzlinie des Stromes sieht, so erhält man nach dem letzten Satze

$$V = \frac{ki}{2}\omega + \text{Const.} \tag{3}$$

Für ein magnetisches Blatt von der Stärke Φ, welches von derselben Grenzlinie eingeschlossen wird, würde man erhalten (329)

$$V = \Phi\omega.$$

Die beiden Potentiale sind demnach bis auf eine Constante gleich, wenn man setzt

$$(4) \qquad \frac{ki}{2} = \Phi = I,$$

wo das Zeichen I ein neuer Ausdruck für die Intensität des Stromes ist, die gerade durch diese Bedingung definirt wird, und die wir die *elektromagnetische Intensität* nennen.

Die Potentiale des Stromes und des Blattes, für welche $I = \Phi$ ist, sind nicht absolut identisch, aber dieselben unterscheiden sich nur durch eine Constante, und ihre Differentialcoefficienten sind dieselben. Folglich sind die von dem Strome ausgeübten Wirkungen für jeden Punkt des Feldes dieselben wie die von dem Blatte ausgeübten. Wir sind so zu dem berühmten Ampère'schen Satze geführt:

Die magnetische Wirkung eines geschlossenen Stromes ist gleich der eines magnetischen Blattes, welches dieselbe Grenzlinie besitzt.

Die positiven Flächen des Stromes und des Blattes entsprechen einander und liegen links von dem im Strome befindlichen Beobachter, der nach der Innenseite des Stromes schaut.

Wir haben diesen wichtigen Satz aus dem Versuche von Biot und Savart abgeleitet, aber man kann denselben als einen experimentell feststehenden, in allen seinen Folgen bestätigten Satz auffassen und ihn als Ausgangspunkt wählen, um alle magnetischen Eigenschaften des Stromes abzuleiten.

451. Bemerkungen über die Aequivalenz eines geschlossenen Stromes und eines magnetischen Blattes. — Es ist wichtig die Bedingungen der Aequivalenz eines Stromes mit einem Blatte besonders zu betonen. Wir haben gesehen, dass bei einem Blatte die Kraft keine stetige Funktion der Coordinaten ist; dieselbe ist im Innern des Blattes constant und wechselt in dem Augenblicke das Zeichen, wo man durch eine der Flächen hindurchgeht; die Kraftlinien gehen von beiden Seiten der positiven Fläche aus und endigen in der negativen Fläche. Diese plötzlichen Aenderungen sind in dem Falle eines geschlossenen Stromes nicht vorhanden. Die Kraft ist in diesem Falle eine stetige Funktion der Coordinaten und die Kraftlinien sind geschlossene Curven, die den Kreis nicht berühren und keine wirksame Masse treffen. Man begreift, dass dieses Verhältnis ohne Widerspruch bestehen kann, denn das dem Strome äquivalente Blatt ist der alleinigen Bedingung unterworfen, von derselben Grenzlinie eingeschlossen zu werden, und man kann annehmen, dass, wenn eine magnetische Masse in der Nähe eines Stromes verschoben wird, das äquivalente Blatt beständig seine Gestalt ändert und vor derselben flieht, ohne je mit ihr zusammenzutreffen.

Die Analogie der beiden Systeme wird noch inniger, wenn man statt der magnetischen Kraft eines Blattes die Induction in Betracht zieht. Denn wir wissen, dass die magnetische Induction eine stetige Funktion der Coordinaten ist, dass die Inductionsströmung in der ganzen Ausdehnung eines orthogonalen Kanals dieselbe bleibt, und dass die magnetische Kraft und die magnetische Induction für jeden ausserhalb der magnetisirten Mittel liegenden Punkt denselben Wert haben. Insbesondere ist die magnetische Induction in der Dicke eines Blattes identisch mit der Kraft, die dort entstehen würde, wenn das Blatt unter Beibehaltung derselben Grenzlinie und derselben magnetischen Stärke in der Weise deformirt würde, dass es nicht mehr den betrachteten Punkt einschliesst, und diese Kraft ist gleich der eines äquivalenten Stromes, der durch die Grenzlinie geht. Ebenso verhält es sich natürlich mit einem beliebigen System von Strömen, woraus man folgendes allgemeine Gesetz findet:

Ein beliebiges System von geschlossenen Strömen ist einem magnetischen Systeme äquivalent, und die Wirkung der Ströme in einem Punkt ist identisch mit der Induction des äquivalenten magnetischen Systems in demselben Punkte.

452. Energie in Bezug auf ein magnetisches System und auf einen Strom. — Das Potential eines Stromes auf einen Punkt P ist bis auf eine Constante gleich $-I\omega$, wenn man mit ω den Körperwinkel bezeichnet, unter dem man die negative Fläche des Stromes sieht. Das Produkt $-mI\omega$ ist die Arbeit, die man aufwenden müsste, um aus dem Unendlichen eine magnetische Masse m in diesen Punkt überzuführen, ohne dass man eine stetige, vom Strome begrenzte Fläche durchschneidet. Die potentielle Energie der Masse m im Punkte P ist demnach bis auf eine Constante gleich $-mI\omega$.

Hat diese Masse, um nach dem Punkte P zu gelangen, n Mal die Fläche des Stromes von der positiven Fläche aus durchschnitten, so hat man jedes Mal eine Arbeit $mI4\pi$ aufwenden müssen; die gesammte Arbeit ist dann

$$mI(4\pi n - \omega).$$

Wird umgekehrt die Masse sich selbst überlassen, so sucht sie ununterbrochen um den Strom zu kreisen und verbraucht bei jeder Umdrehung eine Energie von der Grösse $m4\pi I$.

Diese Stetigkeit der Bewegung ist bei zwei magnetischen Systemen nicht möglich, da das Potential dann eine bestimmte Funktion der Coordinaten ist; dieselbe wäre ausserdem mit dem Gesetze der Erhaltung der Energie nicht vereinbar. In dem Falle von Strömen kann die Bewegung unausgesetzt bestehen, da notwendiger Weise eine fremde Energie in den Vorgang eintritt, wie die chemischen Aktionen, die in der Batterie erfolgen.

Nennt man noch Q die Kraftströmung des magnetischen Systems, welche durch die Fläche von der negativen Seite aus hindurchgeht, so wird die auf die beiden Systeme bezügliche Energie bis auf eine Constante ausgedrückt durch

$$W = -IQ. \qquad (5)$$

Wird das magnetische System sich selbst überlassen, so ist die Arbeit dT der magnetischen Kräfte für eine beliebige, unendlich kleine Verschiebung der Energieänderung entgegengesetzt gleich, und man erhält

$$dT + dW = 0$$

oder

$$dT = IdQ.$$

Die Bewegung des Systems erfolgt demnach so, dass der Wert von Q sich einem Maximum nähert.

Für zwei auf einander folgende durch die Indices 1 und 2 bezeichnete Lagen ist die Arbeit bis auf eine Constante

$$T_1^2 = I(Q_2 - Q_1),$$

doch muss beachtet werden, dass allgemein die Differenz $Q_2 - Q_1$ nicht blos von der End- und Anfangslage des magnetischen Systems abhängt, sondern auch von dem von jeder einzelnen Masse verfolgten Wege; denn man müsste das Glied $m 4\pi I$ zur Arbeit aller derjenigen addiren, die einen Arm des Stromes umkreist haben. Wenn beispielsweise ein gleichmässiger, langer und biegsamer Magnet in der Nähe eines Stromes aufgestellt wäre, dann würde der positive Pol ununterbrochen in der einen Richtung, der negative Pol in der entgegengesetzten um den Strom kreisen.

Immerhin führen, wenn die Teile der Strombahn ebenso wie die des magnetischen Systems starr mit einander verbunden sind, alle Massen, aus welchen der Magnet besteht, notwendig dieselbe Anzahl von Umdrehungen und in derselben Richtung aus, und die entsprechende Arbeit ist gleich $n 4\pi I \Sigma m$. Da die Gesammtmasse eines vollständigen Magnets stets Null ist, so hängt bei starren Magneten die auf irgend eine Verschiebung bezügliche Arbeit nur von der Anfangs- und Endlage ab und nicht von dem durchlaufenen Wege; in diesem Falle ist die Arbeit Null, wenn der Magnet in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt.

Es ist demnach unmöglich, die stetige Bewegung eines Magnets mittels eines Stromes zu erhalten, der durch einen starren Kreis fliesst; die Einwirkung zweier solcher Systeme auf einander ist hier identisch mit der zweier Magnete. Die grössten und kleinsten Werte der Kraftströmung Q entsprechen den Lagen des relativen Gleichgewichtes, des stabilen im ersten Falle, des labilen im zweiten. Die Bewegung kann dagegen dauernd sein, wenn der Kreis deformirbar ist, wenn er zum Beispiel flüssige Teile, Schleifcontacte enthält, oder wenn er in bestimmten Punkten während der Verschiebung des Magnets unterbrochen werden kann.

453. Einwirkung zweier geschlossener Ströme auf einander. — Sind ein geschlossener Strom und ein Blatt, die jedem magnetischen Systeme gegenüber äquivalent sind, auch noch einem andern Strome gegenüber gleichwertig? So sind der Strom C_1 und das Blatt S_1, wenn sie dieselbe Grenzlinie besitzen, einem magnetischen Systeme M_2 gegenüber äquivalent; wir nehmen an, dass dieses magnetische System ein Blatt S_2 ist; die Ein-

wirkung von S_1 und S_2 auf einander ist mit der identisch, welche zwischen S_1 und dem S_2 äquivalenten Strom C_2 erfolgt; aber ist diese letztere Einwirkung dieselbe wie die, welche zwischen den beiden Strömen C_1 und C_2 erfolgen würde? Die Bejahung dieser Frage erscheint wahrscheinlich; aber dieselbe würde sich nur durch einen Inductionsschluss ergeben, und es wäre leicht, Beispiele zu finden, für welche ein derartiger Schluss zu augenscheinlich irrtümlichen Consequenzen führen würde. So können unter passend gewählten Bedingungen die auf einen Magnet seitens eines Magnets und seitens eines weichen Eisenstückes ausgeübten Wirkungen dieselben sein; man dürfte aber nicht daraus schliessen, dass das weiche Eisen und der Magnet auch noch einem andern Weicheisenstück gegenüber äquivalent sind.

Wir erkennen demnach nur als experimentell festgestelltes Resultat, nicht als notwendigen Schluss aus der Theorie, folgenden Satz von Ampère an:

Die Einwirkung zweier geschlossener Ströme auf einander ist identisch mit der zweier magnetischer Blätter, die beziehungsweise je einem derselben äquivalent sind.

454. Relative Energie zweier Ströme. — Die potentielle Energie zweier magnetischer Blätter hat den Wert (**341**)

$$W = -\Phi\Phi' M.$$

Nach dem Ampère'schen Satze muss demnach die zweier geschlossener Ströme bis auf eine Constante durch die Formel dargestellt werden

$$W = -II'M, \tag{6}$$

in der I und I' die Intensitäten der beiden Ströme sind, und wo M die Kraftströmung ist, die von dem einen der Kreise ausgeht und durch den andern von der negativen Seite aus hindurchgeht, wenn die Intensität in jedem derselben der Einheit gleich ist.

Die Arbeit dT der magnetischen Kräfte, die einer unendlich kleinen Verschiebung entspricht, ist gegeben durch die Gleichung

$$dT = -dW = -II'dM. \tag{7}$$

455. Elektromagnetische Rotationen. — Wir haben (**452**) gesehen, dass die Einwirkung eines Magnets und eines starren Stromes auf einander keine dauernde Bewegung hervorrufen kann. Ebenso würde es sich mit zwei starren Strömen verhalten, aber die Unmöglichkeit hört sofort auf, wenn eines der Systeme deformirbar ist, und die letzten Betrachtungen gestatten den grössten Teil der Versuche dieser Art in einfacher Weise zu erklären.

Wir fassen als Beispiel einen geradlinigen, unendlichen Strom, dessen Spur in O (Fig. 99) liegt, und einen Magnet PP' ins Auge, dessen Pol P' gezwungen ist, auf einer zum Strome senkrechten Schiene AB zu gleiten, während der andere Pol P um den Strom vermöge eines beweglichen Contactes, der demselben bei jedem Umlauf den Durchgang gestattet, einen

Kreis beschreiben kann. Der Pol P wird unaufhörlich um den Strom kreisen, und seine Geschwindigkeit wird, wenn von den Reibungen abgesehen wird, stets wachsen, da die magnetische Wirkung des Stromes bei jeder Umdrehung eine Arbeit leistet, die dem Produkte aus $4\pi I$ in die Masse des Poles gleich ist. In Wirklichkeit tritt ein stationärer Zustand ein von dem Augenblicke an, wo die passiven Widerstände der bewegenden Kraft das Gleichgewicht halten. Wir werden mehrere Beispiele von stetigen Bewegungen dieser Art in einem der nächsten Capitel sehen.

Die Wirkung eines Stromes auf sich selbst kann ebenfalls Deformationen und stetige Bewegungen verursachen.

Ist ACB (Fig. 100) ein um eine durch die beiden Punkte A und B gehende Achse beweglicher Teil eines Stromes, der durch jene Punkte mit dem Hauptstrome verbunden ist, so kann man sich vorstellen, dass die Linie AB von zwei entgegengesetzten Strömen von derselben Intensität durch-

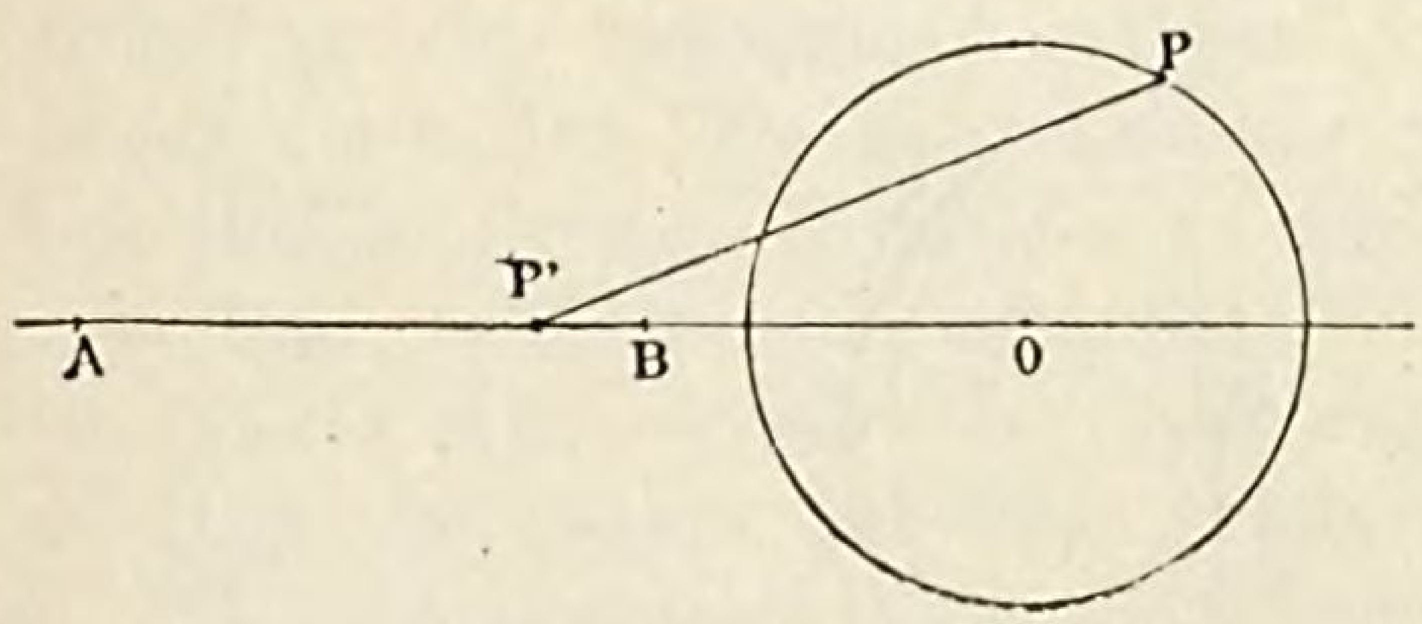


Fig. 99.

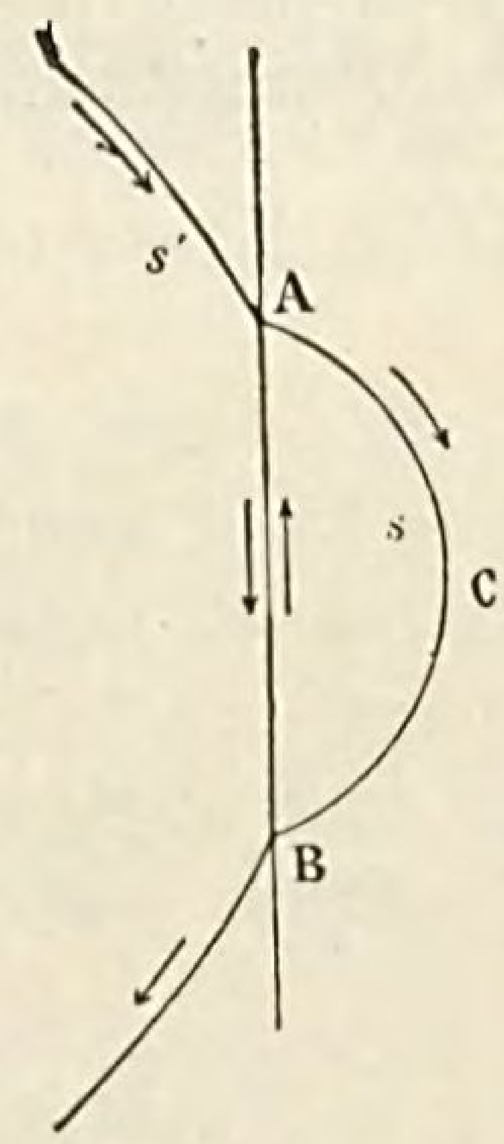


Fig. 100.

flossen wird, wie die des Stromes selbst ist, und so das System in zwei gesonderte, geschlossene Kreise s und s' zerlegen.

Sind in dem Felde keine andern Kräfte vorhanden, als die, welche von den beiden Kreisen herrühren, so ist die auf die beiden Ströme bezügliche Energie

$$W = -I^2 M.$$

Da die Energie einem Minimum zustrebt, verschiebt sich der bewegliche Teil so, dass die Kraftströmung M ein Maximum wird.

Sind die beiden Grenzlinien s und s' eben, so ist klar, dass der bewegliche Teil s sich in die Ebene s' so einstellen wird, dass sie deren Verlängerung bildet; man sieht dies durch die Wirkung, welche die beiden äquivalenten magnetischen Blätter auf einander ausüben würden.

Besteht der Hauptkreis aus einem beweglichen Draht von begrenzter Länge, so geht die Wirkung des Stromes auf sich selbst dahin, ihm eine

möglichst grosse Fläche zu geben, ihn also die Form einer Kreisperipherie annehmen zu lassen.

Ist der Draht elastisch, so dehnt er sich aus. bis die Elasticität den elektromagnetischen Kräften das Gleichgewicht hält.

456. Versuche von Faraday. — In gewissen Fällen erscheint die fundamentale Formel

$$W = -IQ$$

fehlerhaft, indem continuirliche Bewegungen auch dann hervorgerufen werden können, wenn die durch den beweglichen Kreis hindurchgehende Kraftströmung Null oder unveränderlich zu sein scheint.

Wir fassen zum Beispiel einen Bogen ACB einer ebenen Curve (Fig. 101) ins Auge, der um eine durch die Achse eines Magnets PP' gehende Gerade AB beweglich ist, wobei das eine Ende derselben zwischen den Polen, das andere ausserhalb derselben liegt, und wir nehmen an, dass ein Strom vom Punkte A nach dem Punkte B durch den Bogen ACB geht. Die vom Punkte P ausgehende magnetische Kraftströmung, die durch den Teil ACB

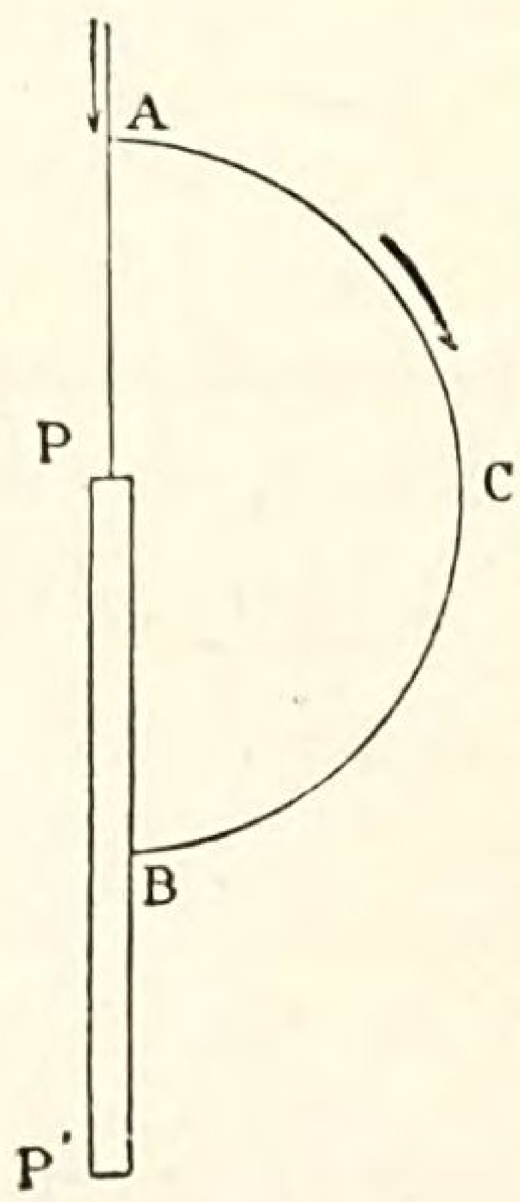


Fig. 101.

des Kreises geht, erscheint als Null, da der Pol in der Ebene des Kreises liegt, und andererseits scheint der Bogen ACB in allen Azimuten eine identische Lage gegen den Pol zu besitzen. Trotzdem nimmt der Bogen eine stetige Rotationsbewegung an, vermöge deren er, wenn der Pol P ein Nordpol ist, sich für einen oberhalb A befindlichen Beobachter im Sinne der Uhrzeiger dreht.

Um diese Erscheinung zu erläutern, ersetzen wir den Strom durch das äquivalente Blatt; wir können annehmen, dass der bewegliche Teil dieses Blattes aus einer elastischen, unendlich ausdehnsamen Platte besteht, die hinter dem Pole eine concave Fläche bildet und demselben ihre negative Seite zukehrt. Da diese Fläche einen möglichst grossen Teil der Strömung aufzufangen sucht, bewegt sie sich in der bezeichneten Richtung und die

Bewegung ist stetig, da das elastische Blatt sich unbegrenzt in sich selbst einzurollen vermag.

Die Aenderung der Kraftströmung für eine Drehung θ der Ebene des Stromes ist dann gleich $2m\theta$; die Arbeit der elektromagnetischen Kräfte in Bezug auf diesen Pol ist $2m\theta I$ für die Verschiebung θ, und für eine ganze Umdrehung $4\pi mI$.

Das Drehungsmoment des Paares in Bezug auf die Achse wird demnach ausgedrückt durch

$$\frac{4\pi mI}{2\pi} = 2mI;$$

es ist zu beachten, dass dieses Moment von der Grösse und der Form des Bogens unabhängig ist.

Was die Wirkung des unteren Poles P' betrifft, so ist dieselbe augenscheinlich Null; denn jeder Teil der Kraftströmung, der von diesem Punkte ausgeht und das Blatt trifft, geht durch dasselbe notwendig zwei Mal so hindurch, dass er zunächst von der positiven Seite und darauf von der negativen Seite eintritt; von dieser Seite kann keine Energieänderung und folglich kein Grund für eine Bewegung herrühren.

Lägen die beiden Pole ausserhalb der Strecke AB, welche die Enden des beweglichen Stromes verbinden, so wäre die Wirkung jedes einzelnen derselben Null; es fände dann keine Rotation statt. Lägen die beiden Pole auf der Strecke AB, so wäre die Gesammtänderung der zu irgend einer Verschiebung des Bogens gehörigen Kraftströmung ebenfalls Null, da die beiden Pole entgegengesetzt gleiche Aenderungen liefern würden. Der Bogen muss demnach unbeweglich bleiben.

Diese verschiedenen Versuche rühren von Faraday her.

457. Andere Form des Ausdruckes für die elektromagnetische Arbeit. — In dem letzten Beispiel ist die einer Drehung θ entsprechende Arbeit $2mI\theta$ gleich dem Produkte aus *der Intensität des Stromes in die vom Bogen ACB bei der Verschiebung geschnittene Kraftströmung.* Man kann den Ausdruck für die Arbeit unter folgender neuen Form verallgemeinern.

Betrachten wir nämlich ein festes magnetisches System, in dessen Felde ein Strom irgend eine Verschiebung oder Deformation erleidet, sind s und s' die beiden einander folgenden Lagen des Stromes (Fig. 102) und Q und Q' die Kraftströmungen des magnetischen Systems, die in beiden Fällen durch die negative Fläche gehen, so ist die entsprechende Arbeit der elektromagnetischen Kräfte $I(Q' - Q)$.

Legen wir zwei Tangentialebenen an die beiden Lagen des Kreises, verbinden wir die Berührungspunkte AA' und BB' und bezeichnen mit Q_1 und Q_2 die den Flächen $A'ACBB'C'A'$ und $A'ADBB'D'A'$ entsprechenden Strömungen, so erhält man augenscheinlich

$$Q' - Q = Q_2 - Q_1.$$

Aber Q_2 ist die von dem Bogen BDA, Q_1 die von dem Bogen ACB während der Verschiebung durchschnittene Kraftströmung; man kann demnach sagen, dass die Arbeit der elektromagnetischen Kräfte gleich ist dem Ueberschuss der von einem der Teile des Kreises durchschnittenen Strömung über die vom andern durchschnittene. Durchsetzen die Kräfte die Ebene der Zeichnung von vorn nach hinten, so sind die Werte der Strömungen für die durch den Pfeil angedeutete Stromrichtung positiv.

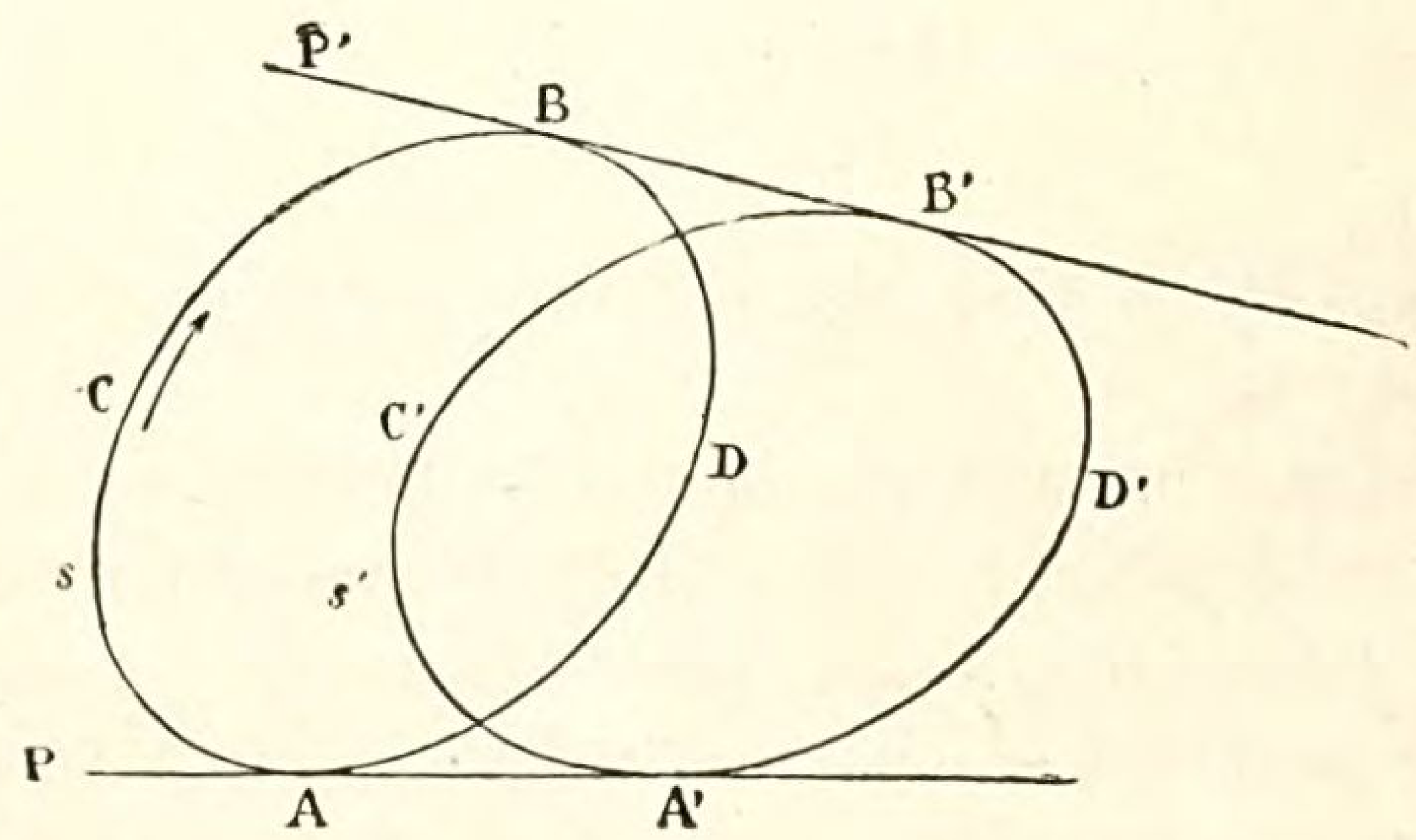


Fig. 102.

Für die Elemente der Curve ACB erfolgt die Bewegung nach rechts von einem Beobachter aus, der sich im Strome befindet und in Richtung der Kraft vor sich hin sieht, und die Kraftströmung tritt mit dem Zeichen — in den Ausdruck für die Arbeit ein. Für die Curve BDA erfolgt die Bewegung nach links, und die geschnittene Kraftströmung ist demnach mit dem Zeichen + behaftet.

Setzt man fest, der vom Kreise geschnittenen Kraftströmung das Zeichen + zu geben, wenn die Bewegung nach der linken Seite des Beobachters erfolgt, und das Zeichen —, wenn dieselbe nach rechts gerichtet ist, so kann man sagen, dass die Gesammtarbeit gleich der algebraischen Summe der von dem Strome durchschnittenen Kraftströmungen ist.

458. Elektromagnetische Wirkung auf ein Stromelement. — Wir sind so dazu gelangt, die Wirkung, die auf einen Strom ausgeübt wird, als Resultante der Wirkungen aufzufassen, die auf jedes der einzelnen Elemente ausgeübt werden, in die man sich denselben zerlegt denken kann: es ist dies dieselbe Aufgabe wie für ein magnetisches Blatt (**344**). Um das erhaltene Resultat auf Ströme anzuwenden, braucht man nur die magnetische Stärke des Blattes durch die Intensität des Stromes zu ersetzen, die Kraft, die auf jedes Element einwirkt, wird ausgedrückt durch

$$(8) \qquad IFds \sin \alpha = IdA,$$

wo dA die Fläche des aus F und ds construirten Parallelogrammes bezeichnet. Demnach:

Die Wirkung, die auf ein in einem magnetischen Felde befindliches Stromelement ausgeübt wird, ist gleich dem Produkte aus der Intensität des

dasselbe durchfliessenden Stromes in die Fläche des aus einer die Intensität des Feldes nach Grösse und Richtung darstellenden Geraden und dem Stromelemente construirten Parallelogrammes. Diese Kraft ist gegen das Parallelogramm normal und nach der linken Seite des in dem Strome befindlichen Beobachters, der in Richtung der Kraft hinschaut, gerichtet.

Rührt das Feld von einem einzigen Pole mit der Masse m her, der sich in P (Fig. 103) im Abstande r von dem Elemente befindet, so ist

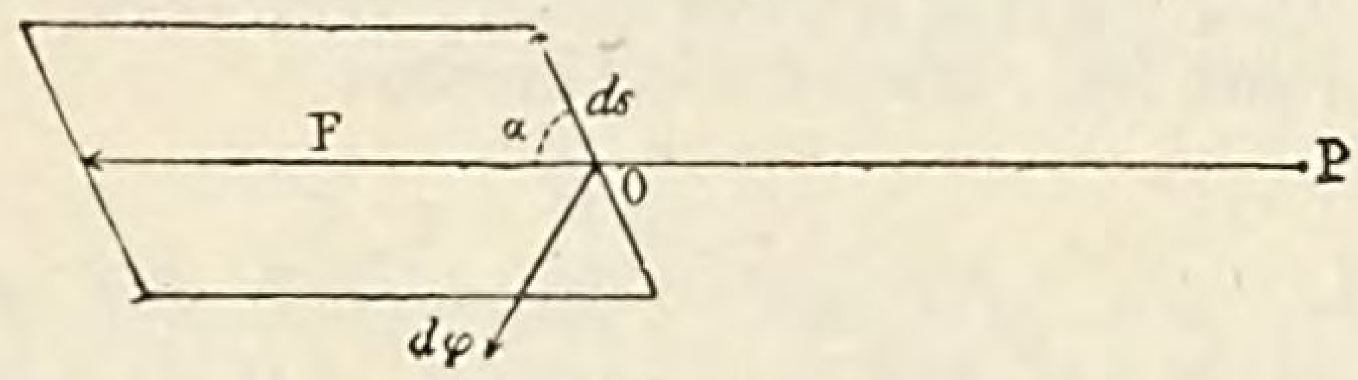


Fig. 103.

$F=\frac{m}{r^2}$; es folgt hieraus, dass die Einwirkung eines Stromelementes und eines Poles auf einander ausgedrückt wird durch

$$(9) \qquad d\varphi=\frac{mI}{r^2}\, ds \sin \alpha.$$

Die Wirkung ist demnach dem Quadrate des Abstandes des Poles vom Elemente umgekehrt proportional; dieselbe greift an dem Elemente an und ist senkrecht zu der Ebene, die durch das Element und den Pol geht.

459. Wirkung zweier Stromelemente auf einander. — Wir haben gesehen (**347**), dass die Wirkung zweier Blätter auf einander als Funktion ihrer beiden Grenzlinien dargestellt werden kann. Die Wirkung zweier Ströme auf einander kann also als die Resultante der zwischen den Stromelementen, aus denen dieselben bestehen, ausgeübten Wirkungen aufgefasst werden.

Diese Elementarwirkung $d^2\psi$ ist nicht bestimmt, aber wenn man die Annahme macht, dass dieselbe längs der die beiden Elemente verbindenden Geraden erfolgt, dann wird sie ausgedrückt durch

$$d^2\psi=-\frac{4II'ds\,ds'}{\sqrt{r}}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}.$$

Nennt man θ und θ' die Winkel der beiden Elemente mit der dieselben verbindenden Geraden und ε den Winkel, den die beiden Elemente mit einander bilden, so erhält man

$$(10) \qquad d^2\psi=+\frac{2II'}{r^2}\left\{\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right\} ds\,ds'.$$

Die Formeln (9) und (10) stellen die von Ampère entdeckten Grundgesetze dar.

Die Methode, die Ampère angewandt hat, um zu diesem Resultate zu gelangen, war von der unsrigen vollständig verschieden; ihre Auseinandersetzung soll den Gegenstand des nächsten Capitels bilden.

460. Elektromagnetische Intensität des Stromes. — Wir haben bis jetzt die Stromintensität als die Elektricitätsmenge definirt, die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Kreises geht. Die so definirte Intensität heisst die *elektrostatische Intensität*; dieselbe kann durch Messungen von Capacitäten und von Potentialen oder durch die elektrochemischen Erscheinungen bestimmt werden. Die oben (**450**) eingeführte elektromagnetische Intensität ist durch die Bedingung definirt, dass sie durch dieselbe Zahl angegeben wird, wie die magnetische Stärke des Blattes, welches mit dem Strome äquivalent ist. Man findet hieraus

$$(11) \qquad I = \frac{ki}{2}.$$

Wir werden später sehen, welches die Bedeutung dieses Faktors $\frac{k}{2}$ ist.

Mit Benutzung des neuen Ausdruckes für die Intensität wird die Wirkung eines geradlinigen unbegrenzten Stromes in der Entfernung a

$$(12) \qquad \varphi = \frac{2I}{a}.$$

Folglich *hat ein Strom in elektromagnetischen Einheiten die Intensität Eins, wenn er einen langen, geraden Leiter durchfliessend in der Einheit der Entfernung eine magnetische Kraft gleich 2 ausübt.*

461. Elektromagnetische Einheiten. — Dieser Wechsel in dem Ausdrucke für die Intensität bringt notwendig entsprechende Aenderungen in der Auswertung der andern elektrischen Grössen mit sich. Soll die Intensität auch jetzt noch die Elektricitätsmenge darstellen, die durch einen Querschnitt des Leiters in der Zeiteinheit geht, so bestimmt die Gleichung

$$Q = It$$

Q und folglich die elektromagnetische Einheit der Elektricitätsmenge.

Erzeugt der Strom keine andere Arbeit als die Erwärmung des Stromkreises, so bestimmt das Joule'sche Gesetz den Ausdruck für den Widerstand und folglich die elektromagnetische Einheit des Widerstandes durch die Beziehung

$$W = I^2 Rt,$$

in welcher W die während der Zeit t entwickelte Wärmeenergie angiebt.

Endlich ist dann die elektromotorische Kraft gegeben durch die Gleichung

$$W = EIt.$$

Die so definirten Einheiten, die man *elektromagnetische* Einheiten nennt, werden wir in den folgenden Capiteln benutzen. Wir werden weiter unten die Beziehungen aufstellen, die zwischen diesen und den *elektrostatischen Einheiten* bestehen.

2. Capitel.

Elementarwirkungen.

462. Methode von Ampère. — Der Weg, den wir bei unsern Ableitungen eingeschlagen haben, ist gewissermassen die Umkehrung von dem, auf welchem Ampère zu dem Gesetze der Elementarwirkungen gelangt ist. Die Wichtigkeit des Gegenstandes und das Interesse, welches die Schlüsse und die Versuche Ampère's bieten, rechtfertigen die wiederholte Behandlung, der wir die Frage nach den Ideen des berühmten Physikers unterziehen wollen.

Ampère betrachtet die von den Strömen auf die Magnete oder auf die Ströme ausgeübten Wirkungen als die Resultante der von den einzelnen Längenelementen, in die der Strom zerlegt werden kann, herrührenden Wirkungen und sucht aus dem Versuch das Gesetz dieser Elementarwirkungen abzuleiten.

Prüft man, bis zu welchem Punkte ein so definirtes Elementargesetz direkt dem Versuche zugänglich ist, so sieht man, dass es allerdings möglich ist, die Wirkung eines einzelnen Poles auf ein Stromelement in aller Strenge zu studiren, indem man mit einem so langen solenoidalen Magnete arbeitet, dass man die Wirkung des andern Poles unberücksichtigt lassen kann, und mit einem beweglich gemachten Teile des Stromes, den man so klein machen kann, als man will; aber die Sache liegt nicht mehr so, wenn man die Wirkung eines Stromelementes auf einen Pol oder die Wirkung zweier Stromelemente auf einander untersucht. Auf ein beweglich gemachtes Stromelement wie auf einen Pol kann man nur den ganzen Stromkreis oder in allen Fällen einen *geschlossenen Strom* wirken lassen.

Die Aufsuchung eines Elementargesetzes in der Weise, wie Ampère die Aufgabe angreift, entspricht demnach, wenigstens im zweiten Falle, einer rein mathematischen Conception; aber die Methode ist darum nicht weniger berechtigt, so lange man sich nur die Aufgabe stellt, die resultirende Wirkung des ganzen Kreises zu bestimmen, wobei das Elementargesetz der einzigen Bedingung unterworfen ist, dass das auf einen geschlossenen Kreis bezogene Integral ein mit der Erfahrung übereinstimmendes Resultat giebt. Doch ist es ebenso klar, dass die so gestellte Aufgabe nicht vollkommen bestimmt ist, und dass mehrere Elementargesetze existiren können, die dieser selben Grundbedingung genügen.

463. Wirkung eines Poles auf ein Stromelement. — Fundamentale Prinzipe. — Bei der Auseinandersetzung seiner Methode geht Ampère von folgenden Prinzipen aus, die man teils als selbstverständliche Axiome, teils als experimentell erwiesene Thatsachen auffassen kann.

I. *Gleichheit der Wirkung und der Gegenwirkung. — Die Wirkung eines Magnets auf einen Strom ist gleich und genau entgegengesetzt der Wirkung des Stromes auf den Magnet.* Dieses allgemeine Naturgesetz wird im vorliegenden Falle durch den Versuch bestätigt; denn wenn man einen Magnet und einen Strom verbindet, führt das sich selbst überlassene System keinerlei Bewegung aus.

II. *Die Wirkung wechselt mit dem Zeichen des Poles und mit der Richtung des Stromes.* — Diese Thatsache ist ein Versuchsresultat. Die Wirkung bleibt dieselbe, wenn man gleichzeitig das Zeichen des Poles und die Richtung des Stromes ändert.

III. *Prinzip der gebogenen Ströme. — Die Wirkung eines gebogenen Stromes auf einen Magnet ist identisch mit der eines geradlinigen Stromes, der dieselben Endpunkte hat.*

Um diesen Satz zu beweisen, hat Ampère gezeigt, dass zwei Leitungsdrähte, die in denselben Endpunkten endigen, von denen der eine geradlinig, der andere gebogen ist, keine Wirkung auf irgend einen Magnet ausüben, wenn sie in entgegengesetzten Richtungen von demselben Strome durchflossen werden.

Hier sind einige Einschränkungen nötig; der gebogene Strom muss von derselben Grössenordnung wie der geradlinige sein und darf sich von demselben nur wenig entfernen; ferner darf derselbe den geradlinigen Strom nicht umfliessen. Man wird sich übrigens dieses Prinzips nur bedienen, um ein Element durch seine drei Projectionen zu ersetzen.

IV. *Die Wirkung irgend eines Magnets und folglich eines Poles auf ein Stromelement ist zu diesem Elemente normal.*

Ampère hat dieses Prinzip in folgender Weise bewiesen. Ein metallischer Kreisbogen, der um eine durch seinen Mittelpunkt gehende, zu seiner Ebene senkrechte Achse beweglich ist, kann auf zwei Quecksilbertropfen gleiten, durch welche der denselben durchfliessende Strom ein- und austritt. Ein beliebiger in der Nähe aufgestellter Magnet lässt den Strom unbeweglich. Die Wirkung des Magnets liegt demnach in einer Ebene, die durch die Rotationsachse geht und folglich gegen den beweglichen Strom senkrecht ist. Dagegen setzt sich der Bogen in Bewegung, sobald die Achse nicht mehr durch den Mittelpunkt geht.

V. *Die Wirkung eines Magnets auf ein Stromelement greift an dem Elemente selbst an.* — Dies ergiebt sich aus folgendem, von Liouville herrührenden Versuch. Ein geradliniger Stromteil ist um seine Achse beweglich gemacht; zu diesem Zwecke taucht derselbe mit seinen Enden in zwei kleine, mit Quecksilber gefüllte Näpfchen, die den Strom zuführen. Das geradlinige

Element nimmt keine Rotationsbewegung an, wie man demselben auch einen Magnet nähern mag.

VI. *Prinzip der Symmetrie.* — Die Anwendung des Prinzips der Symmetrie vervollständigt die Bestimmung der Kraftrichtung.

Man sieht zunächst:

1. Die Wirkung eines Poles auf ein Stromelement, da dieselbe senkrecht gegen die Gerade ist, welche dasselbe mit dem Pole verbindet, ist normal gegen die Ebene, die durch den Pol und das Element geht. Wir verbinden den Pol P mit der Mitte O des Elementes ds (Fig. 104). Wir wissen bereits,

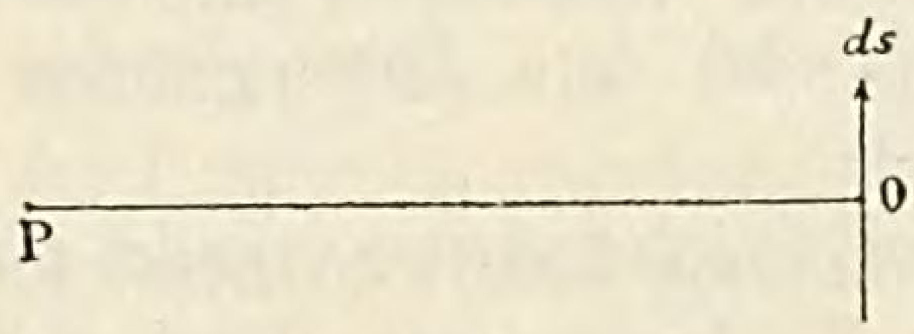


Fig. 104.

dass die Wirkung senkrecht zum Elemente ist. Dieselbe ist gleichfalls senkrecht gegen die Gerade PO, denn wenn man die Figur um 180° um diese Gerade dreht, muss die Kraft ihr Zeichen wechseln, ohne ihre Richtung zu ändern (II);

2. Die Wirkung eines Poles auf ein Stromelement, dessen Richtung in ihrer Verlängerung durch den Pol geht, ist Null. Diese Wirkung soll gegen das Element ds (Fig. 105) senkrecht sein; andererseits darf dieselbe



Fig. 105.

ihre Richtung nicht verändern, wenn man das Element um eine beliebige Grösse um die Gerade PO drehen lässt; dieselbe ist demnach Null.

Ist nunmehr ein Element ds (Fig. 106) vorhanden, welches mit der

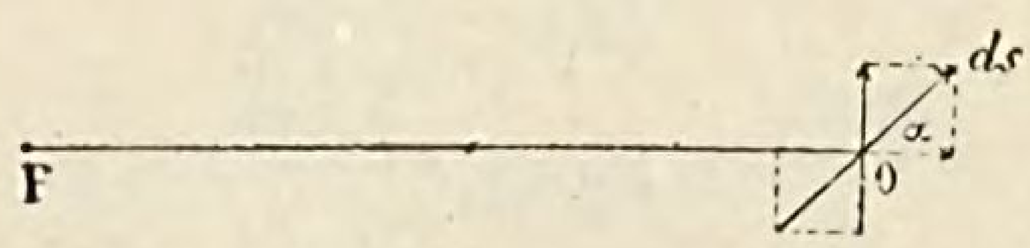


Fig. 106.

Geraden, die dasselbe mit dem Pole verbindet, einen Winkel α bildet, so kann man (III) das Stromelement ds durch seine beiden Projectionen $ds \cos\alpha$ und $ds \sin\alpha$, auf die Gerade PO und auf eine zu dieser senkrechte Richtung ersetzen.

Die Wirkung des Poles auf die erstere Projection ist Null; es bleibt demnach nur die Wirkung des Poles auf $ds \sin\alpha$ übrig. Diese letztere ist, wie man gesehen hat, der Masse m des Poles und der Intensität i des Stromes proportional; dieselbe ist ferner der Länge $ds \sin\alpha$ des Elementes proportional und endlich einer gewissen Funktion des Abstandes $f(r)$. Man

kann demnach, wenn man $d\varphi$ diese Kraft und k einen durch den Versuch zu bestimmenden Coefficienten nennt, setzen

$$d\varphi = mkids \sin\alpha\, f(r).$$

Die Kraft greift ausserdem an dem Element selbst an und ist zur Ebene Pds normal. Was die Richtung derselben betrifft, so ist sie vom Strome aus nach rechts gerichtet, d. h. nach rechts von einem mit dem Strome vorwärts schwimmenden Beobachter, der nach dem Pole hinsieht, während die Wirkung des Elementes auf den Pol in der entgegengesetzten Richtung erfolgt.

VII. *Gesetz von Biot und Savart.* — Die Versuche von Biot und Savart (**444**) haben gezeigt, dass die magnetische Wirkung eines geradlinigen Stromes auf einen Pol dem Abstande des Stromes von dem Pole umgekehrt proportional ist.

Nach einer Bemerkung von Laplace genügt man diesem Gesetze durch die Annahme, dass *die Wirkung eines Poles auf ein Stromelement dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional ist,* wenn man also hat $f(r) = \frac{1}{r^2}\cdot$ Man kann umgekehrt zeigen, dass das quadratische Gesetz das einzige ist, welches den Versuchen von Biot und Savart Genüge leistet.

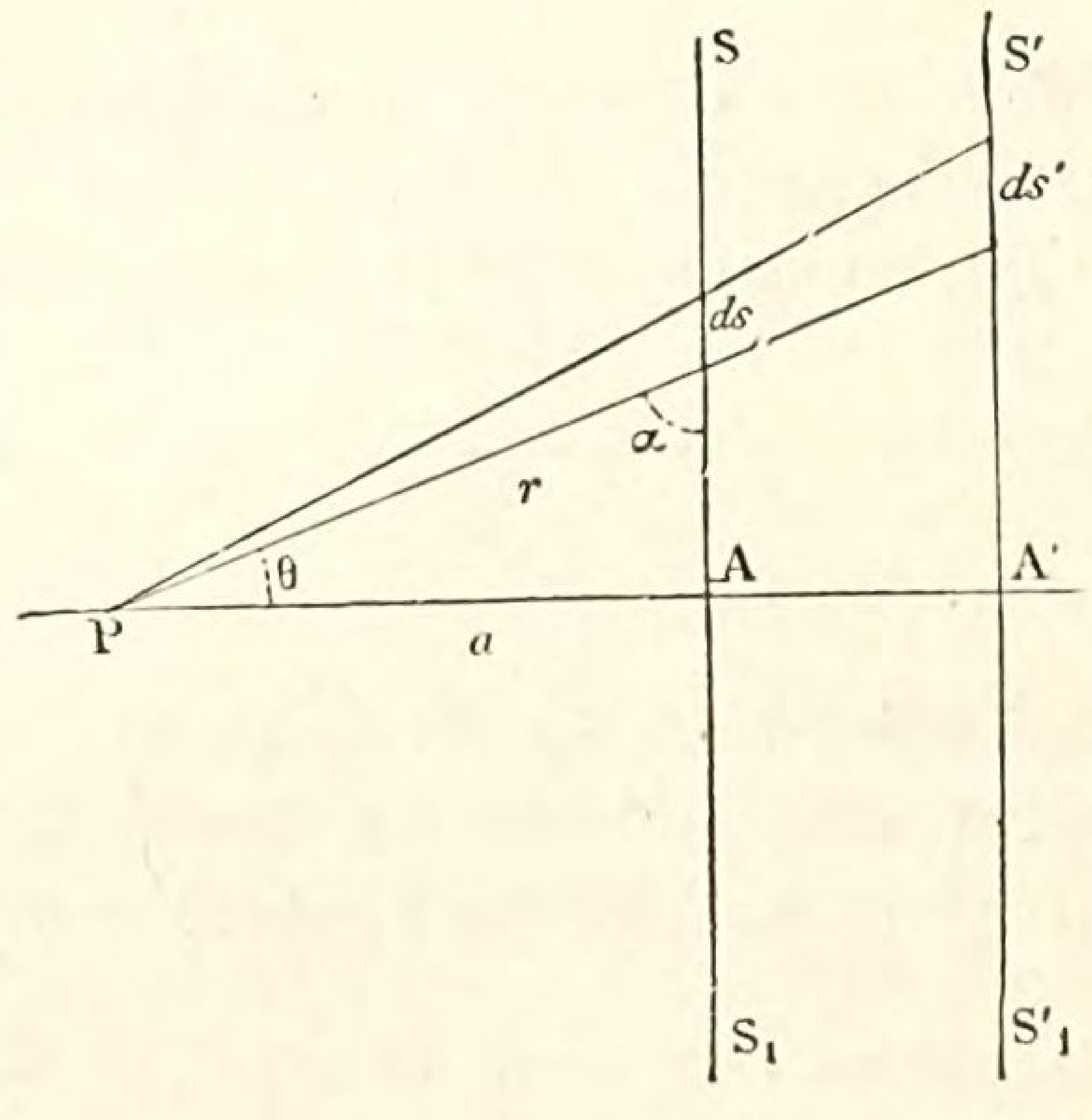


Fig. 107.

Betrachten wir nämlich zwei parallele, geradlinige, unendliche Ströme AS und $A'S'$ von derselben Intensität, in den Abständen a und a' vom Pole P (Fig. 107), so erhält man für zwei Elemente ds und ds', die zwischen denselben durch den Punkt P gezogenen radii vectores liegen und von diesem Punkte die Abstände r und r' besitzen,

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{r}{r'} = \frac{a}{a'},$$

und folglich

$$rds' = r'ds.$$

Das Verhältnis der Wirkungen $d\varphi$ und $d\varphi'$ des Poles auf die Elemente ds und ds' wird dann

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{ds \sin\alpha \frac{1}{r^2}}{ds' \sin\alpha \frac{1}{r'^2}} = \frac{r'^2 ds}{r^2 ds'},$$

und da $r'ds = rds'$ ist,

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{r'}{r} = \frac{a'}{a}.$$

Da die Wirkungen der entsprechenden Elemente sich umgekehrt wie die Abstände a und a' verhalten, ist dies ebenso für die Resultanten der Fall. Dies ist das von der Erfahrung gegebene Gesetz. Die Wirkung eines Poles auf ein Stromelement wird demnach ausgedrückt durch

$$d\varphi = mki \frac{ds \sin\alpha}{r^2}.$$

Da alle diese Kräfte parallel und gleichgerichtet sind, so ist die Wirkung des Poles auf den unendlichen, geradlinigen Strom

$$\varphi = mki \int \frac{ds \sin\alpha}{r^2} = mki \int \frac{ds \cos\theta}{r^2}.$$

Misst man die Länge des Stromkreises von A aus, so ist

$$s = a\,tg\,\theta,\quad ds = a\frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

$$a^2 = r^2 \cos^2\theta;$$

es folgt hieraus

$$\frac{ds \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{a}\cos\theta\, d\theta$$

und folglich

$$\varphi = \frac{mki}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{2mki}{a}.$$

Diese Kraft greift infolge der Symmetrie am Punkte A an, und die Wirkung des geradlinigen Stromes auf den Pol greift an demselben Punkte an, ist aber entgegengesetzt gerichtet.

Dieses letztere Resultat scheint zunächst der Erfahrung zu widersprechen, da in Wirklichkeit die Wirkung des Stromes auf den Pol an dem Pole selbst angreift. Der Widerspruch rührt daher, dass in der Ausführung der Strom notwendig geschlossen ist. Nimmt man zur Vereinfachung an, dass der Hauptkreis in einer durch den Punkt P gehenden Ebene liegt, so sind die Wirkungen $d\varphi$ und $d\varphi'$ zweier entsprechender Elemente ds und ds', die in

dem Winkel $d\theta$ liegen, von entgegengesetzter Richtung und ihren Abständen r und r' umgekehrt proportional. Da der den Kreis schliessende Teil als sehr weit entfernt vorausgesetzt ist, so ist die Differenz der beiden Wirkungen merklich gleich der Wirkung des Elementes ds; da aber $rd\varphi = r'd\varphi'$ ist, so ist der Angriffspunkt der partiellen Resultante der Pol P. Ebenso verhält es sich mit der Gesammtresultante. Was die Wirkung des ganzen Kreises betrifft, so ist dieselbe merklich gleich der des geradlinigen Teiles.

Drückt man die Intensität durch die elektromagnetische Einheit (**460**) aus, so wird die Wirkung eines unendlichen Stromes auf einen im Abstande a befindlichen Pol m ausgedrückt durch $m\frac{2I}{a}$, und die Elementarformel geht über in

(1) $$d\varphi = \frac{mIds \sin\alpha}{r^2},$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $\frac{m}{r^2}$ die magnetische Wirkung F der Masse m auf den vom Stromelemente eingenommenen Raum ist, in

(2) $$d\varphi = IFds \sin\alpha = IdA,$$

wenn man mit dA die Fläche des aus dem Elemente und der Kraft F construirten Parallelogrammes bezeichnet.

Die auf einen in einem magnetischen Felde befindlichen Strom Ids ausgeübte Wirkung hängt nur von der Intensität des Feldes in diesem Punkte ab, welches auch das System sein möge, von dem die Kraft herrührt. Man erhält demnach den bereits früher (**458**) ausgesprochenen Satz:

Die auf ein in einem magnetischen Felde befindliches Stromelement ausgeübte Wirkung ist gleich dem Produkte aus der Intensität des Stromes in die Fläche des aus dem Stromelemente und der Intensität des Feldes construirten Parallelogrammes. Diese Kraft ist zur Ebene des Parallelogrammes normal und nach der linken Seite eines in dem Strome befindlichen Beobachters gerichtet, der in Richtung des Feldes hinschaut.

Die Ebene des Parallelogrammes, gegen welche die elektromagnetische Kraft senkrecht ist, nannte Ampère die *Leitebene*.

Obwohl wir die eben definirte Kraft als Elementarkraft bezeichnet haben, kann diese Kraft im strengsten Sinne des Wortes nicht als solche bezeichnet werden, wie auch Ampère bemerkt: „man kann nicht Elementarkraft nennen weder eine Kraft, die zwischen zwei Elementen wirkt, die nicht derselben Natur sind, noch eine Kraft, die nicht längs der Geraden wirkt, welche die beiden Punkte, zwischen denen dieselbe wirkt, verbindet."

464. Wirkung eines Poles und eines Stromes auf einander. — Von diesem Elementargesetz ausgehend, kann man wie oben (**346**) zeigen, dass die Wirkung eines der Einheit gleichen Poles, der sich im Anfangspunkt der Coordinaten befindet, auf ein Stromelement ds, welches in einem Punkte liegt, dessen Coordinaten x, y und z sind, die Componenten hat

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
d\xi &= \frac{I}{r^3}(ydz - zdy),\\
d\eta &= \frac{I}{r^3}(zdx - xdz),\\
d\zeta &= \frac{I}{r^3}(xdy - ydx).
\end{aligned}
$$

Man sieht, dass das Moment dM_z dieser Kraft gegen die zAchse ist

$$dM_z = xd\eta - yd\xi = \frac{I}{r^3}[z(xdx + ydy) - (x^2 + y^2)\,dz].$$

Die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

liefert

$$xdx + ydy + zdz = rdr.$$

Es folgt hieraus

$$dM_z = \frac{I}{r^3}[z(rdr - zdz) - (r^2 - z^2)dz] = \frac{I}{r^2}(zdr - rdz) = -Id\left(\frac{z}{r}\right).$$

Nun ist $\frac{z}{r}$ der Cosinus des Winkels γ, den die Gerade r mit der zAchse bildet, man erhält demnach

$$dM_z = -Id\cos\gamma,$$

so dass das Moment M_z der von einem Pole auf irgend einen Bogen AB ausgeübten Wirkungen den Wert hat

$$(4)\qquad M_z = I(\cos\gamma_a - \cos\gamma_b).$$

Ist der Kreis geschlossen, so ist dieses Moment Null, und da die Richtung der zAchse beliebig gewählt ist, so sieht man, dass *die Wirkung eines Poles auf einen geschlossenen Kreis durch den Pol geht.* Umgekehrt: *die Wirkung eines geschlossenen Kreises auf einen Pol geht ebenfalls durch den Pol.*

465. — Statt den von uns eingeschlagenen Weg zu verfolgen und zu beweisen, dass dem Gesetze von Biot und Savart durch eine im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes stehende Wirkung genügt wird, hätte man auch — und das wäre das Strengere gewesen — die Funktion $f(r)$ unbestimmt lassen und als experimentell erwiesene Thatsache annehmen können, dass die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen Pol durch den Pol geht.

Das Moment der Wirkung eines der Einheit gleichen Poles auf ein Stromelement ds in Bezug auf die zAchse wäre dann

$$dM_z = -Ir^2 f(r)\,d\cos\gamma,$$

und das auf einen Bogen AB bezügliche Moment wäre

$$M_z = -I\int_A^B r^2 f(r)\,d\cos\gamma = I\int_B^A r^2 f(r)\,d\cos\gamma.$$

Integrirt man diesen Ausdruck partiell, so ergiebt sich

$$M_z = I\big[r^2 f(r)\cos\gamma\big]_B^A - I\int_B^A \cos\gamma\, d[r^2 f(r)].$$

Ist der Kreis geschlossen, so ist das erste Glied der rechten Seite Null. Da das Moment ebenfalls Null sein muss, welches auch die Form des von dem Strome durchflossenen Kreises sein mag, so muss auch das zweite Glied identisch Null sein, das Produkt $r^2 f(r)$ muss demnach eine Constante sein und folglich die Kraft im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes stehen.

Endigt der Bogen ohne geschlossen zu sein in zwei Punkten A und B einer Geraden, um die derselbe sich drehen kann, so ist das Paar der Drehung im Allgemeinen nicht Null.

Nehmen wir an, dass die Punkte A und B auf einer vom Pole ausgehenden Geraden auf derselben Seite vom Pole aus liegen, so ist das Moment der Kräfte gegen diese Achse allerdings Null, und der Strom erhält keinerlei Rotationsbewegung um die Gerade.

Wenn dagegen die Punkte A und B zu beiden Seiten des Poles liegen, dann sind die Winkel γ_b und γ_a, der eine gleich Null, der andere gleich π; in diesem Fall ist das Drehpaar gleich $2I$ und der Bogen rotirt unaufhörlich in demselben Sinne.

Wir finden so die Erklärung der verschiedenen Eigentümlichkeiten des Faraday'schen Versuches (**456**) wieder.

466. — Die Componenten X, Y und Z der Wirkung eines Stromes auf einen im Anfangspunkte der Coordinaten befindlichen Pol sind nach dem Vorhergehenden

(5)
$$X = -I\int \frac{ydz - zdy}{r^3},\quad Y = -I\int \frac{zdx - xdz}{r^3},\quad Z = -I\int \frac{xdy - ydx}{r^3}.$$

Setzt man

(6)
$$A = \int \frac{ydz - zdy}{r^3} = G\cos\lambda,\quad B = \int \frac{zdx - xdz}{r^3} = G\cos\mu,\quad C = \int \frac{xdy - ydx}{r^3} = G\cos\nu,$$

mit der Bedingung

$$A^2 + B^2 + C^2 = G^2,$$

so erhält man

$$X = -IA = -IG\cos\lambda,$$
$$Y = -IB = -IG\cos\mu,$$
$$Z = -IC = -IG\cos\nu,$$

und folglich

(7) $$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = IG.$$

Der Faktor G ist die Wirkung des betrachteten Kreises im Punkte P, wenn jener Kreis von einem Strome von der Intensität Eins durchflossen wird. Man kann diese Wirkung durch eine Gerade PG darstellen, die G proportional ist und mit den Achsen die Winkel λ, μ, ν bildet.

467. Aequivalenz eines Stromes mit einem magnetischen Blatte. — Da die Wirkung eines magnetischen Feldes auf ein Stromelement mit der desselben Feldes auf das entsprechende Element der Grenzlinie eines vom Strome begrenzten magnetischen Blattes identisch ist, so folgt, dass die Wirkung eines Stromes auf einen Pol identisch ist mit der eines Blattes von der Stärke I, dessen positive Fläche links vom Strome liegt.

Das magnetische Potential eines Stromes auf einen Punkt P ist demnach (**329**) bis auf eine Constante gleich dem Produkt aus der Intensität I in den Winkel ω, unter welchem man von diesem Punkte aus die positive Seite einer vom Kreise begrenzten Fläche sieht, also die Seite, die links von einem Beobachter liegt, der dem Strome folgt und nach innen schaut. Der Winkel ω stellt auch die Strömung dar, die eine im Punkte P liegende, der Einheit gleiche Masse gegen jene Fläche aussenden würde.

Da die Kraftcomponenten den partiellen Ableitungen des Potentials entgegengesetzt gleich sind, so sieht man, dass der Körperwinkel, der einer vom Anfangspunkte der Coordinaten aus gesehenen Fläche $d\omega$ entspricht, durch die Gleichungen gegeben ist

(8) $$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^3}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial z} = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^3}.$$

468. Wirkung zweier Stromelemente. — Die Wirkung zweier Stromelemente auf einander kann nach Ampère in derselben Weise mittels einiger Prinzipe und einiger der Erfahrung entnommener Thatsachen festgestellt werden.

I. *Gleichheit der Wirkung und der Gegenwirkung.* — Dieses Prinzip lässt eine experimentelle Bestätigung nicht zu, so lange es sich um zwei Stromelemente handelt. Man muss dasselbe als grundlegende Hypothese auffassen; dasselbe schliesst als Folgerung ein, dass die Wirkung zweier Elemente auf einander längs der dieselben verbindenden Geraden gerichtet ist. Ausserdem ist die Wirkung zweier Stromelemente auf einander augenscheinlich der Länge jedes einzelnen Elementes, der Intensität des durch jedes einzelne gehenden Stromes und einer noch zu bestimmenden Funktion des Abstandes der Elemente sowohl, als ihrer gegenseitigen Richtung proportional.

II. *Die Wirkung wechselt ihre Richtung, wenn man die Richtung eines einzelnen Stromes wechselt; dieselbe bleibt die nämliche, wenn man gleichzeitig die Richtungen beider Ströme wechselt.* Dies ist eine allgemeine, experimentell festgestellte Eigenschaft der elektrischen Ströme.

III. *Prinzip der Symmetrie.* — Es folgt aus dem Prinzip der Symmetrie, dass die Wirkung zweier Elemente a und b (Fig. 108), von denen jedes in einer das andere in seiner Mitte senkrecht schneidenden Ebene liegt, auf einander Null ist.

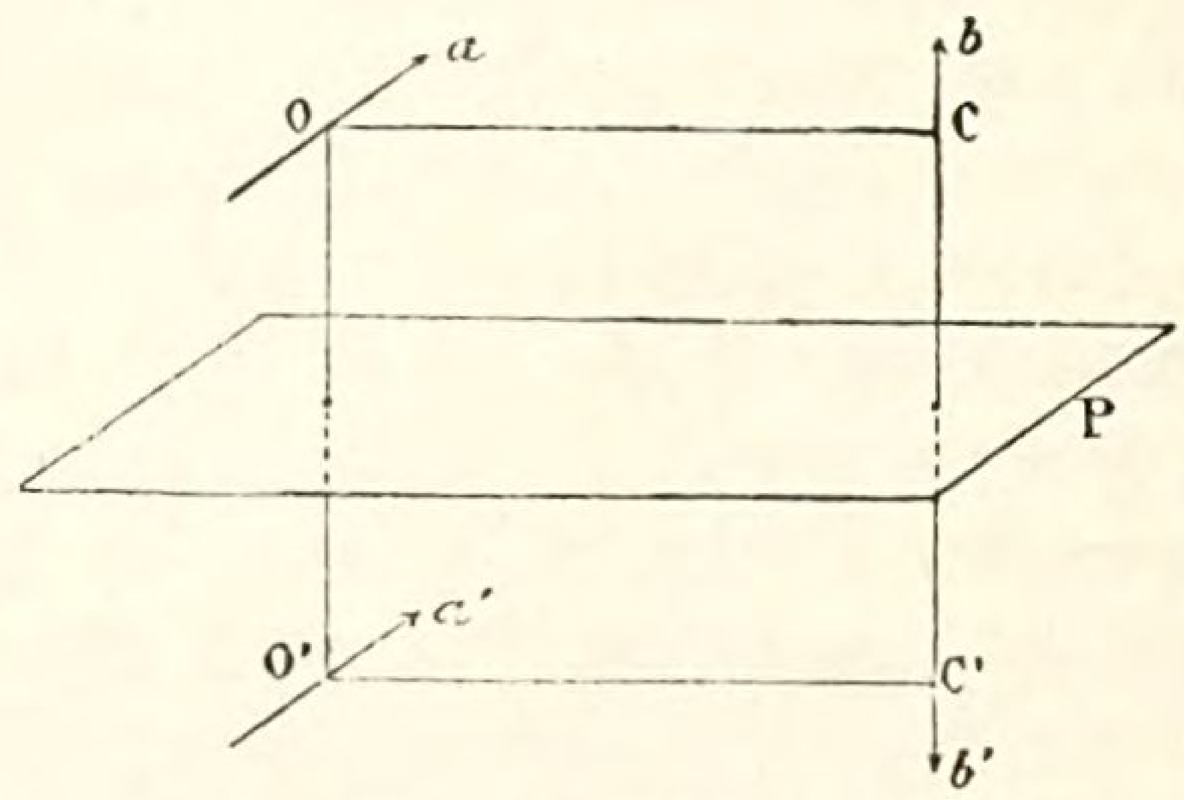


Fig. 108.

Fassen wir nämlich das zum System ab in Bezug auf eine mit dem Elemente a und mit der die Mitten der Elemente verbindenden Geraden OC parallele Ebene symmetrische System $a'b'$ ins Auge, so sind die Wirkungen von a auf b und von a' auf b' beziehungsweise längs OC und $O'C'$ gerichtet und haben vermöge der Symmetrie denselben Sinn. Nun ist aber das zweite System kein anderes als das erste, wenn man in demselben die Stromrichtung in dem Elemente b gewechselt hätte; die Kraft hätte also ihre Richtung durch die Wirkung dieser Umkehrung umkehren müssen; da sie es nicht thut, ist sie demnach Null.

Die Kraft ist insbesondere Null, wenn das Element a gegen die die Mitten beider Elemente verbindende Gerade senkrecht oder längs dieser Geraden gerichtet ist. Dies sind die beiden Fälle, von denen man wird Gebrauch machen müssen.

IV. *Prinzip der gebogenen Ströme.* — Das Prinzip der gebogenen Ströme kann wie oben (**463**) und mit denselben Einschränkungen angewendet werden;

man kann stets ein Stromelement durch seine Projectionen auf drei zu einander rechtwinklige Achsen ersetzen.

Wir betrachten zwei Elemente a und b (Fig. 109) in beliebiger Lage; ds und ds' seien ihre Längen, i und i' die auf eine beliebige Einheit bezogenen Intensitäten der sie durchfliessenden Ströme, θ und θ' die Winkel ihrer Richtungen gegen die ihre Mitten verbindende Gerade OO', r die Entfernung OO', endlich ω der Winkel zwischen den beiden durch die Gerade OO' und die Elemente gelegten Ebenen.

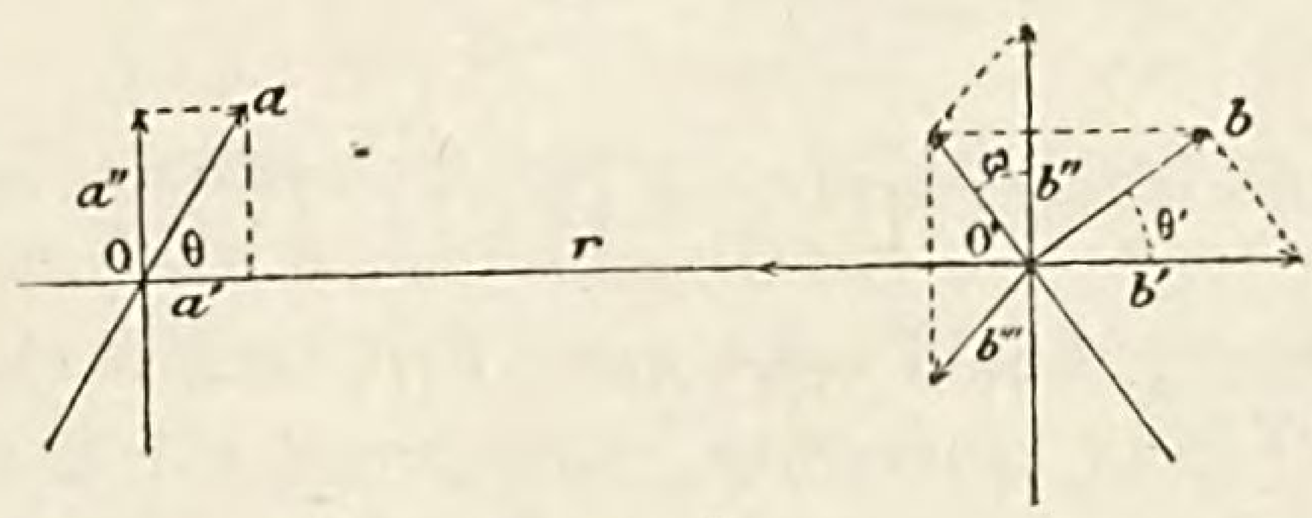


Fig. 109.

Wir wählen als Ebene der Zeichnung die Ebene, die durch das Element ds und die Gerade OO' geht, und ersetzen die einzelnen Elemente durch ihre Projectionen auf drei zu einander rechtwinklige Achsen; die eine dieser Achsen sei die Gerade OO', die andere eine Gerade in der Ebene der Zeichnung, und die dritte ist zu dieser Ebene senkrecht. Das Element a hat nur zwei Projectionen

$$a' = ds \cos\theta,$$
$$a'' = ds \sin\theta;$$

die drei Projectionen des Elementes b sind

$$b' = ds' \cos\theta',$$
$$b'' = ds' \sin\theta' \cos\omega,$$
$$b''' = ds' \cos\theta' \sin\omega.$$

Die Gesammtwirkung setzt sich aus den Wirkungen der einzelnen Elemente a' und a'' auf jedes einzelne Element b', b'', b''' zusammen.

Von diesen sechs Wirkungen sind vier nach dem Prinzip der Symmetrie Null, nämlich die von a' auf b'' und b''' und die von a'' auf b' und b'''.

Es bleibt demnach nur noch die Wirkung von a' auf b' und die von a'' auf b'' zu untersuchen.

Die erstere erfolgt zwischen Elementen, die längs derselben Geraden gerichtet sind, man kann dieselbe darstellen durch

$$i i' ds ds' \cos\theta \cos\theta' F(r).$$

Die zweite erfolgt zwischen einander parallelen Elementen, die zu der ihre Mitten verbindenden Geraden senkrecht sind, man kann dieselbe darstellen durch

$$i i' ds ds' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega f(r),$$

wo die Funktion f des Abstandes von der im vorigen Falle eingeführten Funktion F verschieden ist, da die Bedingungen nicht dieselben sind.

Die Gesammtwirkung $d^2\psi$ wird demnach durch die Formel ausgedrückt

$$(9) \qquad d^2\psi = ii'\, ds ds' \left[\cos\theta \cos\theta' F(r) + \sin\theta \sin\theta' \cos\omega\, f(r)\right].$$

Bezeichnet man mit ε den Winkel zwischen den beiden Elementen, so erhält man

$$\cos\varepsilon = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos\omega,$$

und man kann daher auch setzen

$$(10) \qquad d^2\psi = ii'\, ds ds' \Big[\cos\theta \cos\theta' \left[F(r) - f(r)\right] + \cos\varepsilon\, f(r)\Big].$$

469. Bestimmung der Funktionen $F(r)$ und $f(r)$. — Um die Funktionen $F(r)$ und $f(r)$ zu bestimmen, muss man auf die Erfahrung zurückgehen, und man kann verschiedene Methoden anwenden, je nach der Erscheinung, an die man sich wendet. Wir wählen den Gang von Ampère, der zwar vielleicht vom mathematischen Standpunkte aus nicht der strengste ist, der aber am schnellsten zur schliesslichen Form der Funktionen führt.

Man stützt sich dabei auf folgende zwei von Ampère ersonnene Versuche:

V. *Wenn für drei ähnliche Ströme von derselben Intensität die homologen Dimensionen eine geometrische Progression bilden, sich also wie $1 : m : m^2$ verhalten, und wenn dieselben ausserdem so liegen, dass die Abstände der beiden äusseren vom inneren sich wie $1 : m$ verhalten, dann sind die Wirkungen der äusseren Ströme auf den inneren entgegengesetzt gleich.*

Ist der letztere längs einer durch den Aehnlichkeitspunkt gehenden Geraden beweglich, und verschiebt man ihn aus seiner Gleichgewichtslage, so kehrt er von selbst in dieselbe zurück, das Gleichgewicht ist also stabil.

Ampère hat diesen Versuch mit drei Kreisströmen ausgeführt, die in derselben Ebene lagen, während der innere Strom um eine zu dieser Ebene senkrechte Achse drehbar war.

VI. *Die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement ist zum Elemente normal.* — Die Anordnung dieses letzteren Versuches ist dieselbe wie für die Wirkung der Magnete auf die Ströme (**463**, IV).

Wir fassen die drei ähnlichen Ströme des ersten Versuches (V) ins Auge. Für die Gleichgewichtslage genügen die Abstände dreier homologer Punkte A, B und C (Fig. 110) der Kreise vom Aehnlichkeitspunkte O der Bedingung

$$\frac{OA}{1} = \frac{OB}{m} = \frac{OC}{m^2};$$

man findet hieraus

$$OA - OB = AB = OA\,(1 - m)$$
$$OB - OC = BC = OA\, m(1 - m),$$

und folglich

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{m}.$$

Für drei homologe Stromelemente a, b und c sind die bezüglichen Längen ds, mds, m^2ds; ist der Abstand der ersten beiden r, so ist der zwischen dem zweiten und dritten mr.

Nimmt man an, dass jedes Element in dem mittleren Kreise, wie b, sich zwischen den beiden andern ihm entsprechenden a und c im Gleichgewichte befindet, so befindet sich der ganze Strom S' zwischen den zwei ähnlichliegenden S und S'' im Gleichgewicht. Diese Bedingung erscheint nicht immer als notwendig, aber sie ist hinreichend und ermöglicht die Bestimmung der Form der beiden Funktionen $F(r)$ und $f(r)$.

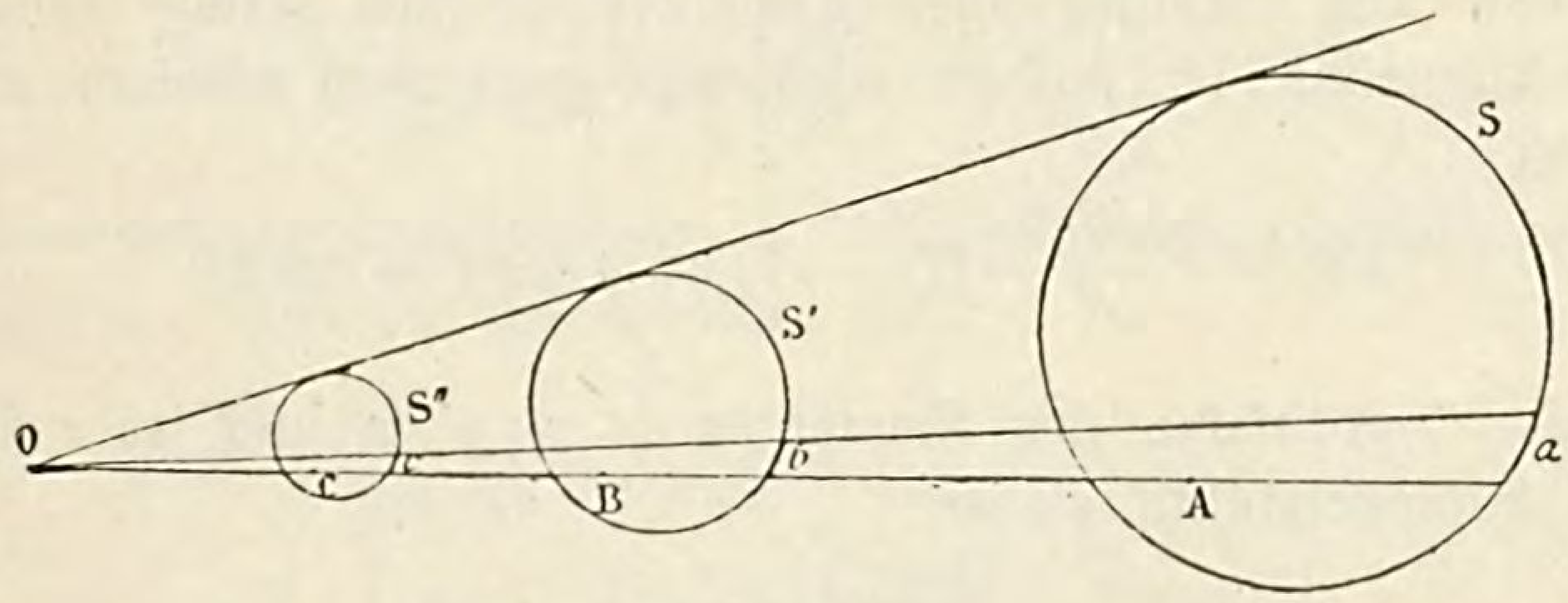


Fig. 110.

Es folgt nämlich aus derselben, dass die auf das Element b ausgeübte Wirkung sich nicht ändern darf, wenn man a durch c, also ds durch m^2ds und r durch mr ersetzt; die Gleichung (9) liefert dann, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $ii'ds\,ds'$ fortlässt und beachtet, dass die Winkel θ und θ' gleich sind und der Winkel ω Null ist

$$\cos^2\theta F(r) + \sin^2\theta f(r) = m^2 [\cos^2\theta F(mr) + \sin^2\theta f(mr)].$$

Da dieser Bedingung genügt werden muss, welches auch die besonderen Werte von m, θ und r sein mögen, so muss einzeln sein

$$m^2F(mr) = F(r),$$
$$m^2f(mr) = f(r).$$

Setzt man $r = 1$ und $m = r$, so ergiebt sich

$$r^2F(r) = \text{Const} = h,$$
$$r^2f(r) = \text{Const} = kh,$$

und folglich

$$F(r) = \frac{h}{r^2},$$

$$f(r) = k\frac{h}{r^2}.$$

Demnach sind beide Funktionen $F(r)$ und $f(r)$ dem Quadrate des Abstandes der beiden Elemente von einander umgekehrt proportional.

Der Ausdruck für die Elementarwirkung geht dann über in

$$(11)\qquad d^2\psi = \frac{hi i' ds ds'}{r^2}[k \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos\omega],$$

oder

$$(12)\qquad d^2\psi = \frac{hi i' ds ds'}{r^2}[(k-1)\cos\theta \cos\theta' + \cos\varepsilon].$$

470. Bestimmung des Verhältnisses der beiden Constanten. — Der letzte Versuch (VI) ermöglicht die Bestimmung des Verhältnisses k der beiden Constanten.

Wir legen den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte des als beweglich angenommenen Elementes ds' und die xAchse in die Richtung des Elementes selbst. Die Wirkung eines Elementes ds eines geschlossenen Kreises, in dem die Intensitat i ist, auf ds' wird, wie man eben gesehen hat, ausgedrückt durch

$$d^2\psi = \frac{hi i' ds ds'}{r^2}[(k-1)\cos\theta \cos\theta' + \cos\varepsilon].$$

Sind die Coordinaten des Elementes ds x, y, z, und ist r dessen Abstand vom Anfangspunkte, so ist

$$\cos\theta' = \frac{x}{r},$$

$$\cos\theta = \frac{dr}{ds},$$

$$\cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}.$$

Die Elementarwirkung kann demnach geschrieben werden in der Form

$$d^2\psi = \frac{hi i' ds ds'}{r^2}\left[(k-1)\frac{x}{r}\frac{dr}{ds} + \frac{dx}{ds}\right]$$

$$= hi i' ds'\left[(k-1)\frac{x}{r^3}dr + \frac{dx}{r^2}\right],$$

und die Projection dieser Kraft auf die xAchse ist

$$d^2\psi \cos\theta' = d^2\psi \frac{x}{r} = hi i' ds'\left[(k-1)\frac{x^2 dr}{r^4} + \frac{x\,dx}{r^3}\right].$$

Die der xAchse parallele Componente der Wirkung des geschlossenen Kreises auf das Element ds' wird demnach ausgedrückt durch

$$d\xi' = \int d^2\psi \frac{x}{r} = hi i' ds'\left[(k-1)\int\frac{x^2 dr}{r^4} + \int\frac{x\,dx}{r^3}\right].$$

Die partielle Integration ergiebt

$$\int x^2 r^{-4}\,dr = \left[-\frac{1}{3}r^{-3}x^2\right] + \frac{2}{3}\int\frac{x\,dx}{r^3}.$$

Für einen geschlossenen Kreis ist das erste Glied der rechten Seite Null; es folgt demnach, wenn s geschlossen ist,

$$d\xi' = hi i' ds' \left[\frac{2}{3}(k-1)+1\right]\int\frac{x\,dx}{r^3} = \frac{hi i' ds'}{3}(2k+1)\int\frac{x\,dx}{r^3}.$$

Da diese Componente nach dem Versuche Null sein muss, so folgt

$$2k+1=0 \text{ oder } k=-\frac{1}{2}.$$

Mit diesem Werte von k wird die Elementarwirkung

$$d^2\psi = h\frac{i i' ds' ds}{r^2}\left[\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right], \tag{13}$$

oder

$$d^2\psi = hi i' ds'\left[\frac{dx}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{x\,dr}{r^2}\right].$$

471. Bestimmung der Constante h. — Die den anderen Achsen parallelen Componenten der Wirkung des Stromes sind

$$d\eta' = \int d^2\psi\frac{y}{r} = hi i' ds'\int\left[\frac{y\,dx}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{xy\,dr}{r^4}\right],$$

$$d\zeta' = \int d^2\psi\frac{z}{r} = hi i' ds'\int\left[\frac{z\,dx}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{xz\,dr}{r^4}\right].$$

Die partielle Integration liefert noch

$$\int\frac{xy\,dr}{r^4} = \left[-\frac{1}{3}\frac{xy}{r^3}\right] + \frac{1}{3}\int\frac{y\,dy + y\,dx}{r^3}.$$

Da das erste Glied auf der rechten Seite für einen geschlossenen Kreis Null ist, erhält man endlich

$$\begin{aligned} d\eta' &= \frac{hi i' ds'}{2}\int\frac{y\,dx - x\,dy}{r^3}, \\ d\zeta' &= \frac{hi i' ds'}{2}\int\frac{z\,dx - x\,dz}{r^3}. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Wirkung F des Stromes auf eine der Einheit gleiche, im Ursprunge befindliche magnetische Masse und folglich die Intensität des Feldes, welches dieser Strom in dem Punkte, in dem das Element liegt, erzeugt, hat den Wert IG, wenn man mit I die elektromagnetische Intensität des Stromes (**466**) bezeichnet, und die Componenten derselben sind

$$X = -IA = -I\int\frac{y\,dz - z\,dy}{r^3},$$

$$Y = -IB = -I\int\frac{z\,dx - x\,dz}{r^3},$$

$$Z = -IC = -I\int\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3}.$$

Die drei Componenten $d\xi'$, $d\eta'$, $d\zeta'$ der Wirkung $d\varphi'$ des Kreises auf das Element ds' können demnach geschrieben werden

$$d\xi' = 0,$$
$$d\eta' = -\frac{hii'ds'}{2}\,C,$$
$$d\zeta' = +\frac{hii'ds'}{2}\,B.$$

Man findet hieraus

$$Xd\xi' + Yd\eta' + Zd\zeta' = 0,$$

woraus folgt, dass die beiden Kräfte F und $d\varphi'$ gegen einander senkrecht gerichtet sind.

Da bisher die xAchse allein bestimmt ist, können wir die beiden andern noch so wählen, dass die magnetische Wirkung F des Stromes in der xzEbene liegt, man erhält dann

$$Y = 0, \qquad B = 0,$$
$$X = F\cos\alpha, \quad A = G\cos\alpha,$$
$$Z = F\sin\alpha, \quad C = G\sin\alpha,$$

wo α der Winkel ist, den die Kraft F oder die Gerade G mit der xAchse bildet.

Es folgt daraus

$$d\xi' = 0,$$
$$d\zeta' = 0,$$
$$d\eta' = \frac{hii'ds'}{2}\,G\sin\alpha = \frac{hii'ds'}{2I}\,F\sin\alpha = d\varphi'.$$

Die Wirkung des geschlossenen Kreises auf das Element ist demnach zur Kraft F und zum Elemente ds', also zur Ampère'schen *Leitebene* senkrecht und der Fläche des aus der Kraft F und dem Elemente ds' construirten Parallelogrammes proportional.

Wird die Kraft $F = IG$ in dem Punkte, in dem sich das Element ds' befindet, von einem magnetischen Systeme hervorgerufen, so ist die Wirkung ebenfalls längs der yAchse gerichtet und hat den Wert $I'ds'F\sin\alpha$, wenn man mit I' die elektromagnetische Intensität des Stromes bezeichnet, der durch das Element geht.

Die beiden Wirkungen haben dieselbe Richtung und sind einander proportional; machen wir die *Annahme*, dass dieselben identisch sind, so würde hieraus folgen

$$h = 2\frac{II'}{ii'}. \tag{14'}$$

Da der numerische Ausdruck für eine Grösse im umgekehrten Verhältnisse der Einheit steht, mit welcher man dieselbe misst, so sieht man, dass

die Constante h gleich ist dem doppelten Quadrate des Verhältnisses der willkürlich zur Messung der Stromintensität gewählten Einheit zur elektromagnetischen Einheit derselben.

472. — Nimmt man an, dass die Ströme von vornherein in elektromagnetischen Einheiten gemessen sind, so erhält man demnach

$$h = 2;$$

man findet so die Ampère'sche Formel wieder, die wir früher erhalten haben (**459**),

$$(15) \qquad d^2\psi = \frac{2II'\,ds\,ds'}{r^2}\left[\sin\theta \sin\theta' \cos\omega - \frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'\right],$$

$$(16) \qquad d^2\psi = \frac{2II'\,ds\,ds'}{r^2}\left[\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right],$$

die man auch auf die mehr symmetrische Form (**351**) bringen kann

$$d^2\psi = \frac{2II'\,ds\,ds'}{\sqrt{r}}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}.$$

473. Elektrodynamische Einheit der Intensität. — Ampère setzt von vornherein in der Formel (13) $h = 1$; damit ist die Stromintensität als Funktion einer besonderen Einheit ausgedrückt, die man *elektrodynamische Einheit* nennt.

Diese Einheit ist dann durch jene Formel (13) selbst definirt. Setzt man nämlich in derselben

$$\theta = \theta' = \frac{\pi}{2},$$
$$\varepsilon = 0,$$
$$ds = ds' = 1,$$
$$i = i' = 1,$$
$$r = 1,$$

so wird

$$d^2\psi = 1.$$

In diesen Bedingungen ist die Definition der elektrodynamischen Einheit der Stromintensität gegeben. *Zwei gleich starke Ströme haben in elektrodynamischem Maasse die Intensität Eins, wenn sie, zwei parallele, gegen die ihre Mitten verbindende Gerade senkrechte, der Längeneinheit gleiche, um die Längeneinheit von einander entfernte Stromelemente durchfliessend, eine der Krafteinheit gleiche Wirkung aufeinander ausüben.*

Die Gleichung (14') ergiebt dann unter Voraussetzung gleicher Ströme

$$i^2 = 2I^2, \quad i = I\sqrt{2}.$$

Die elektrodynamische Intensität eines Stromes ist demnach gleich seiner elektromagnetischen Intensität multiplicirt mit $\sqrt{2}$.

Vermöge der Beziehung, die den numerischen Ausdruck für eine Grösse mit der Einheit verknüpft, die derselben als Maass dient, sieht man, dass *die elektrodynamische Stromeinheit gleich der elektromagnetischen ist dividirt durch* $\sqrt{2}$

474. — Die Identität, die zwischen der Einwirkung von Strömen und der von entsprechenden magnetischen Systemen auf einander besteht, ist in allen Versuchen bestätigt worden, wenigstens sobald in dem Stromkreise ein stationärer Zustand besteht.

Wir führen zum Beispiel die Versuche von Weber über die Einwirkung zweier cylindrischer Spulen mit kreisförmiger Grundfläche auf einander an. Diese Wirkung ist dem Produkte der Intensitäten der beiden Ströme proportional; dieselbe ändert sich mit dem Abstande und der gegenseitigen Richtung der Spulen nach denselben Gesetzen wie die zweier Magnete, deren Achsen beziehungsweise den Achsen der Spulen parallel sind.

475. — *Formeln, die mit den Ampère'schen gleichbedeutend sind.* — Wir haben (**349**) gesehen, dass die Wirkung zweier Conturenelemente zweier magnetischer Blätter, welche der elektrodynamischen Elementarwirkung äquivalent ist, in einer unendlichen Mannichfaltigkeit von verschiedenen Arten ausgedrückt werden kann, die nur der Bedingung unterworfen sind, dass die Resultante der Wirkungen eines geschlossenen Kreises auf ein Element einen bestimmten Wert hat.

476. — (I.) *Formel von Reynard.* — Die erste Form, die wir (**348**) für die Wirkung von ds auf ds' gefunden haben, ist, wenn man das Element ds' im Anfangspunkte der Coordinaten und längs der xAchse gerichtet voraussetzt, eine Kraft, deren Componenten sind

$$f_x = 0,$$

$$f_y = -a\frac{x^2}{r^3}\,d\frac{y}{x} = a\frac{y^2}{r^3}\,d\frac{x}{y},$$

$$f_z = -a\frac{x^2}{r^3}\,d\frac{z}{x} = a\frac{z^2}{r^3}\,d\frac{x}{z}.$$

Der Faktor a in diesen Gleichungen ist für das Produkt $II'ds'$ gesetzt, und x, y, z sind die Coordinaten des Elementes ds.

Die Kraft selbst wird, wie wir sogleich sehen werden, ausgedrückt durch die Formel

$$f = \frac{II'\,ds'\,ds}{r^2}\sin\theta\cos\mu',$$

in welcher θ der Winkel des Elementes ds gegen die Gerade r und μ' der Winkel des Elementes ds' gegen die Ebene rds ist.

Nennt man $d\beta$ den Winkel, unter dem man vom Elemente ds' aus das Element ds sieht, welcher Winkel gleich $\frac{ds\sin\theta}{r}$ ist, so kann diese Formel auch geschrieben werden

$$f = \frac{II'\,ds'}{r}\cos\mu'\,d\beta.$$

Dies ist die Formel von Reynard.

Um die Richtung dieser Elementarkraft zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass dieselbe gegen das Element ds' normal ist, da $f_x = 0$ ist.

Dieselbe liegt in der Ebene rds. Diese Ebene hat nämlich, wenn man mit X, Y, Z die laufenden Coordinaten bezeichnet, zur Gleichung

$$X(ydz - zdy) + Y(zdx - xdz) + Z(xdy - ydx) = 0.$$

Ihr Schnitt mit der yzEbene ist

$$Y(zdx - xdz) + Z(xdy - ydx) = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{Y}{f_y} = \frac{Z}{f_z}.$$

Nun ist ausserdem

$$r^2 ds^2 \sin^2\theta = (ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2$$
$$= r^6 \frac{(f_y^2 + f_z^2)}{a^2} + (ydz - zdy)^2 = \frac{r^6 f^2}{a^2} + (ydz - zdy)^2,$$

woraus sich ergiebt

$$f^2 = \frac{a^2 ds^2 \sin^2\theta}{r^4} \left[1 - \frac{(ydz - zdy)^2}{r^2 ds^2 \sin^2\theta}\right].$$

Aber der Ausdruck $\frac{ydz - zdy}{r\,ds \sin\theta}$ ist der Cosinus des Winkels, den die Normale der Ebene rds mit der xAchse bildet. Die Klammer ist demnach das Quadrat des Sinus dieses Winkels oder das Quadrat des Cosinus des Winkels μ', den die Ebene rds mit der xAchse, also mit dem Elemente ds' bildet, und man erhält

$$f = \frac{a\,ds \sin\theta \cos\mu'}{r^2} = \frac{II'\,ds\,ds'}{r^2} \sin\theta \cos\mu'.$$

Demnach liegt nach der Formel die Wirkung von ds auf ds' in der Ebene rds, ist normal gegen das Element ds', proportional dem Sinus des Winkels, den das Element ds mit dem Abstande r bildet, und dem Cosinus des Winkels, den das Element ds' mit der Ebene rds bildet, und schliesslich umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes.

Wir wählen jetzt als xzEbene die Ebene rds und verlegen die xAchse in die die beiden Elemente verbindende Gerade OO'. Die Kraft, welche auf das im Anfangspunkte der Coordinaten befindliche Element ds' einwirkt, liegt dann in der xzEbene und ist senkrecht gegen ds'. Um die Richtung derselben zu erhalten, braucht man nur das Element ds' auf die xzEbene zu projiciren; eine in dieser Ebene normal gegen die Projection verlaufende Gerade ist dann die gesuchte Richtung; dieselbe ist gegen die projicirende Ebene und folglich gegen das Element ds', welches in dieser Ebene durch ihre Spur geht, senkrecht.

Die den Achsen parallelen Componenten dieser Kraft sind, wenn man mit β den Winkel bezeichnet, den die Kraftrichtung mit der xAchse bildet,

$$f_x = f\cos\beta = \frac{II'ds\sin\theta}{x^2}ds'\cos\mu'\cos\beta = \frac{II'dxdz'}{x^2},$$

$$f_y = 0,$$

$$f_z = f\sin\beta = \frac{II'ds\sin\theta}{x^2}ds'\cos\mu'\sin\beta = \frac{II'dzdx'}{x^2}.$$

Bezeichnet man noch mit θ' den Winkel der Geraden r gegen das Element ds' und mit ω den Winkel zwischen den beiden Ebenen rds und rds', so erhält man

$$dz' = ds'\sin\theta'\cos\omega,$$

$$dx' = ds'\cos\omega,$$

woraus sich ergiebt

$$f_x = \frac{II'}{r^2}\sin\theta\sin\theta'\cos\omega\, dsds',$$

$$f_z = \frac{II'}{r^2}\sin\theta\cos\theta'\, dsds'.$$

Die Wirkung zweier einander folgender Stromelemente ist augenscheinlich Null.

Aus alledem ergiebt sich, dass wir es hier nicht mehr mit entgegengesetzt gleichen Wirkungen und Gegenwirkungen zu thun haben; es wirkt vielmehr auf jedes einzelne Element eine besondere Kraft ein, die normal gegen dieses Element gerichtet ist und in der vom andern Elemente bestimmten Ebene liegt.

Die Existenz einer zum Elemente normalen Kraft ist mit der Anschauung einer Fernwirkung nicht vereinbar; fasst man dagegen die elektrodynamischen Kräfte als das Resultat einer Veränderung in den elastischen Eigenschaften des Mittels auf, so begreift man leicht, dass die Wirkung dieses Mittels auf ein Stromelement gegen dasselbe normal sein kann.

477. — (II.) *Allgemeine Formel.* — Man kann zu jeder der Componenten f_x, f_y und f_z ein vollständiges Differential der Coordinaten addiren, ohne dass die Wirkung eines geschlossenen Kreises auf das Element ds' geändert wird. Man kann demnach als Componenten der Elementarwirkung die folgenden allgemeinen Ausdrücke wählen, in denen X, Y und Z beliebige Funktionen der Coordinaten bezeichnen:

$$d^2\xi' = a dX,$$

$$d^2\eta' = a\left[dY - \frac{x^2}{r^3}d\frac{y}{x}\right],$$

$$d^2\zeta' = a\left[dZ - \frac{x^2}{r^3}d\frac{z}{x}\right].$$

478. — (III.) *Formel von Ampère.* — Stellt man für die Elementarkraft die Bedingung, dass sie längs der die beiden Elemente verbindenden Geraden gerichtet ist, so erhält man die Ampère'sche Formel; diese Formel ist die einzige, die dem allgemeinen Prinzip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung und folglich den wesentlichen Bedingungen einer wirklichen Elementarkraft genügt. Für jede andere Lösung ist die Wirkung des Elementes ds auf das Element ds' nicht gleich und genau entgegengesetzt der des Elementes ds' auf das Element ds.

479. — (IV.) *Grassmann'sche Formel.* — Wir ersetzen die willkürlichen Funktionen X, Y und Z beziehungsweise durch xf, yf und zf, wo f eine Funktion des Abstandes r bezeichnet. Die Componenten der Elementarkraft sind dann

$$d^2\xi' = ad(xf),$$

$$d^2\eta' = a\left[d(yf) - \frac{x^2}{r^3} d\frac{y}{x}\right]$$

$$d^2\zeta' = a\left[d(zf) - \frac{x^2}{r^3} d\frac{z}{x}\right].$$

Diese Operation kommt darauf zurück, dass man zu der durch die Reynard'sche Formel gegebenen Kraft eine andere Kraft $d^2\psi_1$ addirt, deren Componenten sind

$$d^2\xi_1 = ad(xf) = a\,[fdx + xdf]$$
$$d^2\eta_1 = ad(yf) = a\,[fdy + ydf]$$
$$d^2\zeta_1 = ad(zf) = a\,[fdz + zdf].$$

Die Kraft selbst ist durch die Gleichung gegeben

$$[d^2\psi_1]^2 = a^2[f^2ds^2 + r^2(df)^2 + 2frdfdr],$$

oder, wenn man die Beziehung $dr = ds\cos\theta$ berücksichtigt,

$$\frac{1}{a^2}[d^2\psi_1]^2 = [fdr + rdf]^2 + f^2ds^2\sin^2\theta = [d(rf)]^2 + f^2ds^2\sin^2\theta.$$

Diese Kraft bildet mit der Geraden r einen Winkel, dessen Cosinus ist

$$a\frac{xd(xf) + yd(yf) + zd(zf)}{rd^2\psi_1} = a\frac{frdr + r^2df}{rd^2\psi_1} = a\frac{d(rf)}{d^2\psi_1}.$$

Endlich ist der Winkel δ, den dieselbe mit dem Elemente ds einschliesst, bestimmt durch

$$\cos\delta = \frac{a}{dsd^2\psi_1}[dxd(xf) + dyd(yf) + dzd(zf)].$$

oder

$$\cos\delta = \frac{adr}{dsd^2\psi_1}d(rf) + \frac{afds}{d^2\psi_1}\sin\theta.$$

Stellt man für diese Kraft die Bedingung, dass sie zu der die beiden Elemente verbindenden Geraden senkrecht ist, so erhält man

$$d(rf) = 0,$$

woraus man findet

$$rf = A, \quad f = \frac{A}{r};$$

folglich hat die hinzugefügte Kraft als Wert

$$d^2\psi_1 = af ds \sin\theta = \frac{Aa}{r} ds \sin\theta.$$

Man sieht übrigens, dass diese Kraft $d^2\psi_1$ mit dem Elemente ds einen Winkel bildet, der gleich $\theta + \frac{\pi}{2}$ ist.

Sind die beiden Elemente längs derselben Geraden gerichtet, so ist die Wirkung derselben Null, da die Kraft $d^2\psi_1$ Null ist und die durch die Reynard'sche Formel gegebene Kraft ebenfalls Null ist.

In dieser Hypothese, welche als die Grassmann'sche bekannt ist, ist die thatsächlich wirkende Kraft $d^2\psi$ die Resultante einer im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes stehenden Kraft, wie sie durch die Reynard'sche Formel definirt ist, und einer Kraft $d^2\psi_1$ die im umgekehrten Verhältnisse des einfachen Abstandes steht, die gegen die die Elemente verbindende Gerade normal ist, und deren Richtung mit dem Elemente ds einen Winkel gleich $\frac{\pi}{2} + \theta$ bildet.

Man könnte noch mehrere andere ebenfalls mit der Erfahrung in Einklang stehende Bedingungen ersinnen; aber diese wenigen Beispiele werden genügen, die Unbestimmtheit der Aufgabe zu zeigen und die Hauptlösungen anzudeuten.

3. Capitel.

Specielle Fälle.

480. Wirkung zweier paralleler Ströme. — Nach der Ampèreschen Formel (459) ziehen zwei einander parallele Stromelemente, die zu der ihre Mitten verbindenden Geraden senkrecht sind, einander an oder stossen sich ab, je nachdem die Ströme gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Man beweist dieses Resultat gewöhnlich, indem man einen geradlinigen Strom, den man als unendlich lang betrachten kann, einem parallel zu sich selbst beweglichen, geradlinigen Stromteile nähert. In Wirklichkeit ist der Versuch complicirter, denn jeder der betrachteten Ströme bildet einen Teil eines geschlossenen Kreises. Wie man sich auch die Ebenen der beiden Ströme gegen einander gestellt denkt, vermehrt eine Annäherung der beiden geradlinigen Teile, wenn die Ströme gleichgerichtet sind, für jeden derselben die Kraftströmung, die er vom andern von seiner negativen Fläche her empfängt, und vermindert die relative Energie; das Umgekehrte tritt ein, wenn die Ströme entgegengesetzt gerichtet sind.

I sei die Intensität des unendlichen Stromes, I' die des ihm parallelen, begrenzten Stromes, dessen Länge b sei. Lässt man den Abstand a der beiden als gleichgerichtet vorausgesetzten Ströme sich um da ändern, so ist die Kraftströmung, die in den Kreis des beweglichen Stromes eintritt,

$$dQ = -\,bda\frac{2I}{a} = -\,2Ib\frac{da}{a};$$

die Kraft, die auf den beweglichen Teil des Kreises wirkt, wird ausgedrückt durch $-I'\frac{dQ}{da} = 2II'\frac{b}{a}$, dieselbe ist demnach dem Abstande umgekehrt proportional.

481. Winkelströme. — Zwei einander benachbart liegende Ströme suchen sich einander parallel zu stellen. Man spricht dieses Resultat gewöhnlich so aus, dass man sagt, dass zwei Ströme, die einen Winkel mit einander bilden, sich anziehen, wenn beide zugleich dem Scheitel des Winkels zufliessen oder von demselben abfliessen, und dass sie sich im entgegengesetzten Falle abstossen.

Den Versuch führt man aus, indem man einen unendlichen, geradlinigen Strom dem unteren Teile eines rechtwinkligen, beweglichen, von einem Strome durchflossenen Rahmens nähert. Der Rahmen dreht sich so, dass seine negative Seite einen möglichst grossen Teil der von dem geradlinigen Strome ausgehenden Kraftströmung auffängt. Die zu irgend einer Verschiebung gehörige Arbeit kann nicht in einfacher Weise ausgedrückt werden; aber die gesammte Arbeit, die einer Verschiebung des Rahmens aus einer Lage entspricht, in der seine Ebene gegen den geradlinigen Strom senkrecht ist, bis in die, wo dieselbe diesem parallel wird, ist der Kraftströmung proportional, die in dem letzteren Falle der geradlinige Strom durch den Rahmen sendet. Nennt man a_0 und a_1 die Abstände der beiden Seiten des Rahmens, welche dem unendlichen Strome parallel sind, von demselben und b die Länge einer solchen Seite, so erhält man

$$Q = -2bI\int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{a} = -2bI.l_n\frac{a_1}{a_0},$$

und die elektromagnetische Arbeit ist gleich $2II'b.l_n\frac{a_1}{a_0}$.

Man kann diese Bewegungen leicht rechnerisch verfolgen, indem man die Ströme durch die äquivalenten magnetischen Blätter ersetzt, und die Wirkungen dieser Blätter auf einander betrachtet.

Man kann zu demselben Ziele auch in der Weise Faraday's durch Betrachtung der Kraftlinien und deren Verteilung in dem Felde gelangen. Die von den verschiedenen vorhandenen Systemen herrührenden, das Feld darstellenden Kraftlinien sind nach gewissen Richtungen mehr gedehnt als nach andern. Stellt man sich diese Kraftlinien (**105**) als elastische Fäden vor, die einer Spannung in Richtung ihrer Länge und einer Abstossung in der hierzu senkrechten Richtung ausgesetzt sind, so erhält man eine klare Vorstellung von der Bewegung, die zu entstehen sucht.

482. Scheinbare Abstossung zwischen zwei einander folgenden Stromelementen. — Dieser wichtige Versuch von Ampère besteht darin, die beiden Pole einer Kette mit zwei rechteckigen durch eine isolirende Scheidewand von einander getrennten, mit Quecksilber gefüllten Trögen zu verbinden. Ein Eisendraht ist so gebogen, dass er zwei parallele horizontale Arme, die auf dem Quecksilber der Tröge schwimmen, und einen transversalen Teil in Form einer Brücke hat, welcher die ersteren mit einander verbindet. In dem Augenblicke, wo man den Kreis der Kette schliesst, sieht man den Draht auf der Oberfläche des Quecksilbers gleiten und sich von den Punkten entfernen, durch welche der Strom eintritt.

Ampère glaubte so zu beweisen, dass zwei längs derselben Geraden in demselben Sinne gerichtete Stromelemente einander abstossen, wie dies auch die Elementarformel andeutet; aber man sieht leicht ein, dass die Erscheinung diese Folgerung nicht gestattet.

In diesem Versuche durchfliesst nämlich der Strom einen Kreis, von dem ein Teil beweglich ist, und dessen Fläche ein Maximum zu werden sucht (455). Man kann überdies dieses Resultat direkt wiederfinden, indem man den Strom durch ein biegsames zusammengebogenes Blatt ersetzt, von der durch die Figur 111 angedeuteten Form. Die drei in dem Raume $ABB'A'$ übereinander gelagerten Blätter lassen zwischen sich keine der Stromebene parallele Kraft entstehen, aber ihre Wirkung nach aussen ist der eines einfachen Blattes äquivalent. Der Teil $aDCb$ sucht sich zu entfernen, und das Blatt faltet sich auseinander, um eine möglichst grosse Fläche einzunehmen.

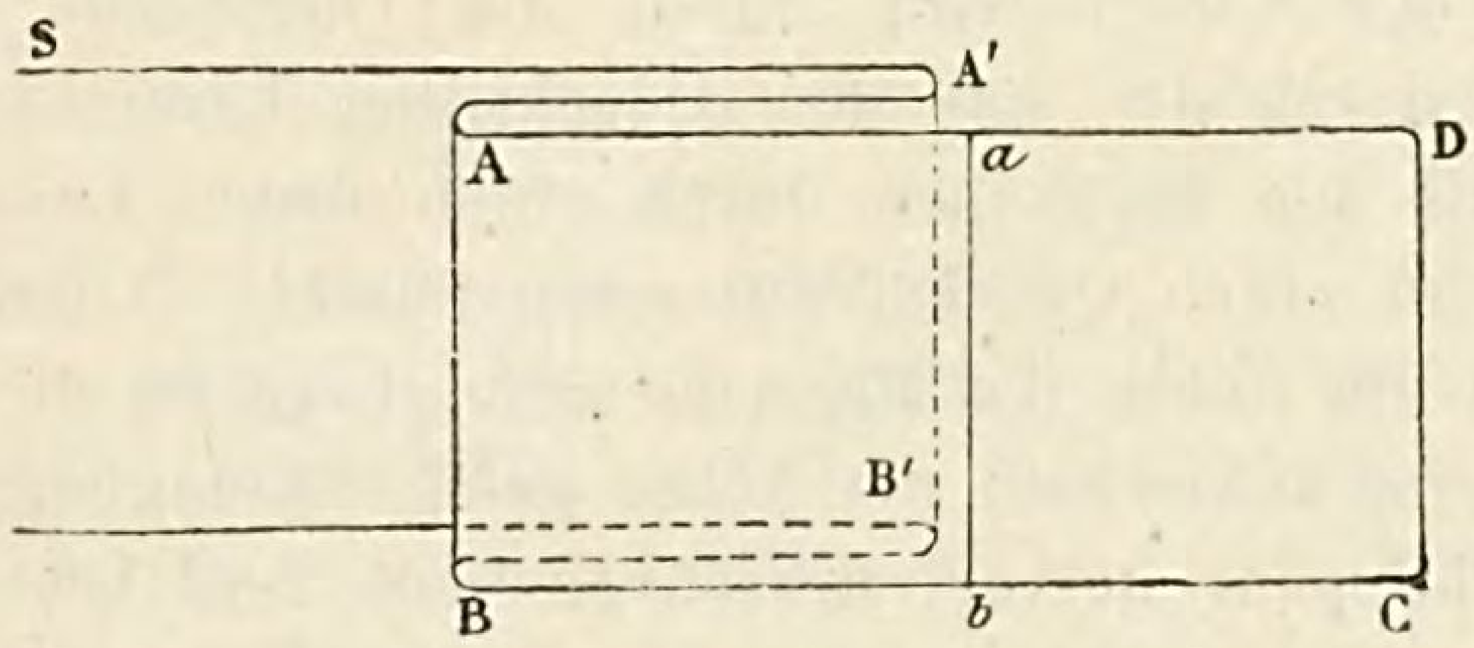


Fig. 111.

483. Elektromagnetische Drehungen. — I. *Barlow'sches Rad.* — Ein um eine horizontale Achse bewegliches, gezahntes Metallrad ist so angeordnet, dass ein oder mehrere Zähne an dessen unterem Teile in einen Quecksilber enthaltenden Trog tauchen. Lässt man durch dieses System einen Strom gehen, der durch die Achse ein- und durch das Quecksilber austritt, so sucht die blosse Wirkung des Stromes auf sich selbst die unteren Zähne in der Richtung fortzubewegen, welche dieselben von dem übrigen Teile des Stromes entfernt, so dass die Gesammtoberfläche grösser wird; aber diese Wirkung ist im Allgemeinen zu schwach die Reibungswiderstände zu überwinden. Man erzielt eine kräftigere Wirkung, wenn man den Trog zwischen die Arme eines horizontal aufgestellten Hufeisenmagnets bringt. Die Kraftlinien des magnetischen Feldes durchschneiden dann die Ebene des Rades. Denkt man sich dieselben von vorn nach hinten gerichtet, also den Nordpol vorn, so erfolgt die Drehung in der Richtung, die der Bewegung der Uhrzeiger entgegengesetzt ist.

Um eine rechnerisch leicht zu verfolgende Erscheinung zu erhalten, ersetzen wir den Magnet durch ein gleichförmiges magnetisches Feld von der Intensität F, das der Drehachse parallel ist. Nennen wir a den Radius des Rades, θ den Winkel zwischen zwei einander folgenden Zähnen, und denken wir uns die Quecksilberfläche so angebracht, dass der eine Zahn die Flüssigkeit in dem Momente berührt, wo der vorhergehende dieselbe verlässt, so ist die Kraftströmung, welche durch das von zwei diesen beiden Zähnen entsprechenden Radien begrenzte Dreieck hindurchgeht, gleich $F\frac{a^2 \sin\theta}{2}$ oder bis auf Grössen höherer Ordnung $F\frac{a^2\theta}{2}$, nämlich gleich dem Produkt aus der Kraf in die Fläche des Sectors, und die entsprechende Arbeit ist $IF\frac{a^2\theta}{2}\cdot$ Für eine

ganze Umdrehung ist die Arbeit gleich IFS, proportional der Gesammtoberfläche S des Rades.

484. — II. *Versuch von Ampère.* — Dieser Versuch, bei dem man die Drehung eines Magnets durch einen Strom hervorruft, ist die Umkehrung des Faraday'schen Versuches, dessen Theorie wir oben gegeben haben (456). Der Apparat ist so angeordnet, dass nur ein Pol des Magnets die Stromfläche durchsetzen kann; man erhält dann eine continuirliche Rotation des Magnets. Der durch ein Platingewicht beschwerte Magnet NS (Fig. 112) schwimmt auf dem Quecksilber und kann sich um seine Achse um sich selbst drehen; der Strom wird durch die Oberfläche der Flüssigkeit zugeführt, geht durch den aus dem Quecksilber herausragenden Teil des Magnets und tritt aus demselben durch einen festen Leiter aus, der am oberen Teile N in einen Quecksilbertropfen taucht. Nimmt man an, dass der Strom genau die Achse des Magnets verfolgt, so ist die Arbeit bei jeder Umdrehung für eine ausserhalb der Achse gelegene magnetische Masse $4\pi mI$ und ruft ein Kräftepaar hervor, dessen Moment $2mI$ ist. In Wirklichkeit

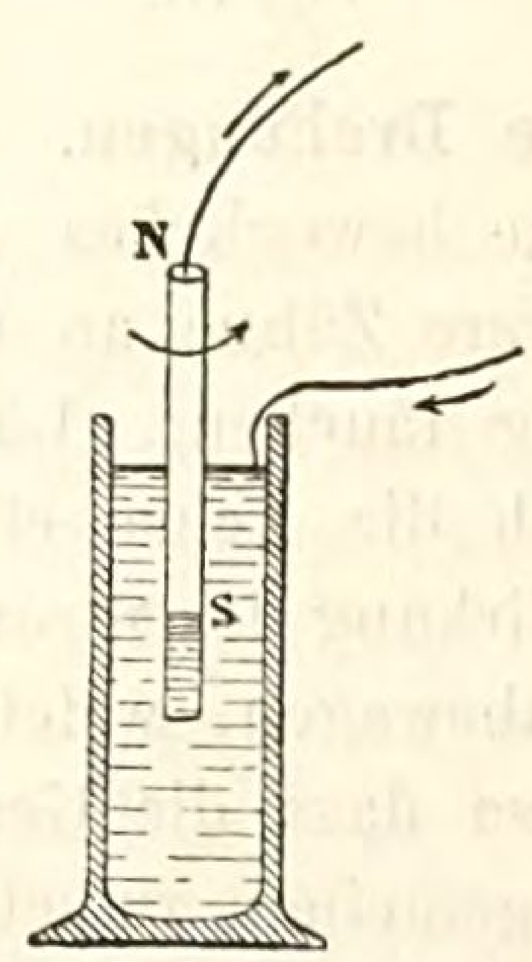


Fig. 112.

ist die Erscheinung complicirter, da der Strom durch den ganzen Querschnitt des Magnets geht.

Faraday hat den Versuch wiederholt, indem er den Magnet ausserhalb des Kreises brachte. Der Strom wird der Mitte des Gefässes durch ein metallisches Rohr zugeführt, und der Magnet schwimmt in einer excentrischen Lage.

In beiden Fällen erfolgt die Rotation, wenn der Strom durch die Achse aufsteigt und der obere Pol des Magnets ein Nordpol ist, entgegen der Bewegung der Uhrzeiger. Die Faraday'sche Anordnung bedingt eine grössere Reibung, und die Rotation ist eine weniger schnelle.

485. Rotation der Flüssigkeiten. — Geht der Strom durch eine Flüssigkeit, so können die mit den Linien der elektrischen Strömung zusammenfallenden Flüssigkeitsfäden als bewegliche Kreise aufgefasst werden, die den elektromagnetischen Einwirkungen zu folgen vermögen, und der Versuch zeigt, dass die Flüssigkeit mit dem Strome, den sie führt, fortgerissen wird.

I. *Versuch von Davy.* — Zwei Platinelektroden endigen in Quecksilber ein wenig unter dessen Oberfläche. Bringt man über eine derselben, zum Beispiel über die negative Elektrode, den Pol N eines Magnets, so findet man eine Depression des Quecksilbers und gleichzeitig eine Drehung in Richtung der Uhrzeiger.

II. *Versuch von Jamin.* — Die beiden Elektroden eines Voltameters sind in derselben Verticalen über der Polachse eines Hufeisenmagnets angebracht. Würden die in einem Stromfaden liegenden Flüssigkeitsmoleküle einen starren Faden bilden, so würde man wieder einen der Fälle des Faraday'schen Versuches (**456**) haben, wo die Rotation nicht möglich ist. In Wirklichkeit wirken die elektromagnetischen Kräfte in einer unabhängigen Weise und in der Art des Davy'schen Versuches auf die Fadenteile, die von den einzelnen Elektroden aus divergiren. Die Flüssigkeit teilt sich in diesem Falle in zwei über einander liegende Schichten, die sich in entgegengesetzter Richtung drehen, und die Rotation wird durch die mitgerissenen Gasbläschen, die von der Wasserzersetzung herrühren, sichtbar.

III. *Versuch von Bertin.* — In den Versuchen von Bertin wird die Bewegung der Flüssigkeit durch kleine Korkstücke sichtbar gemacht, die auf der Oberfläche schwimmen. Die Flüssigkeit befindet sich in einem ringförmigen Gefässe, das zwei metallische Kreise enthält, einen inneren und einen äusseren. Macht man diese Kreise zu Elektroden, so erhält man in der Flüssigkeit eine Reihe von centripetalen oder centrifugalen Radialströmen. Bringt man einen Magnet in die Achse des Ringes, so erhält die Flüssigkeit eine Rotation in einer mit der Theorie conformen Richtung. Der Sinn der Drehung ändert sich nicht, wenn man den centralen Magnet durch eine um den Ring herumliegende, magnetisirte Röhre ersetzt. Denn wenn der Nordpol in beiden Fällen oben liegt, ist die magnetische Kraftströmung von oben nach unten gerichtet, sowohl innerhalb als ausserhalb des hohlen Magnets. Das Verhältnis ist nicht mehr dasselbe, wenn man den Magnet durch eine Spule ersetzt; die Drehung der Flüssigkeit wechselt ihre Richtung, je nachdem die Spule innerhalb oder ausserhalb des ringförmigen Kranzes liegt. Denn die Kraftströmung hat nicht innerhalb und ausserhalb der Spule dieselbe Richtung und jede einzelne Kraftlinie bildet einen geschlossenen Kreis.

486. Elektrodynamische Rotationen. — Wir fassen einen unendlichen, geradlinigen Strom XX' (Fig. 113) von der Intensität I und einen begrenzten, geradlinigen Strom AB von der Länge a und der Intensität I', der zum ersteren senkrecht ist und mit demselben in der nämlichen Ebene liegt, ins Auge. Verschiebt man den Stom a parallel zum Strome I um dx, so ist die entsprechende Arbeit, wenn man r_0 den Abstand BC nennt,

$$2II'dx\int_{r_0}^{r_0+a}\frac{dr}{r}=2II'dx.l_n\left(1+\frac{a}{r_0}\right).$$

Die Kraft, die auf den beweglichen Strom einwirkt, ist gegen seine Richtung senkrecht, dem unendlichen Strome parallel und hat den Wert $2II'.l_n\left(1+\frac{a}{r_0}\right)$. Dieser Strom wird sich selbst parallel durch eine constante Kraft fortgezogen und bewegt sich gegen oder mit dem unendlichen Strome, je nachdem er nach dem letzteren hin oder von demselben fort fliesst.

Man führt diesen Versuch gewöhnlich so aus, dass man einen Kreisstrom auf einen, um eine zu seiner Ebene senkrechte und durch seinen

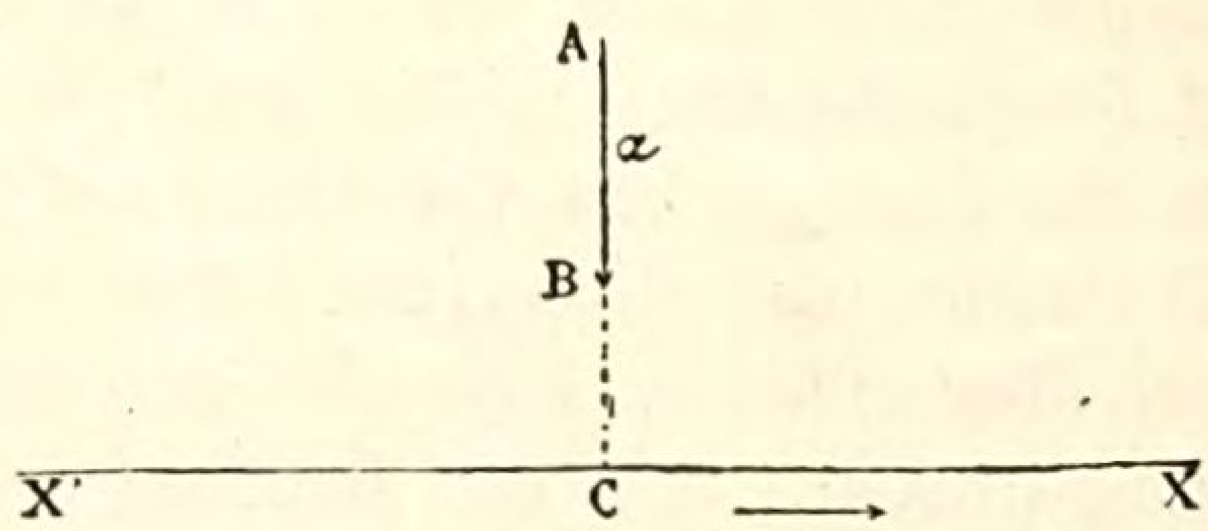


Fig. 113.

Mittelpunkt gehende Achse beweglichen Stromteil wirken lässt. Der bewegliche Strom nimmt dann eine Rotationsbewegung an.

Ist der bewegliche Strom geschlossen, oder liegen seine Enden auf der Achse, so tritt eine Bewegung nicht ein, denn jede Kraftlinie trifft dann die Grenzlinie zwei Mal.

487. Wirkung eines gleichförmigen Feldes. — Wir betrachten weiter zwei parallele, geradlinige, unendliche Leiter AA' und BB' (Fig. 114), die den Abstand b von einander haben, und setzen voraus, dass, während die beiden Enden A und B mit den Polen einer Kette in Verbindung stehen,

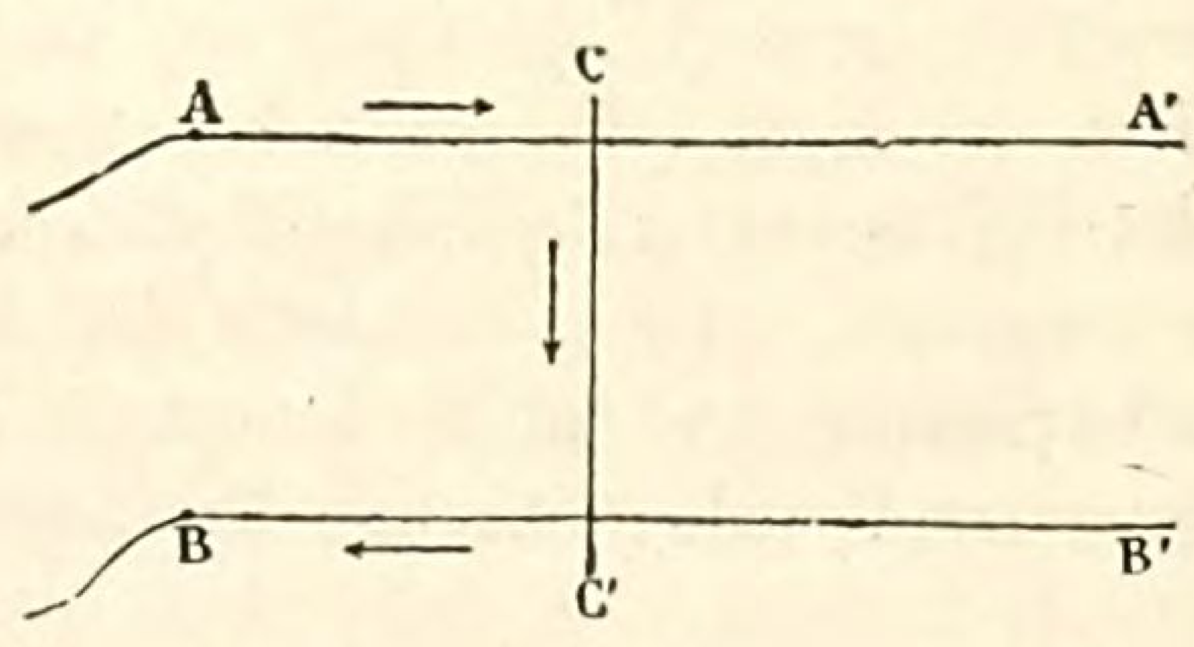


Fig. 114.

der Kreis durch einen transversalen Stab CC' geschlossen wird, der parallel zu sich selbst längs der Leiter AA' und BB' beweglich ist.

Ist Z die zur Ebene der Leiter normale Componente der Intensität des Feldes, so ist für eine Verschiebung dx des beweglichen Stabes die Aenderung der magnetischen Kraftströmung in dem Kreise $bZdx$. Handelt es sich um das Erdfeld, und sind die Schienen horizontal, so ist die Componente Z auf unserer Halbkugel von oben nach unten gerichtet, und die Brücke entfernt sich unter dem Einfluss der elektromagnetischen Kräfte bei der durch die

Pfeile angedeuteten Stromrichtung von A und B; dieselbe würde sich bei entgegengesetzter Stromrichtung diesen Punkten nähern.

In dem Versuche von Ampère (**482**) sucht die Wirkung des Stromes auf sich selbst die Fläche zu vergrössern und die bewegliche Brücke zu entfernen. Diese Wirkung und die der Erde addiren sich zu oder subtrahiren sich von einander, je nach der Stromrichtung; die Bewegung des Drahtes geht in der That je nach dem Falle mehr oder weniger leicht vor sich.

488. — Wir nehmen nunmehr an, dass der bewegliche Leiter einen geschlossenen Kreis bildet; S sei die Fläche dieses Kreises, wenn derselbe eben ist, oder andernfalls die grösste Projection seiner Fläche auf eine Ebene, die wir dann die Stromebene nennen. Ist ein derartiger Kreis in einem gleichförmigen magnetischen Felde, wie dem der Erde, beweglich, so entspricht das stabile Gleichgewicht dem Falle, wo die durch die negative Seite des Kreises eintretende Kraftströmung ein Maximum ist; die Ebene des Kreises sucht sich demnach zur Kraft senkrecht zu stellen. Unter dem Einfluss der Erde würde diese Ebene senkrecht zur Inclinationsnadel sein, und zwar geht der Strom im unteren Teile von Osten nach Westen. Ist F die Intensität des Feldes, I die des Stromes, dann ist die potentielle Energie des Stromes in der Gleichgewichtslage

$$W_1 = -ISF;$$

dreht man den Strom um 180°, so wird dieselbe

$$W_2 = ISF.$$

Die bei dieser Operation gegen die elektromagnetischen Kräfte aufgewendete Arbeit ist demnach

$$W_2 - W_1 = 2ISF.$$

Ist der Strom gezwungen sich um eine verticale Achse zu drehen, so hat man nur die Horizontalcomponente H des Feldes in Betracht zu ziehen. Die zu einer Drehung um 180° um die Achse von der Gleichgewichtslage aus nötige Arbeit ist dann

$$W' = 2ISH.$$

Wenn der Strom um eine horizontale, dem magnetischen Meridian parallele Achse drehbar ist, dann tritt die Verticalcomponente des Feldes allein in Wirksamkeit. Für eine Drehung um 180° von der Gleichgewichtslage aus, in der seine Ebene den Meridian senkrecht schneidet, ist die Arbeit dann

$$W'' = 2ISZ.$$

Das Verhältnis der Arbeiten in diesen beiden Fällen

$$\frac{W''}{W'} = \frac{Z}{H}$$

ist gleich der Tangente der Inclination. Die Messung dieser Arbeiten würde demnach eine Bestimmung der Elemente des Erdmagnetismus ohne Benutzung von Magneten gestatten.

Liegt die Rotationsachse im magnetischen Meridian, so ist die Gesammtarbeit Null, wenn der Strom, der anfangs in dieser Ebene gelegen hat, nach einer Drehung um 180° in dieselbe zurückkehrt; die Arbeiten, die den beiden Hälften der Drehung entsprechen, sind dann entgegengesetzt gleich.

Endlich ist die Arbeit für eine beliebige Drehung Null, wenn die Rotationsachse der Richtung des Feldes parallel ist.

489. Astatische Kreise. — Die auf eine beliebige Verschiebung bezügliche Arbeit ist auch Null, wenn der Kreis zwei geschlossene Curven enthält, die so beschaffen sind, dass ihre Projectionen auf eine beliebige Fläche zwei gleiche Flächen S und S' liefern, die von in entgegengesetzten Richtungen fliessenden Strömen umspannt werden. Dieser Bedingung müssen die sogenannten *astatischen* beweglichen Ströme genügen, die so construirt

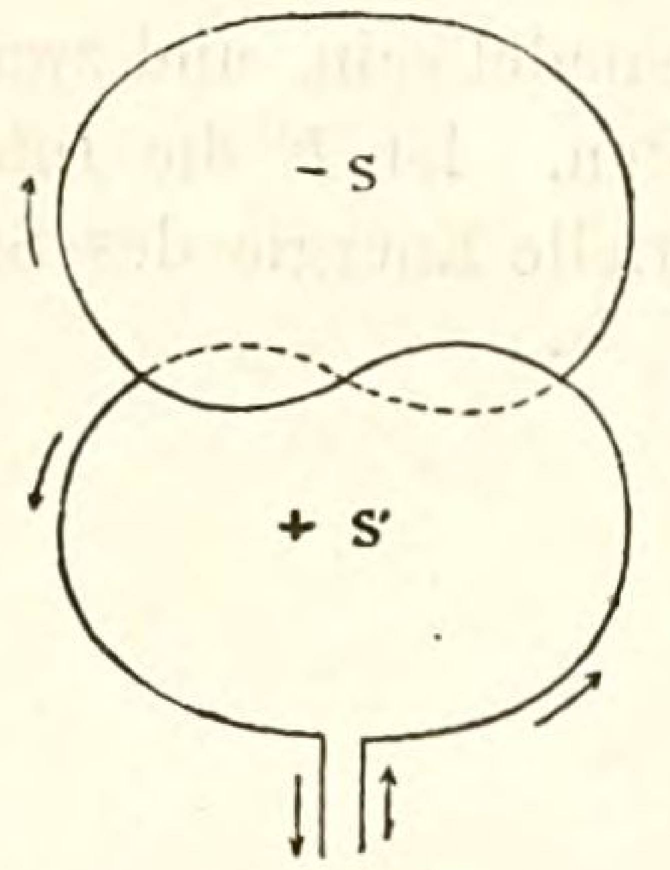


Fig. 115.

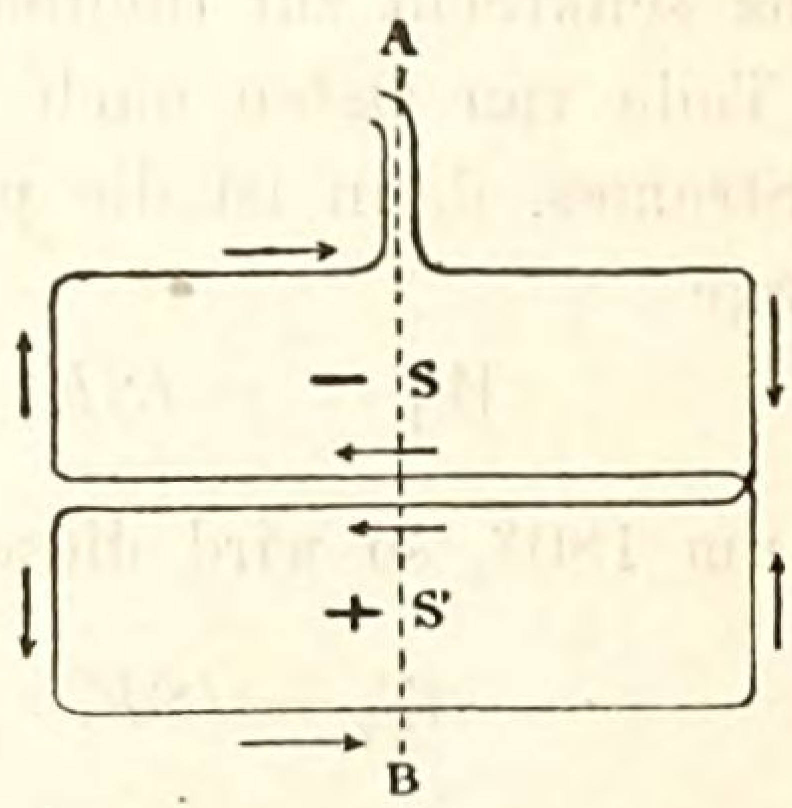


Fig. 116.

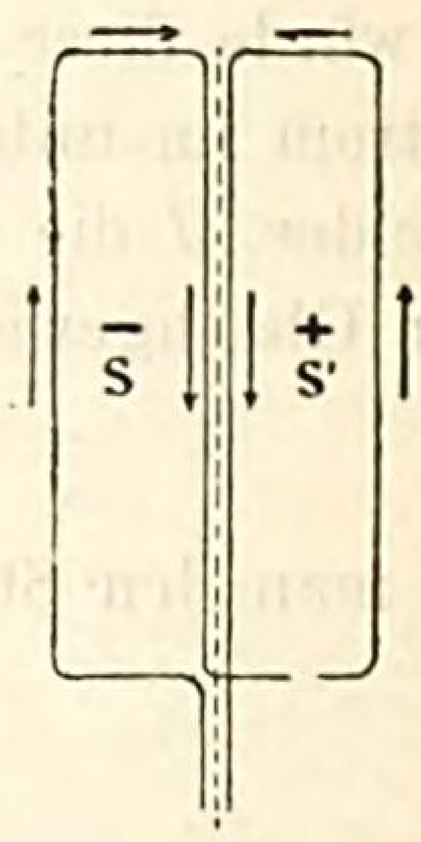


Fig. 117.

sind, dass sie der Einwirkung der Erde nicht unterliegen. Die Figuren 115, 116, 117 liefern Beispiele von Leitern, die dieser Bedingung genügen.

Sind die beiden Flächen S und S' nicht gleich, so ist die Wirkung des Feldes der Differenz $S - S'$ proportional.

490. Drehung eines Stromes unter der Einwirkung der Erde. — Ein nicht geschlossener, um eine Achse beweglicher Stromteil erhält im Allgemeinen unter dem Einfluss des Erdmagnetismus eine stetige Bewegung.

Wir bemerken zunächst, dass man in einem gleichförmigen magnetischen Felde, wie es das von der Erde erzeugte ist, einen Strom stets durch seine drei Projectionen auf drei zu einander senkrechte Ebenen ersetzen kann; es kommt dies nämlich darauf zurück, dass man die Intensität des Feldes durch ihre drei zu einander rechtwinklige Componenten ersetzt.

Wir betrachten einen beliebigen, um eine Achse drehbaren Strom und bestimmen seine Projectionen auf drei Ebenen, von denen die eine zur Rotationsachse senkrecht ist, die andern so durch dieselbe gehen, dass die eine zur Richtung des Feldes parallel ist; S, S', S'' seien diese drei Projectionen. Die zum Felde senkrechte Projection S'' lässt keine Einwirkung

zu. Auf die Projection S' ist die Einwirkung eine rein richtende; der Stromkreis sucht sich so zu stellen, dass die Fläche S'' ein Maximum wird und der Kraft ihre negative Seite zeigt; auf unserer Halbkugel muss der Strom in dem nach Osten gerichteten Teile fallen. Es bleibt noch die Projection S auf die zur Achse senkrechte Ebene zu betrachten. Ist dieselbe geschlossen und von starrer Form, so erfährt sie keinerlei Einwirkung; besitzt dieselbe einen beweglichen Teil, so hat die der Achse parallele Componente des Feldes ein constantes Moment in Bezug auf diese Achse und ruft eine stetige Rotation hervor.

491. — Es bestehe zum Beispiel das System aus einem Strome OP von der Länge a (Fig. 118), der um eine verticale Achse beweglich ist, und von dem ein Ende O auf der Rotationsachse liegt, während das andere Ende P in eine mit Quecksilber gefüllte Rinne taucht. Der Strom kommt bei A in das Quecksilber, durchläuft die beiden Teile ABP und ACP in entgegengesetzten Richtungen und gelangt zur Achse durch den beweglichen Teil PO. I sei die Gesammtintensität des Stromes, x die Intensität in dem Bogen B,

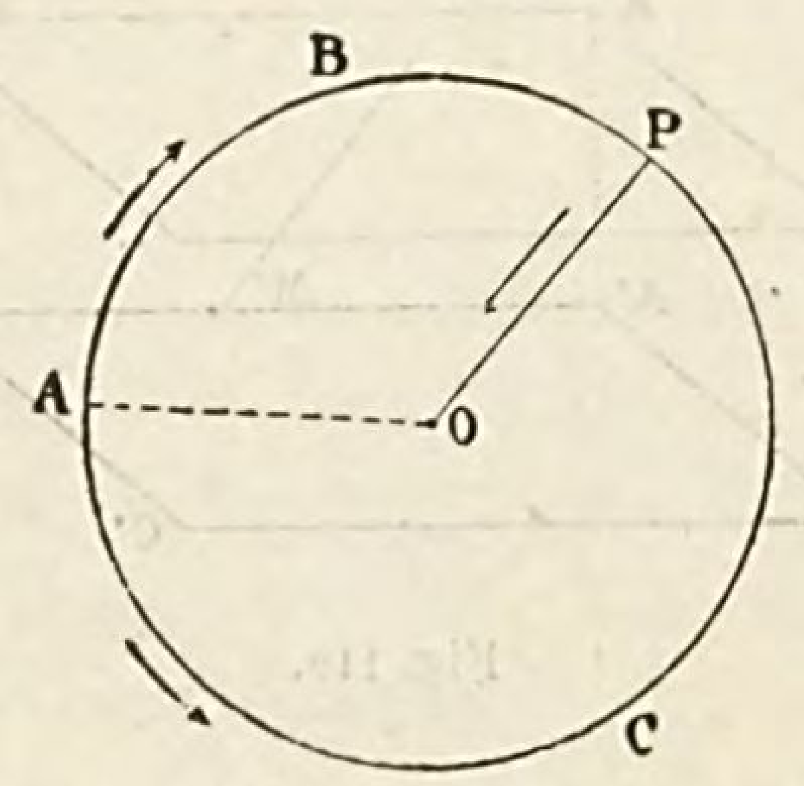


Fig. 118.

y die in dem Bogen C; in dem beweglichen Teile PO ist der Strom augenscheinlich gleich I.

Die von der Horizontalprojection S eingeschlossene Fläche besteht aus zwei Teilen, der eine $ABPO$ wendet der Componente Z der Erdwirkung seine negative Seite zu, der andere $ACPO$ die positive. Der erstere sucht demnach grösser, der zweite kleiner zu werden, und für eine Winkelverschiebung θ des Radius PO ist die Gesammtarbeit

$$\frac{1}{2}a^2(x+y)Z\theta = \frac{1}{2}a^2 IZ\theta.$$

Diese Arbeit ist von der Lage des Leiters OP unabhängig; die Kraft ist demnach constant. Die entsprechende Arbeit für eine ganze Umdrehung ist

$$\frac{1}{2}a^2 2\pi\, IZ = SIZ.$$

Liefert der Strom eine Verticalprojection S', so wird die Rotationsbewegung vermöge der dieser Projection entsprechenden Richtwirkung ge-

ändert. Man sieht leicht, dass je nach dem Verhältnisse der beiden Flächen S und S', nach der Anfangsgeschwindigkeit und dem Werte der Reibungen, das Moment der Richtwirkungen gegen das Rotationsmoment das Uebergewicht erhalten und den Apparat in einer zum magnetischen Meridian senkrechten Lage im Gleichgewichte halten kann. In den für diesen Versuch gebrauchten Apparaten wählt man einen gegen die Rotationsachse symmetrischen, beweglichen Strom. Die Projection S' ist dann Null und das Kräftepaar der Rotation, welches dem System eine gleichmässig beschleunigte Bewegung erteilen würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre, bringt denselben schliesslich in eine gleichmässige Bewegung.

492. Wirkung zweier rechteckiger Kreise auf einander. — Man kann ferner die Wirkung zweier rechteckiger Rahmen AC und $A'C'$, deren Seiten parallel sind, berechnen. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass die Rahmen (Fig. 119) gleich gross sind, und dass ihre entsprechenden Ecken A und A' auf zu ihren Ebenen senkrechten Geraden liegen. Die Energie der

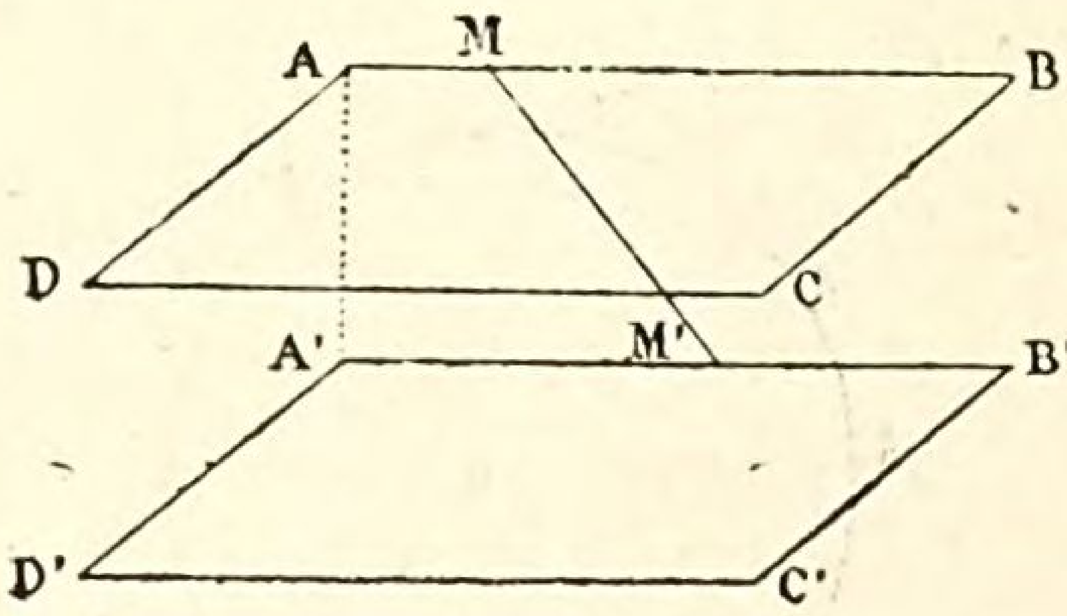


Fig. 119.

beiden Kreise auf einander, wenn sie von der Einheit gleichen Strömen durchflossen werden, wird nach der Neumann'schen Formel (**353**) ausgedrückt durch

$$W = \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} \, ds \, ds'.$$

Der Wert von $\cos \varepsilon$ ist für zwei parallele Seiten gleich Eins, und für zwei gegen einander senkrechte Seiten wie AB und $B'C'$ Null. Die Energie ist demnach

$$W = \int\int \frac{ds \, ds'}{r} = \int ds \int \frac{ds'}{r}.$$

Dieser Ausdruck enthält nur auf einander parallele Seiten bezügliche Glieder. Wir betrachten zunächst die beiden Seiten AB und $A'B'$ von der Länge a und dem Abstande h. ds und ds' seien zwei beziehungsweise in M und M' gelegene Elemente, r sei ihr Abstand; endlich nehmen wir an, dass man die Längen s und s' von A und A' aus zählt. Infolge der Beziehung

$$r^2 = h^2 + (s' - s)^2$$

erhält man für die erste Integration, in der der Abstand s als constant betrachtet wird,

$$\int \frac{ds'}{r} = \int_0^a \frac{ds'}{\sqrt{(s'-s)^2+h^2}} = l_n \left[\left(s'-s+\sqrt{(s'-s)^2+h^2}\right)\right]_0^a$$

oder

$$\int \frac{ds'}{r} = l_n \frac{a-s+\sqrt{(a-s)^2+h^2}}{-s+\sqrt{s^2+h^2}}.$$

Die zweite Integration nach s lässt sich leicht ausführen, denn es ist allgemein

$$\int l_n\left(-u+\sqrt{u^2+h^2}\right)du = u.l_n\left(-u+\sqrt{u^2+h^2}\right)+\sqrt{u^2+h^2};$$

demnach ergiebt sich

$$\int_0^a l \frac{a-s+\sqrt{(a-s)^2+h^2}}{-s+\sqrt{s^2+h^2}}\,ds = 2\left[a\,.\,l_n \frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h} - \sqrt{a^2+h^2}+h\right].$$

Wechselt man das Zeichen dieses Ausdruckes und ersetzt man h durch den Abstand h' der Seiten AB und $C'D'$, so erhält man in derselben Weise das auf diese letztere Seite bezügliche Glied. Ist das Rechteck ein Quadrat, so erhält man $h' = \sqrt{a^2+h^2}$, und die beiden Glieder der der Seite AB entsprechenden Energie liefern

$$\left[a.l_n \frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{a+\sqrt{2a^2+h^2}} \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h} + \sqrt{2a^2+h^2} - 2\sqrt{a^2+h^2}+h\right].$$

Die gesammte Energie beider Quadrate auf einander ist dann

$$W = 8\left[a.l_n \frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{a+\sqrt{2a^2+h^2}} \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h} + \sqrt{2a^2+h^2} - 2\sqrt{a^2+h^2}+h\right].$$

Lässt man den Abstand der Rahmen sich um dh ändern, so ist die Aenderung der Energie dW gleich der Arbeit $-Fdh$ der als anziehend angenommenen Kraft F, die zwischen den beiden Kreisen wirkt, und man bekommt

$$F = -\frac{dW}{dh}.$$

Man erhält so, nachdem sämmtliche Reductionen vorgenommen sind,

$$F = 8\left[\frac{a^2}{h\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{a^2h}{(a^2+h^2)\sqrt{2a^2+h^2}} + \frac{2h}{\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{h}{\sqrt{2a^2+h^2}} - 1\right].$$

Sind die Stromintensitäten der beiden Rahmen beziehungsweise I und I', so wird die Einwirkung derselben auf einander, wenn man mit P die Summe der in der Klammer enthaltenen Glieder bezeichnet, ausgedrückt durch

$$F = 8 I I' P.$$

493. Eigenschaften der Kreisströme. — Das Potential eines Kreisstromes ist bis auf eine Constante gleich dem eines Blattes von derselben Stärke und derselben Grenzlinie. Wir haben oben (**468**) den Ausdruck dieses Potentials für einen beliebigen Punkt angegeben. Liegt der Punkt auf der Achse in der Entfernung x vom Centrum, so braucht man dort nur in Gleichung (16) $\rho = 0$ zu setzen, und es ergiebt sich, wenn man Φ durch I ersetzt und mit a den Radius des Kreises bezeichnet,

$$V = 2\pi I\left(1 - \frac{x}{u}\right) = 2\pi I\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right).$$

Man findet hieraus

$$F = 2\pi I \frac{a^2}{u^3} = 2\frac{IS}{u^3},$$

wenn man mit S die Fläche des Kreises bezeichnet. Für einen Punkt der Achse ist demnach die Kraft dem Kubus des Abstandes von der Grenzlinie umgekehrt proportional.

Diese Kraft ist im Mittelpunkte des Kreises am grössten: man findet dort

$$F_m = 2\frac{IS}{a^3} = 2\pi\frac{I}{a} = \frac{IL}{a^2},$$

wenn L die Länge der Peripherie ist.

Das letzte Resultat hätte man unmittelbar aus der Betrachtung des äquivalenten Blattes ableiten können. Ist $2h$ die Dicke des als eben vorausgesetzten Blattes, so erhält man, wenn man mit I_a die Intensität der Magnetisirung bezeichnet,

$$I = \Phi = 2h I_a.$$

Die Wirkung der beiden Endschichten auf einen im Centrum liegenden Punkt hat aber den Betrag (**322**)

$$F = 4\pi I_a\left(1 - \frac{h}{a}\right),$$

und die magnetische Induction ist

$$F_1 = F_m = -F + 4\pi I_a = 4\pi I_a \frac{h}{a} = 2\pi\frac{I}{a}.$$

Man kann jetzt das Blatt zurückschlagen, so dass der Punkt ausserhalb zu liegen kommt, ohne den Wert der Kraft zu ändern (**451**).

494. Elektromagnetisches Solenoid. — Ampère nannte *Solenoid* ein System von gleichen, unendlich kleinen, einander unendlich nahen, äquidistanten und gegen irgend eine durch ihre Mittelpunkte gehende Curve, die man *Directrix* nennt, normal verlaufenden Kreisströmen.

Ist dS die für alle gleiche Fläche der Elementarströme, h ihr Abstand und I die Stromintensität, so kann jeder Elementarstrom durch ein magnetisches Blatt von derselben Grösse, von der Dicke h und der Oberflächendichte σ ersetzt werden, so dass man erhält

$$\Phi = h\sigma = I.$$

Da die sich berührenden Flächen dieser Blätter entgegengesetzt gleiche Ladungen besitzen, so heben sie sich bis auf die beiden Endflächen auf, und das System ist mit einem solenoidalen Faden (**326**) identisch. Die äussere Wirkung beschränkt sich demnach auf die der beiden magnetischen Massen $\pm M$, die sich an den Enden befinden. Bezeichnet man mit l die Länge des Solenoides, mit n die Gesammtzahl der Elementarströme und mit n_1 die Anzahl der auf die Längeneinheit fallenden Ströme, so erhält man

$$M = \sigma dS = \frac{IdS}{h} = \frac{n\,IdS}{l} = n_1 IdS.$$

495. Cylindrische Spule. — Wir nehmen an, ein Cylinder sei mit äquidistanten, zur Achse normalen Strömen bedeckt. Das System dieser Ströme bildet eine Art Solenoid von cylindrischer Form und von endlichen Transversaldimensionen; man verwirklicht dasselbe näherungsweise, indem man einen Draht in einer Spirale auf die Oberfläche eines Cylinders aufwickelt. Jedes Element der Spirale kann durch seine Projectionen auf die Achse und auf eine zur Achse senkrechte Ebene ersetzt werden. Ist der Querschnitt des Cylinders klein, so zerstört man die Wirkungen der ersteren Projectionen nahezu vollkommen, indem man den Draht in entgegengesetzter Richtung parallel zur Achse zurückführt.

Bei jedem beliebigen Durchmesser des Cylinders ist übrigens die Wirkung der Projectionen auf die Achse, wenn die Windungen einander genügend nahe sind, und wenn die Spule aus einer geraden Anzahl von Lagen besteht, in denen die Neigung der Windungen gegen die Achse abwechselnd entgegengesetzt gerichtet ist, ebenfalls nahezu vollkommen Null, und die äussere Wirkung ist wenig von der der Normalprojectionen verschieden.

Die Gesammtheit der zur Achse normalen Ströme ist mit einem solenoidalen Magnet von derselben Form gleichwertig; man kann nämlich jeden derselben durch ein Blatt ersetzen und das System in eine unendliche Anzahl von parallelen Solenoiden zerlegen, von denen jedes einem solenoidalen Faden äquivalent ist.

Die Wirkung des Systems auf die ausserhalb des Cylinders liegenden Punkte beschränkt sich demnach (**472**) auf die zweier entgegengesetzt gleicher Schichten, die gleichmässig auf den Grundflächen ausgebreitet sind, und deren Dichte σ den Wert $n_1 I$ hat.

Für die inneren Punkte ist die Kraft der Induction des gleichwertigen magnetischen Systems gleich. Ist der Cylinder so lang, dass in einem Teile desselben die Wirkung der Grundflächen unberücksichtigt bleiben kann, so sind die Kraftlinien der Cylinderachse parallel; die Kraft ist gleichförmig und hat die Intensität

$$F_1 = 4\pi I_a = 4\pi n_1 I.$$

Die Induction, die durch den Querschnitt des Cylinders geht, ist

$$Q = F_1 S = 4\pi n_1 IS;$$

diese Induction ist der inneren Kraftströmung, die von den Grundflächen des gleichwertigen Magnets ausgeht, entgegengesetzt gerichtet.

Uebrigens ist klar, dass eine Spule nicht mit einem hohlen Magnet gleichwertig ist: in dem hohlen Magnet gehen sowohl die inneren wie die äusseren Kraftlinien von der positiven Fläche aus und endigen an der negativen; in den Spulen dagegen sind die inneren Kraftlinien die Fortsetzungen der äusseren und bilden in sich geschlossene Curven, die nie an magnetischen Massen endigen.

496. Ringförmige Spule. — Nehmen wir an, dass ein Ring mit gleichen, äquidistanten Strömen bedeckt ist, die sämmtlich in Ebenen liegen, die durch die Achse gehen, so kann auch dieses System in eine Reihe von Solenoiden zerlegt werden und ist einem solenoidalen Magnete von derselben Form (**411**) gleichwertig.

Alle Elementarsolenoide enthalten dann die nämliche Anzahl von Strömen von derselben Intensität I, aber von verschiedenen Längen. Bezeichnet man mit n_1 die Anzahl der zwischen zwei Meridianebenen, die mit einander einen der Einheit gleichen Winkel bilden, enthaltenen Ströme und mit x den Radius eines Elementarsolenoides, so ist der Abstand zweier einander folgender Windungen $\frac{x}{n_1}$; die Intensität der Magnetisirung des äquivalenten magnetischen Fadens ist dann $\frac{n_1 I}{x}$, und die Induction oder die magnetische Kraft ist $\frac{4\pi n_1 I}{x}$. Die Induction, die durch eine Fläche S geht, die in dem Meridianschnitte des Ringes angenommen ist, hat den Wert $4\pi n_1 I \int \frac{dS}{x}$.

Ist der Ring ein kreisförmiger mit kreisförmigem Querschnitt, so erhält man (**372**)

$$\int \frac{dS}{x} = \pi \left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right).$$

Die gesammte durch einen Querschnitt gehende Strömung ist dann

$$Q = 4\pi^2 n I_1 \left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right),$$

wo R den Abstand des Mittelpunktes dieses Querschnittes von der Achse des Ringes und a den Radius desselben angiebt.

497. Fall einer beliebigen Oberfläche. — Wir fassen nunmehr den allgemeinen Fall ins Auge, wo eine beliebige Fläche Σ von ebenen Strömen von derselben Intensität bedeckt ist, die, unter einander parallel, in solchem Abstande von einander verlaufen, dass n_1 derselben auf die Längeneinheit kommen. Man kann auch in diesem Falle die Gesammtheit der Ströme durch parallele Solenoide ersetzen, die an der Oberfläche endigen, und diese Solenoide kann man ihrerseits durch äquivalente magnetische Fäden ersetzen; man stellt so einen gleichförmigen Magnet her, dessen Magnetisirungsintensität $n_1 I$ ist, und dessen Dichte in jedem Punkte der Oberfläche den Wert $n_1 I \cos\theta$ hat, wenn man θ den Winkel der Flächennormale in dem betrachteten Punkte gegen eine Senkrechte zur Ebene der Ströme nennt.

Die innere Wirkung dieser Ströme ist gleich der Induction des äquivalenten magnetischen Systems. In dem Falle einer Kugel (**355**) ist dieselbe constant und gleich $\frac{8}{3}\pi n_1 I$; die Induction, die durch den zur Pollinie oder zu der den Strömen gemeinsamen Achse senkrechten grössten Kreis geht, hat den Wert

$$Q = \frac{8}{3}\pi^2 R^2 n_1 I = \frac{2}{3} L^2 n_1 I,$$

wenn man mit L den Umfang des grössten Kreises bezeichnet.

Das innere Feld ist gleichfalls constant im Falle eines Ellipsoides (**356**).

Es folgt hieraus eine neue Art für die Auffassung des Erdmagnetismus: die magnetische Wirkung der Erde ist gleichwertig mit der einer Reihe von Kreisströmen, die in äquidistanten, zur magnetischen Achse senkrechten Ebenen liegen und von Osten nach Westen fliessen.

498. Ampère'sche Theorie des Magnetismus. — Man sieht, dass man mit Hilfe von in parallelen Ebenen gelegenen Strömen ein System herstellen kann, welches einem gleichförmigen Magnet mit derselben äusseren Oberfläche äquivalent ist: die beiden Systeme sind für alle äusseren Punkte gleichwertig und rufen im Innern dieselbe Induction hervor.

Man kann ebenso einen beliebigen Magnet durch ein System von Oberflächenströmen ersetzen, wenigstens so lange man nur die äussere Wirkung desselben untersucht.

Denn diese Wirkung ist mit der einer Schicht von der Gesammtmasse Null, die auf der Oberfläche verteilt ist, gleichwertig. Nennt man σ die Dichte der Schicht in einem Punkte, F_n und F'_n die von der Oberfläche aus gezählten Normalcomponenten der Wirkungen, die dieselbe nach aussen und nach innen ausübt, so erhält man (**39**)

$$4\pi\sigma = F_n + F'_n.$$

Wir fassen das innere Potential V' der Schicht und die Niveauflächen Σ ins Auge, zu denen die Kraft F' normal ist, und nehmen an, dass man

auf jede dieser Flächen entgegengesetzt gleiche Schichten bringt, deren Dichte σ' in jedem Punkte durch die Bedingung bestimmt sei

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi} F' = -\frac{1}{4\pi} \frac{dV'}{dn'}.$$

Die äussere Wirkung der Gesammtheit dieser Flächen ist Null. Nun ist das Produkt $\sigma' dn' = -\frac{1}{4\pi} dV'$ zwischen zwei auf einander folgenden Niveauflächen constant. Verbindet man demnach die negative Schicht der Fläche Σ, wo das Potential V' ist, mit der positiven Schicht der nächsten Fläche Σ' vom Potentiale $V' + dV'$, so stellt man ein Blatt her, dessen magnetische Stärke $\sigma' dn'$ constant ist. Ein Strom von entsprechender Intensität, der auf der Oberfläche längs der durch ihren Schnitt mit dem Blatte bestimmten Curve fliessen würde, übt demnach dieselbe äussere Wirkung aus; man thut dann für alle andern Blätter dasselbe. Aber bei der Herstellung dieses Blattes hat man einen negativen, der Differenz $\Sigma - \Sigma'$ der beiden Flächen entsprechenden Streifen übrig gelassen, und die Summe der äusseren Wirkungen dieser Streifen ist der der Oberflächenströme entgegengesetzt gleich. Nennt man $d\Sigma$ und dS die durch eine Kraftröhre bestimmten correspondirenden Elemente dieses Streifens und der Magnetoberfläche, so erhält man

$$F'_n dS = F' d\Sigma = 4\pi\sigma' d\Sigma,$$

woraus sich ergiebt

$$\sigma' d\Sigma = \frac{F'_n}{4\pi} dS.$$

Die Menge des in dem Elemente $d\Sigma$ eingeschlossenen Magnetismus ist demnach dieselbe wie die, welche das Element dS enthalten würde, wenn es mit Masse zur Dichte $-\frac{F'_n}{4\pi}$ belegt wäre.

Es folgt hieraus, dass die Aussenwirkung aller durch die eben behandelten Blätter definirten Oberflächenströme mit der einer Schicht von der Gesammtmasse Null gleichwertig ist, deren Dichte in jedem Punkte $+\frac{F'_n}{4\pi}$ ist.

Setzt man die dem äusseren Potentiale V entsprechenden Niveauflächen durch continuirliche Flächen ins Innere fort, so sieht man in derselben Weise, dass man eine Schicht, deren Dichte in jedem Punkte $\frac{F_n}{4\pi}$ ist, durch ein System von Oberflächenströmen ersetzen kann.

Beide Stromsysteme zusammengenommen bilden ein neues System von Oberflächenströmen, welches dieselbe Aussenwirkung besitzt wie eine Schicht mit der Dichte $\frac{1}{4\pi}(F_n + F'_n)$, also der Dichte σ der magnetischen Schicht, die mit dem angenommenen Magnet gleichwertig ist.

Man kann demnach die Aussenwirkung eines beliebigen Magnets durch die eines Systems von Oberflächenströmen ersetzen; aber die Gleichwertigkeit hört für die inneren Punkte auf.

Dagegen kann man eine genaue Darstellung aller magnetischen Wirkungen, der inneren sowohl als der äusseren, erhalten, indem man die magnetischen Fäden, in die jeder Magnet zerlegt werden kann (**313**), durch entsprechende elektromagnetische Solenoide ersetzt.

Ampère nimmt an, dass diese Elementarsolenoide aus wirklichen Strömen bestehen, die innerhalb der Moleküle kreisen; diese Ströme gehen nie von einem Molekül auf ein anderes über und sind bereits vor der Magnetisirung (**425**) vorhanden, die ihrerseits nur die Orientirung derselben bewirkt.

Bei dieser Hypothese ist ein Magnet nicht mehr eine continuirliche Substanz, sondern eine Zusammenfassung von gesonderten Molekülen, die eine sehr complexe Verteilung der magnetischen Kraft und des Potentials verursachen. Aber es folgt aus dieser Hypothese eine bemerkenswerte Vereinfachung; denn die Kraft und die magnetische Induction werden dann in derselben Weise definirt, und die Kraft befriedigt die Laplace'sche Gleichung ebenso innerhalb wie ausserhalb des Magnets.

Die Ampère'sche Hypothese beseitigt noch eine principielle Schwierigkeit; denn man sieht nicht ein, wie Ströme dauernd existiren können, ohne Wärme zu entwickeln, und folglich ohne fortwährend Energie zu verbrauchen. Aber wenn man die Ströme in die Moleküle selbst versetzt, deren Constitution ja unbekannt ist, ist die Annahme nicht unmöglich, dass der Widerstand Null ist, und dass die Ströme in einer Form existiren, die dem Versuche nicht zugänglich ist. Diese Auffassung schliesst demnach keinen Widerspruch gegen die Erfahrung in sich.

499. Magnetisirung durch Ströme. — Die Magnetisirung durch Ströme wurde von Arago im Jahre 1820 entdeckt. Arago hatte gefunden, dass ein von einem Strome durchflossener Kupferdraht Eisenfeilspäne anzieht; jedes Teilchen des Feilichts wird ein kleiner Magnet und stellt sich zum Drahte senkrecht mit dem Nordpol links vom Strome, wie im Oersted'schen Versuche. Ampère machte darauf aufmerksam, dass man die Wirkung des Stromes auf einen Stab von weichem Eisen oder Stahl stark vergrössern kann, indem man den Draht spiralig um den Stab windet; man erhält so, besonders mit weichem Eisen, temporäre Magnete, die man als Elektromagnete bezeichnet.

Die Elektromagnete können eine weit grössere Stärke entwickeln als die aus den besten Stahlstäben verfertigten; aber ihre wichtigste Eigenschaft ist die, dass sie, wenn das Eisen, aus dem sie hergestellt sind, sehr weich ist, fast augenblicklich ihre magnetischen Eigenschaften erhalten und verlieren können. Endlich zeigen dieselben noch die besondere Eigentümlichkeit, dass man, wenn man die Wicklung des Drahtes auf dem Weicheisenkern in passender Weise ändert, den Magnetismus auf demselben nach

Wunsch verteilen und auf der Länge des Stabes eine beliebige Anzahl von Polen erhalten kann.

Die Berechnung der Wirkungen von Elektromagneten ist im Allgemeinen sehr schwierig, selbst dann, wenn die das Weicheisenstück umgebenden Ströme äquidistant und einander parallel sind. In diesem Falle ruft das Stromsystem ein inneres Feld hervor, dessen Intensität durch die Induction eines gleichförmigen von derselben Oberfläche begrenzten Magnets definirt ist; der in diesem Felde befindliche Weicheisenkern erhält in jedem Punkte eine Magnetisirung, die von der Intensität des Feldes und auch von dem durch Induction in ihm selbst hervorgerufenen Magnetismus abhängt. Die Magnetisirung kann demnach nur in den von uns (**385**) untersuchten Fällen gleichförmig sein. Was die Aussenwirkung betrifft, so ist dieselbe die Resultante aus der des Stromsystems oder der äquivalenten gleichförmigen Magnete und der des Weicheisenkerns.

500. Beispiel. — Für eine von parallelen und äquidistanten Strömen umflossene Kugel hat die Intensität des von den Strömen hervorgerufenen Feldes (**497**) den Wert $\varphi = \frac{8}{3}\pi n_1 I$.

Die Magnetisirungsintensität ist dann (**386**)

$$\frac{3}{4\pi}\frac{\mu-1}{\mu+2}\varphi = 2\frac{\mu-1}{\mu+2}n_1 I,$$

und die Induction

$$F_1 = \frac{3\mu}{\mu+2}\varphi = \frac{8\pi\mu}{\mu+2}n_1 I.$$

Befindet sich die Kugel in einer cylindrischen Spule, die so lang ist, dass die Wirkung der Enden ausser Acht gelassen werden kann, so empfängt dieselbe auch eine gleichförmige Magnetisirung.

Ebenso würde es sich mit einem Ellipsoide verhalten und sehr annähernd auch mit einem Cylinder, dessen Achse mit der der Spule zusammenfällt.

501. — In dem Falle einer cylindrischen Spule von grosser Länge (**495**) ist die Intensität des inneren Feldes $4\pi n_1 I$; die Magnetisirungsintensität eines langen, dem Felde parallelen Cylinders hat dann den Wert $k\varphi$ (**385**) oder $4\pi k n_1 I$, und die innere Induction der Magnetisirung ist $4\pi k\varphi$ oder $16\pi^2 k n_1 I$.

Ist S der Querschnitt des Stabes, so ist die Strömung der magnetischen Induction, die hindurchgeht,

$$F_1 S = 16\pi^2 k n_1 IS,$$

und die Gesammtströmung mit Einschluss der Induction $4\pi n_1 IS$ des Stromes hat den Wert

$$Q = 4\pi n_1 (1 + 4\pi k) IS.$$

Diese Grösse ist dem Versuche zugänglich, und man kann aus derselben den Magnetisirungscoefficienten k finden.

502. — Die Bestimmung dieses Coefficienten erfolgt noch genauer mittels eines Weicheisenstückes von der Form eines Ringes, den man mit äquidistanten Strömen umgiebt (**496**). In diesem Falle ist die Intensität des von den Strömen hervorgerufenen Feldes in jedem Punkte $\frac{4\pi n_1 I}{x}$. Da diese Kraft allein wirksam ist, so hat die Magnetisirungsintensität in dem betrachteten Punkte den Wert

$$k\varphi = \frac{4\pi n_1 I}{x}.$$

Die Induction der Magnetisirung ist gleich $4\pi k\varphi$, so dass die gesammte Induction durch den Querschnitt S des weichen Eisens hindurch, einschliesslich der von den Strömen herrührenden, ist

$$Q = 4\pi n_1 I(1 + 4\pi k)\int \frac{dS}{x}.$$

Füllt das weiche Eisen nicht den ganzen von den Strömen begrenzten Raum, sondern nur einen Teil S' des Querschnittes S aus, so ist die gesammte Induction, die durch die Oberfläche der Ströme geht,

$$Q' = 4\pi n_1 I\left[\int \frac{dS}{x} + 4\pi k \int \frac{dS'}{x}\right].$$

Nehmen wir zum Beispiel an, der Querschnitt des Eisens sei ein mit dem kreisförmigen Querschnitt eines Ringes concentrischer Kreis vom Radius a', so ist die gesammte Induction in dem Ringe

$$Q' = 4\pi^2 n_1 I[R - \sqrt{R^2 - a^2} + 4\pi k(R - \sqrt{R^2 - a'^2})].$$

Ist der Querschnitt der Spule ein Rechteck, dessen zur Drehungsachse parallele Seite b, dessen Dicke $2a$ und dessen mittlerer Radius R ist, so erhält man

$$\int \frac{dS}{x} = b\int_{R-a}^{R+a} \frac{dx}{x} = b \,.\, l_n \frac{R + a}{R - a}.$$

Ebenso kann der Eisenring einen rechtwinkligen Querschnitt besitzen mit den Seitenlängen l' und $2a'$ und dem mittleren Radius R'; in diesem Falle ist die gesammte Inductionsströmung

$$Q = 4\pi n_1 I\left[b \,.\, l_n \frac{R + a}{R - a} + 4\pi k b' \,.\, l_n \frac{R' + a'}{R' - a'}\right].$$

Wir werden weiter (**559**) die Anwendung kennen lernen, die man von diesen verschiedenen Formeln machen kann.

503. Messung der Ströme. — Galvanometer. — Man ermittelt gewöhnlich die Intensität von Strömen durch die elektromagnetischen oder die elektrodynamischen Wirkungen, die sie ausüben, und man nennt das zu

dieser Messung dienende Instrument *Galvanometer* oder *Elektrodynamometer*, je nachdem dasselbe auf der einen oder der andern der beiden Wirkungen beruht.

Ein Galvanometer besteht aus einer Magnetnadel oder einem beliebigen magnetischen System, auf welches man einen von einem Strome durchflossenen Leiter einwirken lässt; man ermittelt die hervorgerufene Wirkung mittels einer Gegenkraft, wie der Torsion eines Metalldrahtes oder einer Bifilaraufhängung oder durch die Wirkung eines äusseren magnetischen Feldes.

Wir fassen nur den Fall einer horizontalen Nadel ins Auge, die an einem Faden ohne merkliche Torsion aufgehängt ist, und die sich im Mittelpunkte eines Rahmens befindet, um den man einen Leitungsdraht gewunden hat, der eine Reihe von parallelen Windungen bildet.

Sind die Windungen dem magnetischen Meridiane parallel, und lässt man dieselben von einem Strome durchfliessen, so rufen sie ein magnetisches Feld hervor, dessen Intensität in der Mitte der Stromintensität proportional ist und durch gI angegeben werden kann. Ist die Horizontalcomponente der Erdkraft in diesem Punkte H, so ist die Horizontalcomponente des Feldes $\sqrt{g^2I^2 + H^2}$, und die Richtung desselben bildet mit dem magnetischen Meridian einen Winkel δ, dessen Tangente gleich $\frac{gI}{H}$ ist.

Eine kleine, in diesem Punkte befindliche Magnetnadel, die sich Anfangs in der Ebene des Rahmens im Gleichgewichte befunden hat, wird demnach um den Winkel δ abgelenkt, und man kann hieraus die Stromintensität durch den Ausdruck finden

$$I = \frac{H}{g} \operatorname{tg} \delta.$$

Die Formel ist nur genau, wenn das magnetische Feld des Stromes in dem ganzen von der Nadel eingenommenen Raume gleichförmig ist. Hat die Nadel eine gegen die Dimensionen des Rahmens merkliche Länge, so bewegt sie sich im Allgemeinen nicht in einem gleichförmigen Felde, und die Ablenkung wird durch eine weniger einfache Formel gegeben. Man kann dann vermöge einer empirischen Graduirung die Beziehung bestimmen, die zwischen der Stromintensität und der von derselben verursachten Ablenkung besteht.

Das magnetische Moment der Nadel hat keinen Einfluss auf die Gleichgewichtslage; dasselbe hat keine andere Wirkung als die, die Intensität der Kräfte und demnach die Schwingungsdauer der Nadel zu beeinflussen.

Will man die Empfindlichkeit des Galvanometers, also die Ablenkung δ, durch einen gegebenen Strom vergrössern, so muss man den Wert von g vergrössern und, wenn möglich, den von H verkleinern. Man vergrössert den Wert von g durch Vermehrung der Windungen des Rahmens, wie dies Schweigger zuerst gethan hat, und indem man dieselben der Nadel möglichst nahe bringt. Zur Verkleinerung von H kann man in einer gewissen Entfernung einen Magnet anbringen, der im Mittelpunkte des Rahmens ein dem Erdfelde paralleles, aber entgegengesetzt gerichtetes Feld hervorruft.

Häufig benutzt man hierzu ein quasiastatisches System von zwei Nadeln (**299**), von denen die eine im Mittelpunkte des Rahmens, die andere ausserhalb desselben liegt; die Wirkung der Erde auf das bewegliche System ist dann sehr geschwächt, ohne dass die Wirkung des Stromes, die hauptsächlich auf die innere Nadel ausgeübt wird, merklich geändert wird. Man kann auch zwei Rahmen benutzen, jeden mit einer der Nadeln in seinem Mittelpunkte, und in denselben den Strom in entgegengesetzten Richtungen verlaufen lassen, so dass die auf die beiden Nadeln ausgeübten Wirkungen in der Richtung übereinstimmen.

504. Tangentenbussole. — Will man die Intensität eines Stromes in absolutem Werte bestimmen, so bedarf man ausser der Kenntnis der Componente H des Erdmagnetismus auch der der Constante g des Galvanometers. Man nennt nun *Tangentenbussole* ein Galvanometer, dessen Draht so gewunden ist, dass dieser Coefficient aus den Dimensionen des Drahtes und der Form des Rahmens berechnet werden kann.

Enthält der Rahmen einen Draht von der Länge L, der auf einen Kreis vom Radius a so aufgewickelt ist, dass er n Windungen besitzt, und befindet sich die als klein vorausgesetzte Nadel in einem Punkte der Achse, dessen Abstand von der Peripherie u ist, so erhält man (**493**)

$$g = n\frac{2\pi a^2}{u^3} = \frac{La}{u^3} = \frac{4\pi^2 n^2}{L}\left(\frac{a}{u}\right)^3,$$

woraus sich ergiebt

$$I = \frac{Hu^3}{La}\operatorname{tg}\delta = \frac{HL}{4\pi^2 n^2}\left(\frac{u}{a}\right)^3 \operatorname{tg}\delta.$$

Der Abstand u wird gleich a, wenn sich die Nadel im Mittelpunkte des Kreises befindet.

Will man die Länge der Nadel in Rechnung ziehen, so muss man mittels der Formeln aus § 368 die Intensität des Feldes ausserhalb der Achse der Ströme ausmitteln.

Die Formel für die Tangentenbussole wäre genau und von der Länge der Nadel unabhängig, wenn das Feld des Stromes ein gleichförmiges wäre. Dies trifft zum Beispiel für eine cylindrische (**495**) oder eine sphärische Spule (**497**) mit äquidistanten Kreisen zu. Nennt man n_1 die Anzahl Windungen, die auf die Längeneinheit kommen, so erhält man $g = 4\pi n_1$ im ersten Falle, und $g = \frac{8}{3}\pi n_1$ im andern.

505. Elektrodynamometer. — Mit einem Elektrodynamometer ermittelt man direkt die zwischen zwei Kreisen, einem festen und einem beweglichen, die von demselben oder von zwei verschiedenen Strömen durchflossen werden, ausgeübten Wirkungen. Wir nehmen beispielsweise an, dass der Magnet einer Tangentenbussole durch eine kleine Spule ersetzt wird, der durch eine Bifilaraufhängung ein Strom zugeführt werden kann, und

die sich im Gleichgewichte befindet, wenn die Achse der Spule im magnetischen Meridian liegt. Lässt man einen Strom I in den Rahmen der Bussole und einen Strom i in die Spule eintreten, so wird diese abgelenkt, und man führt dieselbe dann durch eine passende Torsion α der Aufhängung in ihre ursprüngliche Lage zurück.

Das magnetische Moment der beweglichen Spule ist i proportional und kann durch li wiedergegeben werden; das durch die Wirkung des Rahmens hervorgerufene Kräftepaar ist dann $gliI$. Da das Paar der Torsion der Bifilaraufhängung dem Sinus des Winkels proportional ist, erhält man, indem man mit T das Moment des einem Torsionswinkel $\frac{\pi}{2}$ entsprechenden Paares bezeichnet,

$$gliI = T \sin \alpha.$$

Werden beide Drähte von demselben Strome I durchflossen, so wird dieser Ausdruck

$$I^2 = \frac{T \sin \alpha}{gl}.$$

Man kann demnach den absoluten Wert der Stromintensität ermitteln, wenn man die Constanten T, l und g kennt, oder auch diese Constanten unbestimmt lassen und den Apparat als Vergleichsinstrument benutzen. Dies ist das Prinzip der Weber'schen Versuche.

Nimmt man an, dass der Strom, wie in den Versuchen von Cazin, zwei rechtwinklige, parallele Rahmen (492) durchfliesst, so kann die Intensität aus den Anziehungs- oder Abstossungswirkungen abgeleitet werden, die zwischen den beiden Kreisen bestehen.

506. Messung der Entladungen. — Ist die Dauer einer Entladung so kurz, dass die Nadel nicht die Zeit gehabt hat, vor dem Aufhören des Stromes eine merkliche Ablenkung zu erleiden, so hat sie dennoch einen Impuls erhalten und eine bestimmte Geschwindigkeit erlangt; sie ist aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht und kehrt dann durch eine Reihe von Schwingungen in dieselbe zurück. Dies tritt zum Beispiel bei der Entladung eines Condensators durch einen ein Galvanometer enthaltenden Leitungsdraht ein. Die gesammte Elektricitätsmenge, die sich ergiesst, kann aus dem Winkel abgeleitet werden, um welchen der der Nadel erteilte Stoss sie aus der Gleichgewichtslage treibt.

Die Intensität eines dauernden Stromes in dem betrachteten Leiter wäre gegeben durch einen Ausdruck von der Form

$$I = \frac{H}{g} f(\delta),$$

in dem sich $f(\delta)$ auf den Winkel δ reducirt, wenn die Ablenkungen sehr klein sind. Nennt man μ das magnetische Moment der Nadel, so ruft die Einwirkung des Stromes auf die Nadel ein Kräftepaar hervor, dessen Moment $\mu g I$ ist.

Andererseits weiss man, dass, wenn ein Körper um eine Achse beweglich ist, das Produkt des Trägheitsmomentes K in die Winkelbeschleunigung $\frac{d\omega}{dt}$ dem Moment des resultirenden Paares in Bezug auf die Rotationsachse gleich ist. Man erhält demnach für die betrachtete Nadel, da die Ablenkung während der Entladung so klein ist, dass die Einwirkung der Erde vernachlässigt werden kann,

$$K\frac{d\omega}{dt} = \mu g I.$$

Nennt man dm die Elektricitätsmenge, die sich in der Zeit dt ergiesst, so geht diese Gleichung über in

$$K\frac{d\omega}{dt} = \mu g \frac{dm}{dt}.$$

Hieraus findet man, wenn man ω_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit und m die Gesammtentladung nennt,

$$K\omega_0 = \mu g m.$$

Ist die Nadel einmal mit dieser Geschwindigkeit ω_0 fortgeschleudert, so besitzt dieselbe eine lebendige Kraft gleich $\frac{K\omega_0^2}{2}$, und ihre Bewegung hört bei einem Winkel θ auf, wenn sie entgegen der Wirkung des Erdfeldes eine Arbeit erzeugt hat, die denselben Wert besitzt. Man erhält

$$\frac{K\omega_0^2}{2} = H\mu(1 - \cos\theta) = 2H\mu\sin^2\frac{\theta}{2},$$

oder

$$\mu g^2 m^2 = 4HK\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$m = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{HK}{\mu}}\, 2\sin\frac{\theta}{2}.$$

Sind die Ausschläge θ klein genug, so kann man einfach setzen

$$m = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{HK}{\mu}}\,\theta = \frac{H}{g}\,\theta\sqrt{\frac{K}{H\mu}}.$$

Man sieht, dass der Winkel θ, um welchen der Stoss des Stromes die Nadel aus der Gleichgewichtslage gebracht hat, der Elektricitätsmenge proportional ist, die während der Entladung ausfliesst, und dieses Gesetz der Proportionalität reicht für alle Vergleichsversuche aus.

Will man m dem absoluten Werte nach bestimmen, so muss man die Constante g des Galvanometers und die unter dem Wurzelzeichen stehenden Grössen kennen.

Wir bemerken noch, dass, wenn die Nadel unter dem Einfluss des Erdmagnetismus sich selbst überlassen wird, die Dauer τ einer einfachen unendlich kleinen Schwingung ist

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{H\mu}}.$$

Es folgt daraus

$$m = \frac{H}{g}\frac{\tau}{\pi}\theta.$$

In der experimentellen Ausführung wird der Winkel infolge des Widerstandes des Mittels und infolge der Inductionsströme, welche die Bewegung der Nadel in dem Drahte hervorruft, kleiner; aber wenn die Schwingungen nicht sehr schnell abnehmen, kann man diese Wirkung in Rechnung ziehen, indem man zum Winkel θ ein Viertel des Ueberschusses dieses Ausschlages über den nach derselben Seite bei der folgenden Schwingung gemachten Ausschlag θ' hinzufügt. Man erhält schliesslich

$$m = \frac{H}{g}\frac{\tau}{\pi}\left[\theta + \frac{1}{4}(\theta - \theta')\right].$$

4. Capitel.

Induction.

507. Entdeckung von Faraday. — Die in den letzten Capiteln behandelten elektromagnetischen Wirkungen sind rein *mechanische;* dieselben werden auf die Leiter ausgeübt, die von Strömen durchflossen werden, und entsprechen einem dauernden Zustande der Ströme und der ihnen gegenüber befindlichen Magnete. In allen Fällen, wo die Systeme relative Verschiebungen erlitten haben, haben wir die stillschweigende Annahme gemacht, dass diese Verschiebungen auf den elektrischen Zustand der Leiter ohne Einfluss sind. Faraday hat im Jahre 1831 eine Klasse von Erscheinungen von ganz anderer Natur entdeckt, die dem veränderlichen Zustande der Systeme entsprechen; diese Erscheinungen, die er unter dem Namen der *Induction* zusammengefasst hat, sind *elektrischer* Natur und treten in der Hervorrufung von temporären Strömen in den Leitern zu Tage.

Man nennt die hierdurch entstehenden Ströme *inducirte Ströme* und den der *Induction* ausgesetzten Stromkreis den *inducirten Kreis;* endlich bezeichnet man als *inducirend* das System, dessen Aenderung die Ursache des inducirten Stromes ist.

508. — Die von Faraday entdeckten Erscheinungen können in mehrere Kategorieen gebracht werden.

I. Ein geschlossener Kreis wird stets Träger eines temporären Stromes, sobald man einen Magnet in seiner Nähe verschiebt, oder sobald man die Magnetisirung dieses Magnets ändert oder allgemeiner, sobald man das magnetische Feld verändert, in dem sich der Kreis befindet. Dies ist die *magnetoelektrische Induction.*

2. Man erhält analoge Wirkungen, wenn man ein Stromsystem an die Stelle des magnetischen Systems setzt. Der betrachtete Kreis wird stets von einem inducirten Strome durchflossen, sobald man die Entfernung, die Intensität oder die Form eines äusseren Stromes verändert. Die Wirkung ist dieselbe wie die, welche die entsprechende Aenderung des mit dem Strome äquivalenten magnetischen Systems hervorrufen würde.

3. Die Aenderung der Form oder der relativen Lage eines geschlossenen Kreises gegen ein durch ein System von Magneten oder von Strömen hervor-

gerufenes magnetisches Feld genügt gewöhnlich ebenfalls, um in diesem Kreise einen inducirten Strom hervorzurufen, der unter eine der eben angeführten Kategorieen fällt.

4. Endlich ruft die blosse Thatsache, dass durch irgend einen Prozess die Stromintensität in einem Stromkreise geändert wird, selbst wenn derselbe jeder Einwirkung von aussen entzogen ist, in diesem Kreise einen Inductionsstrom hervor, der zu dem Hauptstrome hinzutritt und stets der Intensitätsänderung entgegenwirkt, der dieser ausgesetzt wird; man nennt diesen Strom *Extrastrom.*

509. — Der Versuch liefert für diese Inductionsströme folgende allgemeine Thatsachen:

1. Welches auch die Art der Aenderung sein möge, die einen inducirten Strom verursacht, zwei entgegengesetzt gleiche Aenderungen liefern stets entgegengesetzt gleiche Ströme;

2. Die Ströme werden so lange inducirt, als die Aenderung des inducirenden Systems andauert;

3. Die in dem inducirten Strome durch irgend eine Operation im Ganzen in Bewegung gebrachte Elektricitätsmenge ist von der Dauer der Aenderung und folglich von der des inducirten Stromes selbst unabhängig;

4. Endlich hat die Natur des Leiters, in dem sich die Inductionsströme fortpflanzen, nur vermöge des Widerstandes Einfluss, den dieselbe in diesen Kreis einführt.

510. — Prüft man die verschiedenen Umstände, unter denen Inductionsströme entstehen, so erkennt man leicht, dass dieselben den gemeinschaftlichen Charakter besitzen, dass sie einer Aenderung der magnetischen Kraftströmung entsprechen, die durch den inducirten Kreis hindurchgeht. Dies ist für alle Erscheinungen der relativen Verschiebung von Strömen oder Magneten klar; der Versuch zeigt ferner, dass keine Verschiebung und keine Deformation des inducirten Kreises, die den Wert der denselben durchsetzenden Strömung nicht ändert, jemals inducirte Ströme hervorruft.

Ebenso verhält es sich mit dem Extrastrome. Denn ein Strom ruft ein magnetisches Feld und infolge dessen eine Kraftströmung in der Fläche des Kreises, durch welchen derselbe fliesst, hervor. Man begreift, dass jede Intensitäts- oder Formänderung, die diese Strömung ändert, eine Wirkung hervorrufen kann, die der analog ist, welche die Verschiebung eines äusseren Magnets, der dieselbe Aenderung verursacht, hervorrufen würde.

Man gelangt so zu folgender Charakterisirung der Inductionserscheinungen:

Aendert man in irgend einer Weise die magnetische Kraftströmung, die durch einen geschlossenen Kreis geht, so wird dieser Kreis Träger eines temporären Stromes, dessen Dauer der der Strömungsänderung gleich ist.

Diese Ausdrucksweise definirt die Bedingungen, unter denen inducirte Ströme entstehen. Es sind nun noch die Gesetze festzustellen, die die Richtung und die Grösse derselben bestimmen.

511. Gesetz von Lenz. — Kurz nach der Entdeckung Faraday's hat Lenz folgendes Gesetz ausgesprochen, welches ein Band zwischen der durch die Verschiebung des inducirenden Systems hervorgerufenen Induction und der elektromagnetischen Arbeit, wie dieselbe die Ampère'sche Formel definirt, herstellt:

Jede relative Verschiebung eines geschlossenen Kreises und eines Stromes oder eines Magnets ruft einen inducirten Strom hervor, der so gerichtet ist, dass er die Bewegung zu verhindern sucht.

512. Satz von Neumann. — Das Lenz'sche Gesetz, welches für die Praxis so grosse Bedeutung hat, liefert nur die Richtung des inducirten Stromes, ohne die Intensität desselben anzugeben. Neumann hat, indem er es als eine experimentell festgestellte Thatsache annahm, dass *die in einer sehr kurzen Zeit hervorgerufene Induction der Geschwindigkeit, mit der sich der Leiter bewegt, proportional ist,* eine vollständige Theorie der Inductionsströme aufstellen können, die in einem beweglichen linearen Leiter in Gegenwart irgend eines magnetischen Systems entstehen. Er hat so folgenden Satz bewiesen, den wir später in einer allgemeineren Form wiederfinden werden:

Die elektromotorische Kraft der Induction ist gleich der Arbeit, die in der Zeiteinheit von dem magnetischen System bei der Veränderung geleistet würde, wenn die Stromintensität in dem inducirten Kreise der Einheit gleich wäre.

513. Theorie von Helmholtz und Thomson. — Die Existenz der Inductionserscheinungen kann als notwendige Folge des Prinzips der Erhaltung der Energie in Verbindung mit dem elektromagnetischen Gesetze von Ampère und dem Joule'schen Gesetze aufgefasst werden. Dieser Satz ist zum ersten Male von Helmholtz im Jahre 1847 in seiner berühmten Abhandlung *„Ueber die Erhaltung der Kraft"* klargelegt worden. Sir W. Thomson ist seinerseits unabhängig davon zu denselben Schlüssen gelangt.

Wir fassen ein unveränderliches magnetisches System in der Nähe eines festen Leiters S, der mit einer Kette verbunden ist, ins Auge. Ist der Magnet unbeweglich, so ist die Intensität I_0 des dauernden Stromes durch das Ohm'sche Gesetz bestimmt, und man erhält, wenn man E die elektromotorische Kraft der Kette und R den Widerstand des Kreises nennt,

$$(1) \qquad E = I_0 R.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $I_0 dt$, so ergiebt sich

$$(2) \qquad E I_0 dt = I_0^2 R dt.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass während der Zeit dt die durch die chemische Aktion erzeugte Energie der vermöge des Joule'schen Gesetzes in dem Kreise verbrauchten Wärmeenergie gleich ist.

Nehmen wir jetzt an, dass das magnetische System nicht mehr unbeweglich bleibt, sondern sich den elektromagnetischen Einwirkungen folgend

verschiebt, so kann die von dieser Verschiebung herrührende äussere Arbeit nur der einzigen in dem System vorhandenen Energiequelle, also den chemischen Wirkungen, entnommen sein, und die letzte Gleichung kann nicht mehr bestehen. Andererseits ist kein Grund für die Annahme vorhanden, dass die Gesetze von Faraday und von Joule nicht mehr anwendbar sind; in anderen Worten: Die Gewichte der in den verschiedenen Elementen vereinigten Körper müssen auch jetzt noch der Stromintensität proportional sein und die in dem Kreisen etwickelte Wärmeenergie muss noch dem Produkte des Widerstandes in das Quadrat der Intensität gleich sein. Die Stromintensität hat demnach nicht ihren ursprünglichen Wert beibehalten können.

514. — Wir nehmen nunmehr an, dass der Magnet so verschoben wird, dass der neue Wert der Intensität constant bleibt. So lange diese Bedingung erfüllt ist, dient der Ueberschuss der chemischen Arbeit über die in dem Kreise verbrauchte Wärmeenergie während jedes Zeitintervalls dt dazu, die äussere den elektromagnetischen Kräften entsprechende Arbeit zu leisten. Man erhält demnach, wenn man I die Stromintensität nennt,

$$EIdt = I^2 R dt + dT. \tag{3}$$

Nennt man aber Q die von dem magnetischen Systeme herrührende Kraftströmung, die von der negativen Seite aus durch den Strom hindurchgeht, so wird

$$dT = IdQ,$$

und indem man in Gleichung (3) dT durch diesen Wert ersetzt, und durch Idt dividirt, ergiebt sich

$$E = IR + \frac{dQ}{dt}. \tag{4}$$

Damit der Strom constant bleibt, muss nach dieser Gleichung die Verschiebung so erfolgen, dass die Ableitung $\frac{dQ}{dt}$ ebenfalls constant ist.

Die Gleichungen (1) und (4) liefern, wenn man $I_0 - I = i$ setzt,

$$(I_0 - I)R = iR = \frac{dQ}{dt}. \tag{5}$$

Man sieht, dass die Ableitung $\frac{dQ}{dt}$ die Rolle einer elektromotorischen Kraft spielt, die E entgegenwirkt, und die fähig ist, einen Strom i hervorzurufen, der dem Hauptstrome entgegengesetzt ist, so dass der resultirende Strom noch dem Ohm'schen Gesetze genügt, welches wir in der Form schreiben

$$E - \frac{dQ}{dt} = IR. \tag{6}$$

Die Grösse $\frac{dQ}{dt}$ heisst *die elektromotorische Kraft der Induction: dieselbe ist in jedem Augenblicke gleich der Ableitung der magnetischen Kraftströmung, die durch den Kreis geht, nach der Zeit.*

Ist der Wert von dQ positiv, wird also die Kraftströmung grösser, so schwächt die elektromotorische Inductionskraft die Intensität des Stromes, und die Arbeit der elektromagnetischen Kräfte ist positiv. Ist dagegen der Wert von dQ negativ, so verschiebt sich der Magnet so, dass er den elektromagnetischen Kräften Widerstand leistet, und dieser Vorgang führt eine neue Energie in das System ein; die Intensität I des Stromes ist dann grösser als im Ruhezustande.

515. — In jedem Augenblicke wird die Menge dm oder idt der in dem Drahte inducirten Elektricität durch die Gleichung gegeben

$$iRdt = Rdm = dQ. \tag{7}$$

Die gesammte Elektricitätsmenge m, die einer endlichen Verschiebung entspricht, für die die Kraftströmung von dem Werte Q_1 in den Wert Q_2 übergeht, ist demnach

$$m = \frac{Q_2 - Q_1}{R}. \tag{8}$$

516. — Die Entstehung eines Stromes in einem Kreise erfordert, für sich genommen, eine Arbeit, die wir nicht in Rechnung gezogen haben, und diese Arbeit, auf die wir später noch zurückkommen werden, ist eine Funktion Φ der Intensität des Stromes. Während der veränderlichen Periode muss die Energie der chemischen Wirkungen auch die Arbeit $d\Phi$ liefern, die einem Zuwachs dI der Intensität entspricht. Die Gleichungen (3) und (5) gehen dann über in

$$\begin{gathered} EIdt = I^2Rdt + IdQ + d\Phi \\ iR = \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{I}\frac{d\Phi}{dt}. \end{gathered} \tag{9}$$

Man findet hieraus durch einen Schluss, der dem analog ist, der die Gleichung (8) liefert,

$$mR = Q_2 - Q_1 + \int_1^2 \frac{1}{I} d\Phi. \tag{8'}$$

Nach welchem Gesetze sich das magnetische System auch verschieben möge, wenn die Intensität des Stromes an den beiden Grenzen dieselbe ist, dann ist das letzte Glied der Gleichung (8)′ Null. Dies ist insbesondere der Fall, wenn die Grenzen so gewählt sind, dass die eine für den Zustand vor, die andere für den nach der Bewegung gilt, in welchem Falle die beiden Grenzwerte des Stromes gleich I_0 sind.

Mit diesen Einschränkungen kann man demnach als allgemeinen, durch die Gleichung (8) ausgedrückten Satz aussprechen:

Die gesammte durch irgend eine Verschiebung eines magnetischen Systems in Bewegung gesetzte Elektricitätsmenge ist gleich dem Quotienten der Aenderung der Kraftströmung, die dieser Verschiebung entspricht, durch den Widerstand des Kreises.

517. — Die eben erhaltenen Resultate geben zu einigen wichtigen Bemerkungen Gelegenheit:

1. Man sieht zunächst, dass die elektromotorische Kraft der Induction die Eigenschaft hat, der Bewegung Widerstand zu leisten, da die ursprüngliche Stromintensität verkleinert oder vergrössert wird, je nachdem das magnetische System den elektromagnetischen Wirkungen folgt oder denselben Widerstand leistet: dies ist das *Lenz'sche Gesetz.*

2. Wäre die Stromintensität der Einheit gleich, dann würde die geleistete äussere Arbeit dT einer Arbeit $\frac{dQ}{dt}$ während der Zeiteinheit entsprechen. Die elektromotorische Inductionskraft ist dieser Arbeit gleich: dies ist der *Neumann'sche Satz.*

3. Die elektromotorische Inductionskraft ist von der elektromotorischen Kraft C der Kette unabhängig; die Induction bleibt demnach dieselbe, wie schwach auch die Intensität des ursprünglichen Stromes sein möge. Man kann hieraus schliessen, dass die Induction gleichfalls eintreten muss, wenn der Leiter sich im neutralen Zustande befindet, vorausgesetzt, dass er einen geschlossenen Kreis bildet. In dieser Form sind die Inductionsströme von Faraday entdeckt worden.

Immerhin muss man hervorheben, dass, wenn der Strom wirklich in der ganzen Ausdehnung des Leiters Null wäre, die Einwirkung des Magnets und des Kreises auf einander ebenfalls Null wäre, und dass die eben durchgeführten Betrachtungen nicht die Entstehung von inducirten Strömen hätten voraussehen lassen. Aber man kann sagen, dass diese vollkommene Neutralität nur ein labiler Gleichgewichtszustand ist, der in Wirklichkeit nie erreicht werden kann, und dass eine unendliche kleine Ursache, eine Temperaturänderung in irgend einem Punkte des Kreises oder die Verschiebung eines äusseren, selbst sehr entfernten elektrischen Körpers genügen würde, um einen noch so schwachen Strom entstehen zu lassen und infolge dessen den Eintritt der Induction zu ermöglichen.

518. Allgemeines Gesetz der Induction. — Die letzten Schlüsse würden in derselben Weise und fast in denselben Ausdrücken auf die andern Fälle der Induction passen.

Man sieht dies ganz deutlich für die elektrodynamische Induction, also für die, welche infolge der Verschiebung eines Systems von constanten Strömen, welches die Stelle des magnetischen Systems vertritt, entsteht, da wir die absolute Gleichwertigkeit der durch Ströme und durch Magnete hervorgerufenen magnetischen Felder nachgewiesen haben.

In dem Falle der durch Intensitätsänderung eines Magnets oder eines benachbarten Stromes inducirten Ströme kann das Resultat als mit dem

gleichbedeutend betrachtet werden, welches man erhalten würde, wenn man aus dem Unendlichen einen der betrachteten Aenderung äquivalenten Strom oder Magnet in die wirklich vorhandene Lage überführte und denselben zum ursprünglichen hinzufügte.

Was die durch Formänderungen des Stromkreises selbst oder durch Intensitätsänderungen des Hauptstromes hervorgerufenen Extraströme betrifft, so zeigt der Versuch, dass dieselben gleichfalls und in derselben Weise mit den entsprechenden Aenderungen der magnetischen Kraftströmung verknüpft sind.

Man kann demnach als allgemeine Regel betrachten, dass jede Aenderung der Kraftströmung in einem Kreise, woher sie auch rühren mag, einer Aenderung der potentiellen Energie entspricht und eine elektromotorische Inductionskraft erzeugt, wie wenn dieselbe durch die Verschiebung eines äusseren magnetischen Systems hervorgerufen würde.

Diese Folgerung erscheint als besonders notwendig, wenn man von der Anschauung der Fernwirkungen abgeht und die Uebertragung der elektrischen und magnetischen Kräfte als von einer Aenderung der elastischen Eigenschaften eines Zwischenmediums herrührend betrachtet; man begreift dann, dass die einzige nächste Veranlassung für die in einem Leiter inducirten Ströme der Zustand des Mittels sein kann, in welches derselbe taucht, welches auch der Ursprung der in diesem Mittel wirkenden Kräfte sein mag. Man kann demnach das allgemeine Gesetz der Inductionserscheinungen in folgender Weise formuliren:

Die gesammte in einem Kreise in einem gegebenen Augenblicke entwickelte elektromotorische Kraft ist gleich der Ableitung der den Kreis durchsetzenden magnetischen Kraftströmung nach der Zeit.

Oder auch:

Die gesammte in einem Kreise inducirte Elektricitätsmenge ist gleich dem Produkte des reciproken Wertes seines Widerstandes in die gesammte Aenderung der Kraftströmung, die denselben durchsetzt.

Die Kraftströmung, die in einem gegebenen Augenblicke durch den Kreis geht, setzt sich aus der Strömung Q, die von äusseren Körpern, Magneten oder Strömen, herrührt, und der Strömung zusammen, die von dem den Kreis selbst durchfliessenden Strom herrührt. Ist L der Wert dieser letzteren Strömung, wenn die Intensität des Stromes der Einheit gleich ist, so ist derselbe gleich LI für eine Intensität I, und die allgemeine Gleichung für die Induction ist, wenn man mit E die gewöhnlichen in dem Kreise wirkenden elektromotorischen Kräfte bezeichnet,

$$(10) \qquad (E - RI)dt = d(Q + LI),$$

oder

$$E - \frac{d(Q + LI)}{dt} = RI.$$

519. Inductionscoefficienten. — Ist das inducirende System ein magnetisches Blatt oder ein Strom, so ist die Strömung Q gleich dem Produkt einer Constante M in die magnetische Stärke des Blattes oder die Intensität des Stromes. Diese Constante ist eine Funktion allein der Form und der gegenseitigen Lage der beiden Kreise; wir wissen, dass dieselbe für die eine Grenzlinie so gross ist wie für die andere (**341**), und dass ihr Wert bestimmt ist (**353**) durch das Integral

$$M = -\int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds'. \tag{11}$$

Man nennt diesen Faktor M den *Coefficienten der gegenseitigen Induction* oder *der wechselseitigen Induction* der beiden Kreise.

Die Constante L ist ein Integral von derselben Form, aber mit dem Unterschiede, dass die beiden Elemente ds und ds' demselben Kreise angehören. Man nennt denselben den *Coefficienten der Induction auf sich selbst* oder *der Selbst-Induction.*

Der Wert des Coefficienten der Selbst-Induction L ist die Grenze, der sich derjenige von M nähert, wenn zwei gleiche Kreise, die von gleichgerichteten Strömen von derselben Intensität I durchflossen werden, sich dem Zusammenfallen nähern. Denn die gesammte Strömung, die in diesem Augenblicke das System der beiden Kreise durchsetzt, ist gleich der Summe der von jedem einzelnen erzeugten Strömungen, also gleich $2LI$; man kann dieselbe auch als die Summe $2MI$ zweier einander gleicher Strömungen auffassen, von denen jede von einem der Kreise ausgeht und den andern von der negativen Seite aus durchsetzt.

520. Elektromagnetische Induction. — Die allgemeine Formel (10) liefert, wenn sie auf den Fall angewandt wird, wo das inducirende System ein Blatt von der Stärke Φ ist,

$$(E - RI)dt = d(M\Phi + LI). \tag{12}$$

Nehmen wir an, dass, während die magnetische Stärke Φ constant ist, das Blatt aus dem Unendlichen in eine bestimmte Lage in Gegenwart des festen inducirten Kreises übergeführt wird, so erhält man

$$(E - RI)dt = \Phi dM + LdI.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit I und integrirt man von $t = 0$ bis zur Zeit t, wo das Blatt seine definitive Lage annimmt, so erhält man

$$\int_0^t (EI - RI^2)dt = \Phi \int_0^t I \frac{dM}{dt} dt + \left(L \frac{I^2}{2}\right)_0^t. \tag{13}$$

Die linke Seite dieser Gleichung giebt den Ueberschuss der während der Zeit t von der Kette gelieferten chemischen Energie über die Energie

an, welche während derselben Zeit in dem Kreise in der Form von Wärmeenergie erscheint.

Das erste Glied der rechten Seite ist die gesammte Arbeit der elektromagnetischen Kräfte; diese Arbeit hängt von dem Gesetze der Bewegung ab. Man kann zum Beispiel annehmen, dass das Blatt sehr langsam genähert worden ist, so dass die Induction sehr schwach ist, und dass der Hauptstrom sich stets sehr wenig von seinem Anfangswerte I_0 unterscheidet; in diesem Falle wäre, wenn man mit M die der Endlage des Blattes entsprechende Kraftströmung bezeichnet, die elektrodynamische Arbeit gleich $\Phi M I_0$.

Das zweite Glied der rechten Seite stellt die Aenderung der *potentiellen Energie* des Stromes dar; dasselbe ist Null, wenn die beiden Grenzwerte des Stromes dieselben sind, wenn also das magnetische Blatt nachdem es die Endstellung erreicht hat, in Ruhe verharrt.

521. — Ist das magnetische Blatt zwar unbeweglich, besitzt dasselbe aber eine veränderliche Stärke, so würde man vollkommen analoge Gleichungen erhalten,

$$(E - RI)dt = Md\Phi + LdI,$$

$$\int_0^t (EI - RI^2)dt = M\int_0^t I\frac{d\Phi}{dt}dt + \left(L\frac{I^2}{2}\right)_0^t,$$

die zu denselben Folgerungen führen würden.

522. — Der allgemeinste Fall ist der, wo die drei Funktionen M, Φ und L sich gleichzeitig ändern, wo also das magnetische Blatt sich an Stärke, Form und relativer Lage ändert, und wo der Kreis selbst deformirt wird. Die Gleichung (12) liefert dann für die elektromotorische Inductionskraft

$$(14) \qquad e = \frac{d(M\Phi + LI)}{dt} = M\frac{d\Phi}{dt} + \Phi\frac{dM}{dt} + L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}.$$

Enthält der Kreis keine von der Induction unabhängige elektromotorische Kraft, so braucht man nur in den vorigen Gleichungen $E = 0$ zu setzen.

523. Elektrodynamische Induction. — Wäre das inducirende System ein constanter Strom, so könnte man denselben durch das äquivalente Blatt ersetzen und so zu dem eben behandelten Falle gelangen; aber es muss berücksichtigt werden, dass infolge der Gegenwirkungen der inducirende Kreis selbst ebenfalls der Induction ausgesetzt ist, und dass seine Stromintensität nicht constant bleiben kann. Wenn man mit R' und L' den Widerstand und den Coefficienten der Selbstinduction des inducirenden Kreises und mit E' die elektromotorische Kraft bezeichnet, die derselbe enthält, dann ist die Stromintensität in den beiden Kreisen in jedem Augenblicke durch die beiden simultanen Differentialgleichungen bestimmt

$$(15) \qquad \begin{aligned} (E - RI)\,dt &= d(MI' + LI), \\ (E' - R'I')\,dt &= d(MI + L'I'). \end{aligned}$$

Die vollständige Lösung dieser Gleichungen bietet im Allgemeinen grosse Schwierigkeiten, und wir werden im folgenden Capitel die einfachsten Fälle untersuchen, in denen dieselbe erhalten werden kann; aber schon die Differentialgleichungen ermöglichen es, einige wichtige Bemerkungen zu machen.

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man die erste mit I, die zweite mit I' multiplicirt hat, so erhält man

$$(16)\quad (EI + E'I' - RI^2 - R'I'^2)\,dt = Id(MI' + LI) + I'd(MI + L'I').$$

Die linke Seite stellt den Ueberschuss der von den Quellen in den beiden Kreisen gelieferten Energie über die in den Leitern verbrauchte Energie dar.

Die rechte Seite kann in folgender Weise geschrieben werden:

$$(17)\qquad \frac{1}{2}d(LI^2 + 2MII' + L'I'^2) + \frac{1}{2}I^2dL + II'dM + \frac{1}{2}I'^2dL';$$

dieselbe giebt die gesammte Aenderung der potentiellen Energie der beiden Kreise und die äussere Arbeit an.

524. Innere Energie des Stromes. — Sind die Kreise fest an Form und Lage, so sind die Faktoren L, M und L' Constanten; der nicht in Wärme umgewandelte Teil der Energie wird dann ausgedrückt durch

$$d\left[\frac{LI^2}{2} + MII' + \frac{L'I'^2}{2}\right].$$

Das Glied MII' ist die relative Energie der beiden Ströme: es ist dies die Arbeit, die man hätte aufwenden müssen, um die von den Strömen I und I' bez. durchflossenen Kreise aus dem Unendlichen in ihre wirkliche Lage überzuführen. Jedes der beiden andern in der Klammer enthaltenen Glieder kann die *innere Energie* des entsprechenden Stromes genannt werden; dasselbe ist gleich der Hälfte des Produktes der Selbstinduction in das Quadrat der Intensität und giebt die Arbeit an, welche die Schaffung des vorhandenen Stromes in jedem Kreise kosten würde, wenn letzterer jedem fremden Einflusse entzogen wäre, oder die äussere Arbeit, die dieser Strom leisten könnte, wenn er sich selbst überlassen wäre und unter denselben Bedingungen verbraucht würde.

Wir bemerken noch, dass man auch setzen kann

$$\frac{LI^2}{2} + MII' + \frac{L'I'^2}{2} = \frac{1}{2}(LI + MI')I + \frac{1}{2}(L'I' + MI)I'.$$

Jedes Glied auf der rechten Seite stellt die potentielle Energie des entsprechenden Kreises dar: es ist dies die Arbeit, die man für jeden einzelnen Kreis aufwenden muss, wenn man das Feld von Null auf seinen wirklichen Zustand bringt, und folglich die Arbeit, die derselbe leisten würde, wenn man alle Ströme gleichzeitig verschwinden liesse. Diese Energie ist für

jeden einzelnen Kreis gleich der Hälfte des Produktes der Intensität in die magnetische Kraftströmung, welche denselben durchsetzt.

Der hier betrachtete Teil der Energie erscheint unter einer Form, in der derselbe bei dem augenblicklichen Stande der Wissenschaft nicht genau bestimmbar ist. Man kann beispielsweise nicht sagen, ob derselbe in einem Zustande gewöhnlicher potentieller Energie besteht, wie dies die Spannung eines elastischen Körpers ist, oder einer actuellen Energie, wie sie die Bewegung einer besonderen Flüssigkeit ausmacht, oder auch in beiden zugleich; noch, ob dieselbe in dem von dem Strome durchflossenen Kreise localisirt ist, oder den Anschauungen von Faraday und Maxwell entsprechend in dem gesammten Medium verbreitet ist.

525. — In dem Falle, wo die Faktoren L, M und L' veränderlich sind, stellt das erste Glied des Ausdruckes (17) stets die Aenderung der potentiellen Energie der beiden Kreise dar; die Summe der anderen Glieder

$$\frac{1}{2} I^2 dL + II'dM + \frac{1}{2} I'^2 dL'$$

giebt die durch die elektrodynamischen Wirkungen der Leiter vermöge ihrer Aenderungen an Form und relativer Lage geleistete Arbeit an.

Nehmen wir an, dass die beiden Kreise eine unveränderliche Form besitzen, und dass man dieselben so verschiebt, dass die beiden Intensitäten I und I' constante Werte behalten, die natürlich von den Anfangs- oder Endwerten verschieden sind, so reduciren sich, da der Coefficient M allein veränderlich ist, das Glied für die potentielle Energie und das für die äussere Arbeit, beide auf denselben Wert $II'dM$. Man erhält in jedem Augenblicke

$$(EI + E'I' - RI^2 - R'I'^2)dt = 2II'dM.$$

Man sieht, dass der Ueberschuss der von den Ketten gelieferten chemischen Energie über die in Wärme umgesetzte gleich der doppelten zur Ausführung der Verschiebung gebrauchten äusseren Arbeit ist: eine Hälfte dieser Energie wird zur Erzeugung der äusseren Arbeit, die andere zur Vergrösserung der potentiellen Energie des Systems verwandt.

Man vergleiche diese von Sir W. Thomson herrührende Bemerkung mit dem analogen, auf die Verschiebung von Leitern mit constantem Potential bezüglichen Satze (**97**).

5. Capitel.

Specielle Fälle der Induction.

526. Der elektromagnetische Widerstand ist einer Geschwindigkeit äquivalent. — Wir betrachten den Fall (Fig. 114, S. 440) eines Stabes CC', der parallel mit sich selbst auf zwei parallelen Schienen AA', BB' gleitet, die von einander den Abstand b haben, in einer zum magnetischen Meridian senkrechten Ebene liegen und an ihren Enden A und B durch einen metallischen Leiter verbunden sind. Wir nehmen an, dass die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus von vorn nach hinten gerichtet ist. Verschiebt man die Brücke CC' so, dass sie sich von AB parallel mit sich selbst entfernt, so bewegt man sie in derselben Richtung, in der sie die Wirkung der Erdkraft fortstossen würde, wenn der Kreis von einem Strome durchflossen wäre, der von A durch die Brücke nach B geht. Diese Bewegung ruft einen Inductionsstrom hervor, der den Kreis in entgegengesetzter Richtung durchläuft, der also von B durch die Brücke nach A geht.

Lässt man den Widerstand der Schienen gegen den des äusseren Leiters, der die Punkte A und B verbindet, ausser Acht, und nennt man den so als unveränderlich vorausgesetzten Widerstand des Kreises R, x_1 und x_2 die Werte des Abstandes AC in zwei einander folgenden Lagen der Brücke und H die Horizontalcomponente des magnetischen Feldes der Erde, so ist die entsprechende Menge M der inducirten Elektricität gegeben durch die Gleichung

$$RM = Q_1 - Q_2 = bH(x_1 - x_2).$$

Da das Produkt $b\ (x_1 - x_2)$ die von der Brücke beschriebene Fläche S darstellt, so folgt

$$R = \frac{SH}{M}.$$

In diesem Ausdrucke ist der Faktor H die Intensität eines magnetischen Feldes, also eine Kraft, die auf die Masseneinheit wirkt; man kann demnach, wenn man mit r und l zwei Längen und mit m eine magnetische Masse bezeichnet, setzen

$$SH = \frac{m}{r^2} l^2.$$

Andererseits ist die elektrische Masse M das Produkt einer Stromintensität oder der magnetischen Stärke eines Blattes in eine Zeit, und man kann auch setzen

$$M = It = \Phi t = h\sigma t = h\frac{m'}{l'^2}t,$$

wenn m' eine magnetische Masse von passender Grösse und h und l' Längen bezeichnen. Man erhält demnach

$$R = \frac{m}{m'}\frac{l^2}{r^2}\frac{l'}{h}\frac{l'}{t}.$$

Da die drei ersten Brüche abstrakte Zahlen sind, so sieht man, dass der in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückte Widerstand gleich dem Quotienten einer Länge durch eine Zeit ist, also eine Grösse derselben Art wie eine Geschwindigkeit.

Man findet leicht im Versuch selbst die physikalische Darstellung dieser Geschwindigkeit. Denn nehmen wir an, dass man den transversalen Stab in gleichförmiger Bewegung mit einer Geschwindigkeit u bewegt, und dass die Intensität I des entstandenen Stromes durch die Wirkung gemessen wird, die er auf eine im Mittelpunkte einer Tangentenbussole befindlichen Nadel ausübt (**504**), so erhält man

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{L}{a^2}\frac{I}{H}.$$

Andererseits sollte aber $MR = HS$ sein, oder

$$RIt = Hbut;$$

es folgt also

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{L}{a^2}\frac{bu}{R}.$$

Ist die Geschwindigkeit u so gross, dass die Wirkung des Stromes gleich der der Erde ist, dass also die Ablenkung der Nadel in der Bussole 45° beträgt, so erhält man

$$R = \frac{Lb}{a^2}u,$$

und wenn man $a^2 = Lb$ macht, bleibt $R = u$.

Demnach ist der Widerstand des betrachteten Kreises gleich der Geschwindigkeit, mit der man unter den angegebenen Bedingungen die Brücke in gleichförmiger Bewegung fortbewegen müsste, wenn die Wirkung des inducirten Stromes auf eine Bussole von passenden Dimensionen eine Ablenkung von 45° hervorrufen soll.

527. — Der folgende von Faraday angegebene Versuch kann als ein weiteres Beispiel für dieselbe Aufgabe betrachtet werden.

Nehmen wir an, dass zwei Elektroden A und B an den gegenüberliegenden Rändern eines Baches, eines Kanals oder einer Meeresströmung in Wasser tauchen und mit einander durch einen metallischen Leiter verbunden sind, ist u die Geschwindigkeit des Wasserstromes und a der Abstand der Elektroden, so entsteht zwischen denselben unter dem Einflusse des Erdmagnetismus eine elektromotorische Kraft gleich uZa, die in einem Kreise vom Widerstande R einen elektrischen Strom von der Intensität $\frac{uaZ}{R}$ liefern würde. Der Versuch ist nicht unausführbar; aber wenn man nicht gerade mit sehr grossen Werten von u und a arbeiten kann, würde die Polarisation der Elektroden zweifellos die Bestätigung dieser Folgerung sehr erschweren.

528. Geschlossener Kreis in einem gleichförmigen Felde. — Wir fassen einen geschlossenen Kreis ins Auge, den wir als eben (**487**) voraussetzen können, S sei seine Fläche. Wir nehmen an, dass derselbe sich in einem gleichförmigen Felde von der Intensität F, beispielsweise dem von der Erde erzeugten, befindet, und dass er gegen die Richtung des Feldes senkrecht ist. Dreht man ihn um einen Winkel α, so ist die Aenderung der magnetischen Kraftströmung gleich $FS(1-\cos\alpha)$ und die in dem Kreise in Bewegung gesetzte Elektricitätsmenge unter der Voraussetzung eines Widerstandes R gegeben durch die Beziehung

$$M=\frac{FS(1-\cos\alpha)}{R}.$$

Hat sich der Stromkreis um 180° gedreht, so dass also seine Seiten vertauscht sind, so erhält man

$$M=\frac{2FS}{R}.$$

Diese Elektricitätsmenge wird dem absoluten Werte nach (**506**) durch den Impuls gemessen, den dieselbe der Nadel eines Galvanometers giebt, was die Bestimmung der Intensität des magnetischen Feldes ermöglichen würde.

Die Richtung des Stromes ist nach dem Lenz'schen Gesetze eine solche, dass der Kreis, in seiner ursprünglichen Lage von diesem Strome durchflossen, sich im labilen Gleichgewichte befinden würde.

529. Bestimmung der Inclination durch inducirte Ströme. — Wir haben gesehen (**487**), dass die Tangente der magnetischen Inclination gleich ist dem Verhältnisse der Arbeiten, welche man für eine und dieselbe Stromintensität bei einer Drehung des Kreises von einer zum magnetischen Meridian senkrechten Lage aus um 180°: 1. um eine horizontale zum Meridiane senkrechte Achse, 2. um eine verticale Achse zu leisten hat. Dieses Verhältnis ist das der elektromotorischen Inductionskräfte für dieselben Verschiebungen und folglich das der entsprechenden Mengen inducirter Elektricität (**506**); die Messung dieses Verhältnisses der durch die bezüglichen Drehungen inducirten Electricitätsmengen liefert demnach die Inclination.

530. Faraday'sche Scheibe. — Eine in einem gleichförmigen Felde um eine zur Richtung des Feldes parallele Achse bewegliche Metallscheibe ist Teil eines Kreises, der aus einem Leiter gebildet ist, der einerseits mit der Drehachse, andererseits mit einer federnden Platte in Verbindung steht, die sich gegen einen Punkt des Umfanges anlegt. Versetzt man die Scheibe in gleichförmige Rotation, so entsteht im Kreise ebenfalls ein gleichförmiger Strom. Man sieht, dass die Anordnung dieses Versuches gewissermaassen die Umkehrung des Barlow'schen (**483**) ist. Geht bei verticaler Lage der Scheibe die Kraft des Feldes F durch dieselbe von vorn nach hinten, und ist die Richtung der Drehung, von vorn gesehen, diejenige der Uhrzeiger, so fliesst der inducirte Strom vom Mittelpunkte nach der Peripherie.

Wir bezeichnen mit a den Radius der Scheibe und mit ω die Winkelgeschwindigkeit, dann ist die elektromotorische Kraft ihrer Drehung

$$e = \frac{dQ}{dt} = \frac{\omega a^2}{2} F.$$

Dasselbe Resultat, allerdings mit einer weniger einfachen Berechnung, erhält man, wenn man die Scheibe zwischen den Polen eines Hufeisenmagnets oder zwischen den Armaturen zweier Elektromagnete rotiren lässt. Mit dieser letzteren Anordnung hat Le Roux so kräftige Ströme erhalten, dass starke Funken zwischen der Scheibe und der Feder übersprangen.

Uebrigens würde in allen Versuchen, in denen die Bewegung eines Leiters durch elektromagnetische oder elektrodynamische Wirkungen hervorgerufen wird, insbesondere in den in Capitel III untersuchten, ein dem betreffenden Strom entgegengerichteter Inductionsstrom entstehen, wenn die Bewegung durch eine fremde Ursache unterhalten wird.

531. Erdströme. — Wir betrachten als Beispiel eine gleichförmig magnetisirte Kugel. Nehmen wir an, dass ein leitender Bogen, der mit dem einen Ende an dem Pole, mit dem anderen am Aequator anliegt, sich, während die Kugel ruht, um die Achse in gleichförmiger Bewegung dreht, so durchschneidet dieser Bogen dieselbe Kraftströmung, wie wenn er an der Oberfläche längs eines Meridianes läge. Ein Element ds, dessen Geschwindigkeit v ist, durchschneidet in jeder Zeiteinheit eine Kraftströmung gleich $Zvds$, wenn Z die Normalcomponente der magnetischen Kraft auf dem entsprechenden Parallel ist. Nennt man V die Geschwindigkeit am Aequator, F_p die magnetische Kraft am Pole, a den Radius der Kugel und λ die Breite des Elementes ds, so erhält man

$$v = V\cos\lambda, \quad Z = F_p \sin\lambda, \quad ds = a d\lambda.$$

Die in jeder Zeiteinheit von dem ganzen Bogen durchschnittene Kraftströmung ist gleich der elektromotorischen Inductionskraft e, woraus sich ergiebt

$$e = \int_0^{\frac{\pi}{2}} V F_p a \sin\lambda \cos\lambda d\lambda = \frac{1}{2} F_p Va.$$

Ist der Bogen isolirt, so stellt dieser Wert e die Potentialdifferenz dar, die sich zwischen den beiden Enden des Bogens herstellt. Wären die beiden Enden mit zwei Körpern von der gleichen Capacität C verbunden, so würden diese Körper nach längerer oder kürzerer Zeit entgegengesetzt gleiche statische Ladungen erhalten, deren absoluter Wert je $\frac{1}{2}Ce$ betrüge.

Wenn endlich der Bogen durch einen innerhalb oder ausserhalb der Kugel liegenden unbewegten Leiter geschlossen ist, dann wird der Kreis von einem dauernden Strome durchflossen, der vom Aequator nach dem Pole oder umgekehrt gerichtet ist, je nach dem Sinne der Drehung.

Da die Erde mit einer gleichförmig magnetisirten Kugel verglichen werden kann, so sieht man, dass ein äusserer Bogen, der nicht an der Rotationsbewegung derselben teilnimmt, von einem Inductionsstrome durchflossen werden muss, der vom Aequator nach dem Pole gerichtet ist, da die Richtung und die Grösse der inducirten Ströme nur von der Bewegung des Bogens und des magnetischen Systems gegen einander abhängt. Wahrscheinlich spielt diese Induction in gewissen Naturerscheinungen, wie in dem Nordlichte, welches in elektrischen Entladungen in den höheren Luftschichten zu bestehen scheint, wie in den an der Erdoberfläche in den Telegraphenleitungen beobachteten Strömen und in den Störungen der magnetischen Elemente, eine wichtige Rolle.

532. Variabler Zustand des Stromes. — Die Herstellung eines Stromes in einem Kreise entspricht einer gewissen Arbeit, welche die potentielle Energie des Stromes ausmacht; diese Energie wird bei der Entstehung des Stromes wahrscheinlich durch das denselben umgebende Mittel (**524**) verbraucht und beim Verschwinden der elektromotorischen Kräfte wiederhergestellt. In allen Fällen bestimmen die Wirkungen der Selbstinduction, die daraus folgen, das Gesetz der Intensität während der veränderlichen Periode, sowohl im Augenblicke der Schliessung als im Augenblicke der Unterbrechung des Stromkreises.

Wir fassen einen einzigen Kreis ins Auge. Ist R der Gesammtwiderstand, L der Coefficient der Selbstinduction und E die elektromotorische Kraft, die der Stromkreis enthält, so besteht die Gleichung

$$E = \frac{d(LI)}{dt} + RI. \tag{1}$$

Nimmt man L ebenso wie E als constant an, so ist demnach die Intensität in jedem Augenblicke gegeben durch die Formel

$$I = I_1 + (I_0 - I_1)e^{-\frac{Rt}{L}}, \tag{2}$$

wo I_0 der Anfangswert und I_1 der dem dauernden Zustande entsprechende Endwert von I ist.

Die gesammte Elektricitätsmenge, die in der Zeit t hindurchgeht, ist

$$\int_0^t I dt = I_1 t + (I_0 - I_1)\frac{L}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

Ist die Zeit t genügend gross, so bleibt einfach

$$(3) \qquad \int_0^t I dt = I_1 t + (I_0 - I_1)\frac{R}{L}.$$

Genau so erhält man für eine genügend lange Zeit

$$(4) \qquad \int_0^t I^2 dt = I_1^2 t + (I_0 - I_1)\left(\frac{I_0 + 3I_1}{2}\right)\frac{L}{R};$$

dieser Ausdruck ist der in dem Kreise verbrauchten Wärmeenergie proportional.

Man bemerkt, dass die Werte dieser beiden Integrale dieselben sind, wie wenn man in dem Kreise einen Strom von der Intensität $\frac{I_0 + I_1}{2}$ während der Zeit $\frac{2L}{R}$ hätte, dem ein Strom von der Normalintensität I_1 während der übrigen Zeit $t - \frac{2L}{R}$ gefolgt wäre.

Nehmen wir an, dass man die Zeit von dem Stromschlusse an zählt, so erhält man

$$I_0 = 0, \; I_1 = \frac{E}{R},$$

und folglich

$$(5) \qquad I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

533. — Der Ausdruck $\frac{E}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}$ stellt die Intensität des Extrastromes zur Zeit t dar. Man sieht, dass streng genommen der Strom seine Normalintensität erst nach unendlich langer Zeit erreichen wird; wenn aber das Verhältnis $\frac{R}{L}$ sehr gross ist, was in den meisten Fällen zutrifft, dann nähert sich die Exponentialfunktion schnell der Null, und nach einer sehr kurzen Zeit unterscheidet sich die wirkliche Intensität von der endgiltigen nur noch um eine Grösse, die vernachlässigt werden kann. Um zu berechnen, nach welcher Zeit dieser Unterschied unterhalb einer gegebenen Grösse, beispielsweise unterhalb $\frac{1}{n}$, liegt, braucht man nur zu setzen

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{1}{n},$$

woraus sich ergiebt

$$t = \frac{L}{R} \cdot l_n n.$$

Die gesammte Elektricitätsmenge, die dem Extrastrom entspricht, ist

$$(6) \qquad \frac{E}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{Rt}{L}} dt = \frac{EL}{R^2};$$

dieselbe ist so gross, wie wenn der Strom während der Zeit $\frac{2L}{R}$ eine Intensität besässe, die halb so gross ist als der Normalwert $\frac{E}{R}$.

534. Extrastrom bei der Oeffnung. — Wir führen, nachdem der dauernde Zustand eingetreten ist, plötzlich einen Widerstand r in den Kreis ein, dann ist in diesem Augenblick

$$I_0 = \frac{E}{R},$$

und nach unendlich langer Zeit

$$I_1 = \frac{E}{R + r},$$

und die Intensität ist in jedem Augenblicke gegeben durch die Gleichung

$$(7) \qquad I = \frac{E}{R + r}\left(1 + \frac{r}{R} e^{-\frac{R + r}{L} t}\right).$$

Die gesammte Elektricitätsmenge, die dem durch Einführung des neuen Widerstandes bedingten Extrastrom entspricht, hat den Wert

$$(8) \qquad \frac{Er}{(R + r)R} \int_0^\infty e^{-\frac{R + r}{L}} dt = \frac{EL}{(R + r)^2} \frac{r}{R}.$$

Dieser Fall bietet eine gewisse Analogie mit dem, in welchem man den Kreis in der Luft unterbricht, wo der Widerstand r der der Luftschicht ist, durch welche der Unterbrechungsfunke hindurchgeht; aber in Wirklichkeit bleibt dieser Widerstand keineswegs constant während der Dauer der Erscheinung.

Nehmen wir an, dass der Kreis nicht unterbrochen, sondern von der Kette getrennt wird, während man diese durch einen Draht von demselben Widerstand ersetzt, so dass der Gesammtwiderstand auch dann noch durch R gegeben ist, was also einfach auf die Unterdrückung der elektromotorischen Kraft zurückkommt, so reducirt sich die Gleichung (1) auf

$$(9) \qquad L \frac{dI}{dt} + RI = 0.$$

Bestimmt man die Constante durch die Bedingung, dass für $t=0$ $I=\frac{E}{R}$ ist, so erhält man

(10) $$I=\frac{E}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

In diesem Falle ist das Gesetz des Unterbrechungsstromes dasselbe wie das des Schliessungsstromes (533), und die im Ganzen in Bewegung gesetzten Elektricitätsmengen sind gleich.

535. Veränderliche elektromotorische Kraft. — Wir nehmen an, dass die elektromotorische Kraft nicht wie in den gewöhnlichen Ketten constant ist, sondern dass sie periodische Schwankungen zeigt und dargestellt wird durch einen Ausdruck von der Form

(11) $$E=E_0 \sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

Sobald der endgiltige Zustand hergestellt ist, folgt die Stromintensität augenscheinlich derselben Periode, und man kann dieselbe wiedergeben durch einen Ausdruck

(12) $$I=A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\varphi\right).$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (1) ein, und bestimmt man die Constanten A und φ durch die Bedingung, dass dieselbe für jede Zeit befriedigt wird, so findet man

(13) $$A^2=\frac{E_0^{\,2}}{R^2+\frac{4\pi^2L^2}{T^2}},$$

und

(14) $$\mathrm{tg}\, 2\pi\varphi=\frac{2\pi}{T}\frac{L}{R}.$$

Man sieht hiernach, dass der Coefficient der Selbstinduction hier die Wirkung hat, den scheinbaren Widerstand des Kreises zu vergrössern. Die Stromintensität ist immer dann Null, wenn $t-\varphi T=n\frac{T}{2}$ ist, wo n eine ganze Zahl ist. Die Grösse φT drückt die Zeit aus, die zwischen dem Augenblicke, wo die elektromotorische Kraft Null ist, und dem Augenblicke verfliesst, wo der Strom selbst durch Null geht. Es ist dies eine Art *Verzögerung* bei der Uebertragung der elektromotorischen Kraft, die allein von den Inductionswirkungen herrührt.

Welches auch die Werte von L, R und T sein mögen, der grösste Wert von $2\pi\varphi$ ist $\frac{\pi}{2}$, die Phasendifferenz also gleich $\frac{1}{4}$. Die grösste Verzögerung des inducirten Stromes ist demnach gleich ein Viertel der ganzen Periode oder der Hälfte der Halbperiode.

Die Elektricitätsmenge, die während einer Halbperiode durch den Kreis geht, ist

$$(15)\qquad Q = A\int_0^{\frac{T}{2}} \sin 2\pi\frac{t}{T}dt = \frac{AT}{\pi},$$

und die entsprechende Wärmearbeit

$$(16)\qquad W = RA^2\int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 2\pi\frac{t}{T}dt = \frac{RA^2T}{4}.$$

Man findet hieraus für die mittlere Stromintensität I', abgesehen vom Zeichen,

$$(17)\qquad I' = \frac{2A}{\pi}$$

und für die mittlere Stromintensität I'' des Stromes, der dieselbe Wärmemenge liefert,

$$(18)\qquad I'' = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

536. Entladungsstrom. — Oscillirende Entladungen. — Wir betrachten schliesslich nach Kirchhoff und Sir W. Thomson die Erscheinungen, welche die Entladung eines Leiters begleiten. C sei die Capacität des elektrisirten Körpers in elektromagnetischen Maassen, Q_0 seine Ladung; man setzt denselben mit der Erde in Verbindung durch einen Draht vom Widerstand R, dessen Coefficient der Selbstinduction L ist. In einem gegebenen Zeitpunkte t ist die Ladung des Leiters Q und das Potential desselben $\frac{Q}{C}$, woraus sich die Gleichung ergiebt

$$\frac{Q}{C} = L\frac{dI}{dt} + RI.$$

Berücksichtigt man, dass $I = -\frac{dQ}{dt}$, so kann man dieselbe schreiben in der Form

$$(19)\qquad \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{CL}Q = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$(20)\qquad Q = Ae^{\rho t} + A'e^{\rho' t},$$

wo ρ und ρ' die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(21)\qquad \rho^2 + \frac{R}{L}\rho + \frac{1}{CL} = 0$$

sind, welche Gleichung ergiebt

$$\rho = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}.$$

Je nachdem $L \lesseqgtr \frac{R^2 C}{4}$ ist, sind diese Wurzeln reell oder imaginär.

Die Constanten A und A' sind durch die Bedingungen bestimmt, dass für $t = 0$ $Q = Q_0$ und $I = 0$ ist, was $Q_0 = A + A'$ und $0 = A\rho + A'\rho'$ liefert.

Sind die Wurzeln der Gleichung (21) reell, so erhält man, indem man noch $\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$ mit α bezeichnet,

(22)
$$Q = Q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{4\alpha L}\right) e^{\alpha t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{R}{4\alpha L}\right) e^{-\alpha t} \right],$$
$$I = \frac{Q_0}{2\alpha LC} e^{-\frac{Rt}{2L}} \left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right).$$

Sind die Wurzeln imaginär, so kann man dennoch das Integral (20) in derselben Form bilden und die Constanten durch ihre imaginären Werte ersetzen. Behält man dann nur die reellen Glieder bei und setzt $\alpha' = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$, so erhält man

(23)
$$Q = Q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}} \left[\cos \alpha' t + \frac{R}{2\alpha' L} \sin \alpha' t\right],$$
$$I = \frac{Q_0}{\alpha' LC} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin \alpha' t.$$

Man findet aus diesen Gleichungen in beiden Fällen

(24)
$$\int_0^\infty I dt = Q_0,$$
$$\int_0^\infty I^2 dt = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{RC}.$$

Diese Resultate waren a priori klar, da die Entladung eine vollständige ist, und da die Arbeit, welche dieselbe leistet, sich auf eine Wärmeentwicklung beschränkt. Die Wärmearbeit $\int_0^\infty RI^2 dt$ muss der elektrischen Energie (**89**) gleich sein, welche der Leiter vor der Entladung besass, also $\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$.

537. — Die Art der Entladung ist sehr verschieden, je nachdem die Lösung durch die Gleichungen (22) oder durch die Gleichungen (23) gegeben ist.

Im ersten Falle ist die Entladung *continuirlich*. Die Stromintensität ist anfangs Null, geht durch ein Maximum und nimmt dann bis zur Null ab. Das Maximum tritt zu dem durch die Bedingung $\frac{dI}{dt}=0$ oder

$$\left(\frac{R}{2L}-\alpha\right)e^{2\alpha t}=\frac{R}{2L}+\alpha$$

bestimmten Zeitpunkte ein, welche Bedingung ergiebt

$$t=\frac{1}{2\left(\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot l_n\frac{\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}}{\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}}.$$

538. — Im zweiten Falle sind die Werte von Q und L durch periodische Funktionen gegeben: der Leiter erhält abwechselnd Ladungen von entgegengesetztem Sinne, und der Draht ist der Träger *alternirender Ströme*.

Die Zeiten der Maxima und der Minima der Ladung entsprechen der Bedingung $I=0$, also

$$\sin\alpha' t=0 \quad \text{oder} \quad \alpha' t=n\pi.$$

Die Oscillationen der Entladung sind demnach regelmässig, und die ganze Periode T hat den Wert

$$T=\frac{2\pi}{\alpha'}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Die Werte der alternirenden Ladungsmaxima sind

$$\begin{aligned}
&+Q_0,\\
&-Q_0 e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}},\\
&+Q_0 e^{-\frac{2R\pi}{2L\alpha'}},\\
&-Q_0 e^{-\frac{3R\pi}{2L\alpha'}}, \quad \text{etc.},
\end{aligned}$$

dieselben nehmen wie die Glieder einer geometrischen Progression ab, deren Exponent ist $e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}}$.

Die Intensitätsmaxima des Stromes entsprechen in den beiden Richtungen der Bedingung $\frac{dI}{dt} = 0$, welche ergiebt

$$\operatorname{tg}\alpha' t = \frac{2L\alpha'}{R},$$

oder, da $\sin\alpha' t = \pm \frac{\operatorname{tg}\alpha' t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha' t}}$ ist,

$$\sin\alpha' t = \pm \alpha' \sqrt{CL};$$

dieselben sind der Zeit nach gleich weit von einander entfernt, durch eine Halbperiode $\frac{\pi}{\alpha'} = \frac{T}{2}$ von einander getrennt und von den ihnen unmittelbar vorangehenden Epochen, in denen der Strom Null ist, um die Zeit θ entfernt, die bestimmt ist durch den kleinsten Winkel $\alpha'\theta$, welcher der Bedingung genügt

$$\sin\alpha'\theta = \alpha' \sqrt{CL}.$$

Die Werte der Intensitätsmaxima sind der Reihe nach

$$I_1 = + \frac{Q_0}{\sqrt{CL}} e^{-\frac{R\theta}{2L}},$$

$$I_2 = - \frac{Q_0}{\sqrt{CL}} e^{-\frac{R}{2L}\left(\theta + \frac{\pi}{\alpha'}\right)} = - I_1 e^{-\frac{R\pi}{2\alpha' L}},$$

$$I_3 = + \frac{Q_0}{\sqrt{CL}} e^{-\frac{R}{2L}\left(\theta + \frac{2\pi}{\alpha'}\right)} = + I_1 e^{-\frac{2R\pi}{2\alpha' L}}, \quad \text{etc.};$$

dieselben nehmen ebenfalls in geometrischer Reihe ab.

Was die gesammte in Bewegung gesetzte Elektricitätsmenge betrifft, so ist dieselbe, abgesehen vom Zeichen,

$$Q_0\left(1 + 2e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}} + 2e^{-\frac{2R\pi}{2L\alpha'}} + \cdots\right) = Q_0 \frac{1 + e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}}}{1 - e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}}}. \tag{25}$$

Diese Gesammtmasse ist um so grösser, je näher die Grösse $e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}}$ der Einheit liegt, also je grösser der Faktor $\frac{2L\alpha'}{R}$ oder das Verhältnis $\frac{L}{CR^2}$ ist.

539. — Man gelangt zu dem Falle eines continuirlichen Stromes, wenn man $Q_0 = \infty$, $C = \infty$ und $\frac{Q}{C} = E$ macht. Die Wurzeln der Gleichung (21)

sind dann reell, und die Entladung ist eine continuirliche; man kommt so auch wieder auf die bereits (532) gefundene Formel

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

Wenn der Coefficient der Selbstinduction des Drahtes L sehr klein ist, befindet man sich auch stets in dem Falle reeller Wurzeln, der Coefficient α wird dann gleich $\frac{R}{2L}\left(1 - \frac{2L}{CR^2}\right)$ oder $\frac{R}{2L} - \frac{1}{CR}$, und die Gleichungen (22) gehen über in

$$(26) \qquad Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad I = \frac{Q_0}{CR} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Der Strom tritt von vornherein mit seiner grössten Stärke auf und wird dann unbegrenzt schwächer.

Es muss indessen darauf hingewiesen werden, dass die ganze eben durchgeführte Auseinandersetzung auf der unausgesprochenen Hypothese beruht, dass die Elektricität keine *Trägheit* besitzt, und dass die Intensität in jedem Augenblicke in der ganzen Ausdehnung des Drahtes dieselbe ist. Diese Hypothesen scheinen in allen Fällen dauernder Ströme oder solcher mit langsamen Schwankungen berechtigt, aber man darf dieselben nicht mehr zulassen, wenn es sich um plötzliche Entladungen handelt; die Resultate, zu denen wir gelangt sind, dürfen demnach nur als erste Annäherung betrachtet werden.

540. Fall zweier Kreise. — Wir betrachten zwei benachbarte Kreise C und C', deren relative Lage und Form unveränderlich ist, und die constante elektromotorische Kräfte enthalten; wir stellen durch E, R und L bez. die elektromotorische Kraft, den Widerstand und den Coefficienten der Selbstinduction des ersten Kreises dar, durch dieselben gestrichelten Buchstaben die analogen Grössen des zweiten und durch M den Coefficienten der gegenseitigen Induction. Da alle diese Coefficienten als constant vorausgesetzt sind, erhält man (523) die beiden simultanen Gleichungen

$$(27) \qquad \begin{aligned} M\frac{dI'}{dt} + L\frac{dI}{dt} + RI - E &= 0, \\ M\frac{dI}{dt} + L'\frac{dI'}{dt} + R'I' - E' &= 0, \end{aligned}$$

deren Lösung von der Form ist

$$(28) \qquad \begin{aligned} RI - E &= Ae^{\rho t} + Be^{\rho' t}, \\ R'I' - E' &= A'e^{\rho t} + B'e^{\rho' t}. \end{aligned}$$

Die Coefficienten A, B, A', B' sind nach den Grenzbedingungen zu bestimmende Constanten.

Drückt man die Bedingung, dass die Werte der Intensitäten zu jeder beliebigen Zeit den Differentialgleichungen (27) genügen, aus, so findet man, dass die Exponenten ρ und ρ' die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind

$$(29) \qquad \left(1 - \frac{M^2}{LL'}\right)\rho^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{R'}{L'}\right)\rho + \frac{RR'}{LL'} = 0.$$

Diese Wurzeln sind immer reell; ferner müssen dieselben negativ sein in Anbetracht dessen, dass die Intensität unter keinen Umständen unbegrenzt mit der Zeit wachsen kann. Es muss demnach $LL' > M^2$ sein, was übrigens von vornherein klar ist (**519**); es kann höchstens $LL' = M^2$ sein, wenn die beiden Kreise zusammenfallen.

Aus dieser Bedingung folgt auch, dass, wenn der Coefficient L der Selbstinduction eines Drahtes sehr klein ist, der Coefficient M der gegenseitigen Induction dieses Drahtes mit irgend einem andern ebenfalls sehr klein ist.

541. — Wir betrachten den Fall, wo $E' = 0$ ist, wo also der zweite Kreis keine elektromotorische Kraft enthält.

Will man nur die Elektricitätsmengen m und m' finden, die durch die beiden Kreise während der Zeit t gehen, so braucht man nur mittels der Gleichungen (27) die Integrale $\int I dt$ und $\int I' dt$ zu berechnen. Wenn man mit I_0 und I'_0 die Intensitäten der beiden Ströme zu Beginn der betrachteten Zeit bezeichnet, erhält man

$$(30) \qquad \begin{aligned} Rm &= Et + L(I_0 - I) + M(I'_0 - I'), \\ R'm' &= M(I_0 - I) + L'(I'_0 - I'). \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass man den Kreis C schliesst und die Erscheinung am Ende einer genügend langen Zeit ins Auge fasst, so ist im Beginne der Zeit t

$$I_0 = 0, \quad I'_0 = 0,$$

und nach einer genügend langen Zeit

$$I = \frac{E}{R}, \quad I' = 0;$$

und folglich

$$(31) \qquad \begin{aligned} m &= I\left(t - \frac{L}{R}\right) = \frac{E}{R}\left(t - \frac{L}{R}\right), \\ m' &= -\frac{M}{R'} I = -\frac{E}{R}\frac{M}{R'}. \end{aligned}$$

Oeffnet man dagegen den Kreis C, nachdem der dauernde Zustand eingetreten ist, so erhält man für die Grenzen beziehungsweise

$$I_0 = \frac{E}{R}, \quad I'_0 = 0,$$
$$I = 0, \quad I' = 0.$$

Die in den beiden Kreisen inducirten Elektricitätsmengen sind dann denen des vorigen Falles entgegengesetzt gleich, was von vornherein klar war, da die Aenderung der Kraftströmung in beiden Fällen dieselbe war.

Man bemerkt, dass der Extrastrom in C von dem Kreise C' unabhängig ist, und dass andererseits die Induction auf den Kreis C' nur von dem Widerstande R', dem Coefficienten der gegenseitigen Induction der beiden Kreise und der Intensität I des dauernden Stromes in dem Kreise C abhängt. Die direkte Betrachtung der Kraftströmungen liess auch diese Resultate voraussehen.

Um die Intensität der Ströme in jedem Augenblicke kennen zu lernen, muss man die Lösung der Aufgabe durch die Bestimmung der Constanten A, A', B, B' vervollständigen.

542. Unterbrechungsstrom. — Wir betrachten zunächst den Fall, wo man nach Herstellung des Stromes in dem Hauptkreise C die Verbindung mit der Kette unterbricht und den Kreis offen lässt; es entsteht dann ein inducirter Strom in dem secundären Kreise C', aber der Hauptstrom ist *vollkommen* unterdrückt. Die erste von den Gleichungen (27) besteht nicht mehr, und die zweite reducirt sich auf

$$L'\frac{dI'}{dt} + R'I' = 0;$$

dieselbe ist mit der Gleichung (9) identisch, und folglich ist das Gesetz des Extrastromes in beiden Fällen das nämliche.

Man kann bei der Annahme, dass die Unterbrechung des Kreises C eine augenblickliche gewesen ist, und dass der Strom nicht mit einem veränderlichen Widerstande die Unterbrechung überdauert hat, wie in dem Falle, wo ein Funke entsteht, selbst den Anfangswert des in C' hervorgerufenen Stromes berechnen.

Integriren wir die zweite von den Gleichungen (27) unter der Annahme, dass $E' = 0$ ist, von $t = 0$ bis zu einer gegen die Dauer des Inductionsstromes in C' unendlich kleinen Zeit τ, so erhält man, wenn man mit I_1 die Intensität des in dem Augenblicke τ inducirten Stromes bezeichnet, die Gleichung

$$(32) \qquad - M\frac{E}{R} + L'I'_1 + R'\int_0^\tau I'dt = 0.$$

Lässt man τ sich der Null nähern, so nähert sich auch das letzte Glied der Null, in Anbetracht dessen, dass τ einen unendlich kleinen Wert besitzt, und dass die Intensität I' des Stromes einen endlichen Wert behält; man erhält demnach an der Grenze

$$(33) \qquad I'_1 = \frac{M}{L'}\frac{E}{R}.$$

Demnach steht die anfängliche Intensität des inducirten Stromes zum inducirenden Strome in dem Verhältnisse der Coefficienten M und L'.

Für jeden andern Augenblick ist also nach der Gleichung (10)

$$I' = \frac{ME}{L'R} e^{-\frac{R't}{L'}}. \tag{34}$$

Hieraus findet man für die in Bewegung gesetzte Elektricitätsmenge

$$\int_0^\infty I' dt = \frac{ME}{L'R}\frac{L'}{R'} = \frac{E}{R}\frac{M}{R'},$$

und für die in dem Kreise verbrauchte Wärmearbeit

$$R' \int_0^\infty I'^2 dt = \frac{E^2}{R^2}\frac{M^2}{2L'} = \frac{1}{2} L' I_1^2.$$

543. Schliessungsstrom. — In dem Augenblicke, wo man den inducirenden Strom schliesst, wirken die beiden Kreise auf einander, und man muss die beiden simultanen Gleichungen (27) berücksichtigen.

Setzt man

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{RL' - R'L}{2RM}\right)^2 + \frac{R'}{R}}, \tag{35}$$

so sind die Wurzeln der Gleichung (29)

$$\rho' = \frac{-(RL' + R'L) - 2RM\alpha}{2(LL' - M^2)},$$

$$\rho = \frac{-(RL' + R'L) + 2RM\alpha}{2(LL' - M^2)}.$$

Die Coefficienten A, A', B, B' bestimmt man mittels der Gleichungen (27) und (28) durch die Bedingung, dass für $t = 0$, $I = 0$ und $I' = 0$ ist, aus welcher sich ergiebt

$$\frac{M}{R'}(A'\rho + B'\rho') + \frac{L}{R}(A\rho + B\rho') = E,$$

$$\frac{M}{R}(A\rho + B\rho') + \frac{L'}{R'}(A'\rho + B'\rho') = 0,$$

$$A + B + E = 0,$$

$$A' + B' = 0.$$

Man erhält dann

$$\begin{aligned} I &= \frac{E}{R}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{R'L - RL'}{2RM\alpha}\right)e^{\rho t} - \left(1 - \frac{R'L - RL'}{2MR\alpha}\right)e^{\rho' t}\right]\right\}, \\ I' &= -\frac{E}{2R\alpha}\left\{e^{\rho t} - e^{\rho' t}\right\}. \end{aligned} \tag{36}$$

Die Ableitung der letzten Gleichung

$$\frac{dI'}{dt} = -\frac{E}{2Ra}\left(\rho e^{\rho t} - \rho' e^{\rho' t}\right)$$

zeigt, dass in dem secundären Kreise C' der inducirte Strom, der stets negativ ist, da dem absoluten Werte nach $\rho' > \rho$ ist, von der Null ausgeht, ohne dass die Ableitung zu Anfang Null ist, durch ein Maximum geht und dann bis zur Null abnimmt.

Was den inducirenden Strom betrifft, so sieht man, dass derselbe von Null ausgehend sich progressiv seinem grössten Werte $\frac{E}{R}$, der dem dauernden Zustande entspricht, nähert.

Nimmt man die beiden Kreise C und C' als genau gleich an, so reduciren sich die Formeln auf

$$(37)\qquad \begin{aligned} I &= \frac{E}{R}\left[1 - \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{Rt}{L+M}} - e^{-\frac{Rt}{L-M}}\right)\right], \\ I' &= -\frac{E}{2R}\left[e^{-\frac{Rt}{L+M}} - e^{-\frac{Rt}{L-M}}\right]. \end{aligned}$$

Stehen ausserdem die beiden Kreise in leitender Verbindung mit einander, so unterscheiden sich die Coefficienten L und M sehr wenig von einander, und man erhält bis auf unendlich kleine Grössen

$$(38)\qquad \begin{aligned} I &= \frac{E}{R}\left[1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{Rt}{2L}}\right], \\ I' &= -\frac{E}{2R}e^{-\frac{Rt}{2L}}. \end{aligned}$$

In diesem letzteren Falle hat die Intensität des direkten, bei der Oeffnung des Kreises (**534**) inducirten Stromes den Wert

$$(39)\qquad I'_1 = \frac{E}{R}e^{-\frac{Rt}{2L}}.$$

Beide inducirte Ströme erreichen ihr Maximum für $t = 0$, und dieses Maximum ist doppelt so gross für den direkten als für den umgekehrten Strom.

544. Zwei Kreise mit einer veränderlichen elektromotorischen Kraft. — Wir nehmen an, dass

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$$

ist, und dass der zweite Kreis in sich geschlossen ist, ohne eine elektromotorische Kraft zu enthalten.

Sobald der reguläre Zustand eingetreten ist, sind die beiden Ströme noch periodisch, und man kann wie in (**535**) setzen

$$(40)\qquad \begin{aligned} I &= A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right), \\ I' &= A' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi'\right). \end{aligned}$$

Die Bedingung, dass die Differentialgleichungen (27) für jeden beliebigen Zeitpunkt durch diese Werte von E, I, I' befriedigt sein sollen, liefert, wenn man

$$r = R + \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{M^2 R'}{R'^2 + \frac{4\pi^2}{T^2} L'^2},$$

$$l = L - \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{M^2 L'}{R'^2 + \frac{4\pi^2}{T^2} L'^2}$$

setzt, die folgenden Werte für die Constanten des ersten Stromes:

$$(41)\qquad \begin{aligned} A^2 &= \frac{E_0^2}{r^2 + \frac{4\pi^2 l^2}{T^2}}, \\ \operatorname{tg} 2\pi\varphi &= \frac{2\pi}{T} \frac{l}{r}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke haben dieselbe Form wie oben (**535**). Man sieht, dass die Anwesenheit des zweiten Kreises die Wirkung hat, den scheinbaren Widerstand des ersten noch zu erhöhen und dessen scheinbaren Coefficienten der Selbstinduction zu verkleinern.

Man würde ebenso für den zweiten Kreis finden

$$(42)\qquad \begin{aligned} A'^2 &= A^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{M^2}{R'^2 + \frac{4\pi^2}{T^2} L'^2}, \\ \operatorname{tg} 2\pi\varphi' &= \frac{T}{2\pi} \frac{\frac{4\pi^2}{T^2} L'l - R'r}{L'r + R'l}. \end{aligned}$$

Die Amplitude A' ist zunächst der Periode umgekehrt proportional, so lange die Oscillationen nicht schnell sind; für eine sehr kurze Periode würde man erhalten

$$\frac{A'}{A} = \frac{M}{L'}.$$

Diese Aufgabe entspricht dem Falle einer Inductionsrolle, für welche der inducirende Strom wie ein Sinus variirt.

545. Telephon und Microphon. — Für einen in einem veränderlichen magnetischen Felde befindlichen Kreis geht die Gleichung (10) aus (**518**) über in

$$(43) \qquad \frac{dQ}{dt} + L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt} + RI - E = 0.$$

Wir nehmen jetzt an, dass der Kreis eine constante elektromotorische Kraft enthält, und dass der Coefficient Q sich in periodischer Weise ändert. Dies ist zum Beispiel der Fall bei einem Elekromagnet, vor dem man einen Magnet schwingen lässt. Man kann dann setzen

$$Q = Q_0 + Q_1 \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Das Resultat ist das nämliche, wie wenn die elektromotorische Kraft der Kette eine periodische Aenderung gleich $Q_1 \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi\frac{t}{T}$ erlitten hätte.

Sobald der endgiltige Zustand eingetreten ist, oscillirt der inducirte Strom nach derselben Periode und kann durch den Ausdruck wiedergegeben werden

$$I = I_0 + A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right).$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (43) ein, so findet man

$$\operatorname{tg} 2\pi\varphi = -\frac{2\pi L}{TR},$$

$$A^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q_1^2}{R^2 + \frac{4\pi^2 L^2}{T^2}}.$$

Ist die elektromotorische Kraft $E = 0$, so ist der übertragene Strom periodisch; dies ist der Fall des *Telephons.*

Noch kann bei Constanz aller anderen Grössen der Widerstand R sich periodisch ändern: der Strom ist auch dann periodisch, und die Amplitude der Schwankungen ist der Intensität des dauernden Stromes proportional, der bei constantem Widerstande eintreten würde, also der elektromotorischen Kraft proportional.

Ein derartiger Strom ruft in einem benachbarten Kreise periodische inducirte Ströme hervor. Dies ist bei dem *Microphon* der Fall, wo die Widerstandsänderungen durch die Schwingungen zweier sich berührender Körper, etwa zweier Kohlenstücke, entstehen; ebenso verhält es sich mit dem *Selenphotophon,* wo man die Widerstandsschwankungen benutzt, die eine periodische Beleuchtung in diesem Körper erzeugt.

Man käme zu demselben Resultat, wenn der Coefficient der Selbstinduction L veränderlich wäre, was man durch periodische Deformirung des Kreises oder auch dadurch erreichen könnte, dass man die Eisenarmatur eines Elektromagnets schwingen liesse.

546. Induction in einem offenen Kreise. — Wir haben bisher nur geschlossene Kreise in Betracht gezogen. Ist der der Induction ausgesetzte Draht nicht geschlossen, so können wir annehmen, dass die Wirkung der elektromotorischen Inductionskräfte in der Tendenz besteht, die elektrischen Massen nach dem Drahtende hin zu treiben und für einen Augenblick eine bestimmte Potentialdifferenz zwischen diesen Enden herzustellen. Nach Maxwell's Theorie der Verschiebung zeigt diese Aufgabe keine neuen Schwierigkeiten, da diese Kreise stets durch das Dielektricum geschlossen sind. Es erscheint indessen naturgemäss, die Theorie auf den Fall offener Ströme auszudehnen, insbesondere, wenn der Kreis eine grosse Anzahl von Windungen enthält, wie dies bei Spulen der Fall ist, und wenn die Bedingungen solche sind, dass der Strom in jedem Augenblicke durch die ganze Länge des Drahtes hindurch für identisch angesehen werden kann.

Wir betrachten zunächst die Induction zweier benachbarter Kreise (**540**) und nehmen an, dass die Enden des inducirten Drahtes mit den Platten eines Condensators von der Capacität C verbunden sind. Oeffnen wir den inducirenden Kreis und nennen V die Potentialdifferenz der Armaturen des Condensators zur Zeit t nach dieser Unterbrechung, so wird die Intensität I' des inducirten Stromes bestimmt durch die Gleichungen

$$(44) \qquad \begin{aligned} L'\frac{dI'}{dt} + R'I' + V &= 0, \\ I' &= C\frac{dV}{dt}. \end{aligned}$$

Wir wollen ferner voraussetzen, dass die Isolirung des Condensators keine absolute ist, und dass der Widerstand des Dielektricums nicht unendlich ist, sondern durch R_1 gegeben ist. Die letzte Gleichung muss dann ersetzt werden durch

$$I' = \frac{V}{R_1} + C\frac{dV}{dt},$$

woraus folgt

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{1}{CR_1} + \frac{R'}{L'}\right)\frac{dV}{dt} + \frac{1}{L'C}\left(\frac{R'}{R_1} + 1\right)V = 0.$$

Diese Gleichung ist dieselbe wie Gleichung (19) und hat ein Integral von der Form

$$V = Ae^{\rho t} + A'e^{\rho' t}.$$

Sind die Wurzeln der der Gleichung (21) analogen quadratischen Gleichung, welche die Coefficienten ρ und ρ' bestimmt, imaginär, wie dies meist der Fall sein wird, ausser wenn der Widerstand R_1 des Dielektricums sehr klein ist, dann wird das Potential V durch eine periodische Funktion mit abnehmender Amplitude gegeben. Der Wert der Periode ist (**538**)

$$T = \frac{2\pi}{\alpha'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL'}\left(\frac{R'}{R_1} + 1\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{CR_1} + \frac{R'}{L'}\right)^2}}.$$

Die Constanten des allgemeinen Integrals werden durch die Bedingung bestimmt, dass für $t=0$, $V=0$ und $I'=I'_1$ ist. Setzen wir $\alpha = \frac{1}{CR_1} + \frac{R'}{L'}$, so erhalten wir

$$V = \frac{I_1'}{C\alpha'} e^{-\frac{\alpha t}{2}} \sin \alpha' t.$$

Andererseits ist die anfängliche Intensität des inducirten Stromes als Funktion des inducirenden Stromes I_0 (**542**) gegeben durch eine Gleichung (33), in welche der Widerstand des Kreises nicht eingeht. Wir finden dann durch Einsetzen

$$(45) \qquad V = I_0 \frac{M}{CL'\alpha'} e^{-\frac{\alpha t}{2}} \sin \alpha' t,$$

$$V = I_0 \frac{M}{CL'} \frac{T}{2\pi} e^{-\frac{\alpha t}{2}} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Wir können dieses Resultat controliren, indem wir zu einem bestimmten Zeitpunkte für eine sehr kurze Zeit die Drahtenden mit den Klemmschrauben eines Elektrometers verbinden, welches die Potentialdifferenz misst. Der Versuch hat die vollständige Uebereinstimmung der Erscheinungen mit dieser Theorie gezeigt.

Entfernen wir den Condensator von den Enden des Drahtes, so ladet die durch die elektromotorische Inductionskraft in Bewegung gesetzte Elektricität den Draht in seiner ganzen Ausdehnung, insbesondere in der Nähe der Enden, und die Intensität des Stromes ist nicht zu jeder Zeit in der ganzen Länge des Drahtes dieselbe. Es kann dann vorkommen, dass die so an der Oberfläche des Drahtes angehäufte Elektricität durch eine Reihe von Zweigkreisen durch das umgebende Mittel hindurch entweicht. Diese beiden Umstände compliciren die Aufgabe, und die eben angegebenen Gleichungen geben keine genaue Lösung mehr, aber die Potentialdifferenz an den Enden des Drahtes wird in den meisten Fällen noch durch eine periodische Oscillation von abnehmender Amplitude wiedergegeben.

547. Gesetze der Zweigströme im variabeln Zustande. — Das Gesetz, welches in einem geschlossenen Polygone die Stromintensitäten mit den elektromotorischen Kräften verbindet (**211**), ist auch beim variabeln Zustande anwendbar unter der Bedingung, dass man zu den gewöhnlichen elektromotorischen Kräften die hinzufügt, die von den Inductionskräften herrühren.

Wir wollen nur den einfachen Fall untersuchen, wo der Strom sich in zwei Punkten A und B in zwei Teile teilt, indem er durch zwei Leiter mit den Widerständen r und r' fliesst, die keine elektromotorischen Kräfte enthalten. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, dass diese Leiter in Spulen aufgewickelt sind, und wir wollen L, L' und M die Inductionscoefficienten derselben nennen. Wenn man zu einer gegebenen

Zeit mit i und i' die Stromintensitäten in den beiden Zweigen bezeichnet, erhält man

$$(46) \qquad ri + \frac{d}{dt}(L - M)i = r'i' + \frac{d}{dt}(L' - M)i'.$$

Betrachten wir zunächst den Fall, wo der zweite Draht nicht aufgewickelt ist, so ist der Coefficient L' sehr klein, und dasselbe ist mit dem Coefficienten M der gegenseitigen Induction der Fall (**540**). Die Gleichung (46) reducirt sich dann auf

$$(47) \qquad ri - r'i' + L\frac{di}{dt} = 0.$$

So lange der Hauptstrom stärker wird, ist, wie man sieht, die Intensität i' in dem geradlinigen Zweige grösser, als sie beim dauernden Zustande wäre. Der Zweig, welcher eine Spule enthält, besitzt demnach einen höheren *scheinbaren* Widerstand, als sein *wirklicher* Widerstand ist. Die Differenz ist um so grösser, je grösser der Coefficient L ist, und je schneller die Aenderung der Intensität ist; das Umgekehrte tritt bei abnehmender Intensität ein. Die Wirkung ist die nämliche in dem allgemeinen Falle, wo kein Coefficient Null ist, und die Gleichung (46) zeigt, dass jeder Leiter sich bei ansteigendem Strome so verhält, als ob er einen um so grösseren Widerstand besässe, je grösser sein Coefficient der Selbstinduction ist.

Sind m und m' die Elektricitätsmengen, die während der Zeit t durch die beiden Leiter gehen, so erhält man

$$rm - r'm' + \left[Li - L'i' + M(i' - i)\right]_0^t = 0.$$

In dem Falle einer Entladung sind die Anfangs- und Endintensitäten Null; bleiben die Coefficienten L, L' und M constant, so ist der Ausdruck in der Klammer Null, und es bleibt

$$rm - r'm' = 0.$$

Es folgt hieraus, dass die gesammten Elektricitätsmengen sich auf die beiden Zweige nach dem gewöhnlichen Gesetze verteilt haben, obwohl in jedem Momente die Teilung in anderer Weise erfolgt: es tritt eben schliesslich Compensation ein.

Diese Folgerung ist nur genau, wenn die beiden Kreise keine äussere Arbeit erzeugt haben, insbesondere, wenn während der Entladung sich kein Magnet in der Nähe eines derselben befunden hat. Deswegen ist es auch schwierig zur Messung von Entladungen ein Galvanometer in einer Abzweigung zu verwenden.

548. — Variirt der Hauptstrom wie ein Sinus, mit der Amplitude I_0, so haben, wie man leicht sieht, die beiden Zweigströme schliesslich denselben periodischen Charakter und nur ihre Phasen sind verschieden. Durch Rechnungen, die den eben durchgeführten analog sind, findet man zwischen

den Amplituden A und A' und den Phasendifferenzen φ und φ' folgende Beziehungen:

$$\frac{A^2}{r'^2+\frac{4\pi^2}{T^2}(L'-M)^2}=\frac{A'^2}{r^2+\frac{4\pi^2}{T^2}(L-M)^2}=\frac{I_0^2}{(r+r')^2+\frac{4\pi^2}{T^2}(L+L'-2M)^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\pi\varphi=\frac{2\pi}{T}\frac{Lr'-L'r+M(r-r')}{(r+r')r'+\frac{4\pi^2}{T^2}(L+L'-2M)(L'-M)},$$

$$\operatorname{tg} 2\pi\varphi'=\frac{2\pi}{T}\frac{L'r-Lr'+M(r'-r)}{(r+r')r+\frac{4\pi^2}{T^2}(L+L'-2M)(L-M)}.$$

Es tritt also, wie man sieht, eine Phasendifferenz zwischen dem Hauptstrome und der elektromotorischen Kraft ein, die ihn hervorruft, wenn sich diese wie ein Sinus ändert.

549. — Wir fassen noch als Anwendung den Versuch ins Auge, mittels dessen Faraday die Existenz des direkten Extrastromes nachgewiesen hat, der im Augenblicke der Stromunterbrechung entsteht. Eine Kette ist durch einen Kreis mit zwei Zweigen, wie wir denselben eben betrachtet haben, geschlossen; der eine Draht mit dem Widerstande r' ist geradlinig, der andere mit dem Widerstande r bildet eine Spule mit einer grossen Anzahl von Windungen.

Nennt man E die elektromotorische Kraft der Kette, R ihren Widerstand und I den Hauptstrom, so erhält man nach Schliessung des Kreises die Gleichungen

$$(48)\qquad \begin{aligned} I&=i+i',\\ E&=RI+r'i',\\ L\frac{di}{dt}+ri&=r'i'. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\rho^2=Rr+Rr'+rr'$$

und berücksichtigt, dass die Ströme für $t=0$ Null sind, so findet man hieraus für den Strom, der zur Zeit t durch die Spule geht,

$$i=\frac{r'E}{\rho^2}\left(1-e^{-\frac{\rho^2 t}{L(R+r')}}\right),$$

und für den durch den geradlinigen Draht gehenden

$$i'=\frac{rE}{\rho^2}\left(1+\frac{Rr'}{(R+r')r}e^{-\frac{\rho^2 t}{L(R+r')}}\right).$$

Unterbricht man, nachdem der dauernde Zustand hergestellt ist, den Hauptstrom, ohne dass der Unterbrechungsfunke eine merkliche Dauer hat, indem man $R = \infty$ macht, so liefern die Gleichungen (48),

$$i + i' = 0,$$

und folglich

$$L\frac{di}{dt} + (r + r')i = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung bestimmt den inducirten Strom, der durch den einen der beiden Zweige geht. Berücksichtigt man, dass der Strom i durch den voraufgegangenen dauernden Zustand bestimmt ist, so erhält man zu einem beliebigen Zeitpunkte t' nach der Stromunterbrechung

$$i = \frac{Er'}{\rho^2} e^{-\frac{(r+r')t'}{L}}.$$

Dieser Strom ist in dem geradlinigen Zweige dem ursprünglichen Strome entgegengesetzt gerichtet.

Die gesammte inducirte Elektricitätsmenge hat den Wert

$$m = \frac{EL}{\rho^2} \frac{r'}{r + r'}.$$

Wenn die Nadel eines über dem geradlinigen Draht aufgestellten Galvanometers gegen einen Anschlag stösst, der dieselbe hindert, der Einwirkung des permanenten Stromes zu folgen, so wird diese Nadel im Augenblicke der Unterbrechung des Hauptkreises von dem Inductionsstrom in entgegengesetzter Richtung fortgeschleudert. Diese Methode ist von Faraday angewandt worden.

550. — Fassen wir die Aufgabe in ihrer allgemeinsten Form ins Auge, so können wir sie dahin aussprechen, die Teilung der Ströme in den Fällen zu bestimmen, in denen der Leiter aus einem Netz von Drähten besteht, die Polygone von gegebener Form bilden.*)

Nehmen wir an, dass ein Teil des Netzes aus einem Polygon besteht, dessen Seiten A_1, A_2, A_3 ... sind, sind i_1, i_2, i_3 ... in einem gegebenen Augenblicke die Intensitäten der Ströme, die durch die verschiedenen Zweige gehen, r_1, r_2, r_3 ... deren Widerstände, E_1, E_2, E_3 ... die in den einzelnen Zweigen enthaltenen elektromotorischen Kräfte, L_1, L_2, L_3 ... ihre Coefficienten der Selbstinduction, sind $M_{1\cdot 2}$, $M_{1\cdot 3}$, $M_{2\cdot 3}$... die Coefficienten der gegenseitigen Induction der einzelnen Zweige auf einander, und ist M'_λ derjenige eines Zweiges auf einen andern Teil des Kreises, in welchem die Stromintensität i' ist; so erhalten wir für jede Seite des Polygons eine Gleichung wie die folgende für die Seite A_1 bestehende

$$E = i_1 r_1 + \frac{d}{dt}[L_1 i_1 + M_{1\cdot 2} i_2 + M_{1\cdot 3} i_3 + \cdots \Sigma M'_1 i'],$$

*) Vgl. Pogg. Annalen Bd. 83, S. 505 u. f. und H. Helmholtz: Wissenschaftl. Abh. Bd. I, S. 429 u. f.

woraus wir für den Umfang des Polygons finden

$$\Sigma E = \Sigma ir + \Sigma \frac{d}{dt}[Li + \Sigma Mi + \Sigma M'i'].$$

Der Ausdruck ΣMi liefert die Summe der Produkte aus den einzelnen Coëfficienten der gegenseitigen Induction in die Summe der Stromintensitäten in den beiden entsprechenden Drähten. Ist ein ausserhalb des ersten liegendes magnetisches oder elektrisches System vorhanden, so ruft die entsprechende Aenderung der magnetischen Kraftströmung Q in dem Polygon ebenfalls eine elektromotorische Kraft hervor. Wir erhalten so für den Umfang des Polygons

$$\text{(48)} \qquad \Sigma E = \Sigma ir + \Sigma \frac{d}{dt}[Li + \Sigma Mi + \Sigma M'i'] + \frac{dQ}{dt}.$$

Integriren wir diesen Ausdruck zwischen 0 und t, so erhalten wir

$$\Sigma \int E dt = \Sigma \int ir dt + \Sigma [Li + \Sigma Mi + M'i']_0^t + (Q_t - Q_0).$$

Sind alle Inductionscoefficienten constant, und sind die Anfangs- und Endintensitäten in jedem der Drähte die nämlichen, so ist das zweite Glied auf der rechten Seite Null. Wenn schliesslich noch die äussere Arbeit ebenfalls Null ist, dann erhalten wir einfach

$$\Sigma \int E dt = \Sigma \int ir dt,$$

oder, wenn m die Elektricitätsmenge ist, die durch einen Draht vom Widerstand r geht, und wenn wir die Widerstände als constant annehmen,

$$\Sigma \int E dt = \Sigma mr.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der durch das Kirchhoff'sche Gesetz (**211**) gegebenen, so sehen wir, dass dieselbe von derselben Form ist, und wir können hieraus folgende Sätze ableiten:

1. Die Verteilung der Entladungen in den Zweigen eines gegebenen Kreises ist, wenn die Form des Kreises sich nicht ändert, die Anfangs- und Endintensitäten in jedem Drahte dieselben sind und äussere Arbeit nicht vorhanden ist, den Widerständen umgekehrt proportional.

2. Sind ferner die ersteren Bedingungen nicht für alle Drähte erfüllt, so enthalten die Gleichungen der Verteilung nicht die Coefficienten der Selbstinduction derjenigen Zweige, in denen die Anfangs- und die Endintensitäten dieselben sind.

551. Inductionserscheinungen in den Telegraphenkabeln. — Bei der Untersuchung der Ausbreitung der Elektricität in cylindrischen Leitern während des veränderlichen Zustandes (**224**) haben wir die Wirkungen der

elektrodynamischen Induction, die von den Aenderungen der Stromintensität herrühren, ausser Acht gelassen. Aus diesen folgt eine neue Ursache für die Verzögerung in dem Auftreten und dem Verschwinden des Hauptstromes, und diese Verzögerung kann nicht in der früheren Weise (**535**) berechnet werden, da die Dauer der Ausbreitung gegen die Dauer der Inductionserscheinungen sehr beträchtlich ist; die Annahme, dass die Stromintensität in jedem Augenblicke in der ganzen Ausdehnung des Kreises die nämliche ist, ist dann nicht mehr zulässig.

Erleidet der Draht eine Reihe von abwechselnden Ladungen und Entladungen, wie das bei den telegraphischen Uebertragungen geschieht, so kann man die Erscheinung als von einer veränderlichen elektromotorischen Kraft herrührend auffassen, und es treten Wirkungen ein, die denen analog sind, von denen wir oben gesprochen haben.

Ausserdem kann das betrachtete Kabel andern Kabeln benachbart sein, die auf das erste einwirken, sowohl durch ihre blosse Gegenwart, als durch Aenderungen der Ströme, die durch diese selbst gehen. Die davon herrührenden Wirkungen treten sehr deutlich in den auf Telegraphenstangen befestigten Luftleitungen zu Tage.

Sind endlich mehrere Leiter in derselben dielektrischen Scheide eingeschlossen, wie bei den unterirdischen oder unterseeischen Kabeln, so hängt das Potential in jedem Punkte eines einzelnen Drahtes von der Ladung der benachbarten Drähte ab. Es folgt hieraus eine neue Art von rein elektrostatischer Iufluenz oder Induction, die Sir W. Thomson als *peristaltische* bezeichnet, um dieselbe von der Faraday'schen zu unterscheiden. Diese Erscheinung zeigt eine vollkommene Analogie mit dem Einfluss elastischer Röhren auf einander, die, ihrer ganzen Länge nach verbunden, mit derselben Flüssigkeit angefüllt und von derselben umgeben sind, wenn man die Flüssigkeit in einer oder mehreren derselben circuliren lässt, während die andern an ihren Enden offen oder geschlossen sind, oder irgend einer speciellen Bedingung unterworfen sind; eine geschlossene Röhre würde einem isolirten Leiter entsprechen, eine offene Röhre einem nicht isolirten Draht.

Man sieht nach diesen Andeutungen, wie complicirt die Aufgabe über die Fortpflanzung der Elektricität ist, wenn man alle Umstände in Rechnung ziehen will, die die Erscheinung beeinflussen können.

552. Berechnung der Inductionscoefficienten. — Solenoide. — Die letzten Beispiele zeigen die wichtige Rolle, welche die Coefficienten M und L in der Berechnung der Inductionserscheinungen spielen. Wir wollen hier einige einfache Fälle untersuchen, in denen diese Coefficienten direkt ausgewertet werden können.

Wir fassen zunächst ein cylindrisches Solenoid ins Auge, das so lang ist, dass man in einem wesentlichen Teile seiner Länge die Wirkung der Enden ausser Acht lassen kann.

Ist S der Querschnitt des Cylinders, den wir als kreisförmig voraussetzen, I die Intensität des Stromes, und n_1 die Anzahl von Windungen in der Längeneinheit, so ist die Strömung der Kraft oder der magnetischen Induction gleich $4\pi n_1 IS$ (**495**), und wenn der Strom der Einheit gleich ist, hätte diese Strömung den Wert

$$g = 4\pi n_1 S.$$

Nehmen wir an, dass man auf den Cylinder n' fernere Windungen von beliebigem Durchmesser wickelt, so geht die Kraftströmung des ersten Kreises n' Mal durch die Oberfläche des zweiten; der Coefficient der gegenseitigen Induction ist demnach

(49) $$M = n'g = 4\pi n_1 n' S.$$

Dieselbe Strömung geht n_1 Mal auf die Längeneinheit der Oberfläche des ersten Kreises, so dass der Coefficient der Selbstinduction des Solenoides für die Längeneinheit ist

(50) $$L_1 = n_1 g = 4\pi n_1^2 S.$$

Die für die Coefficienten M und L gefundenen Werte sind ein Maximum, denn die wirkliche Kraftströmung ist kleiner als $4\pi n_1 IS$, und diese Strömung wird um so kleiner, je mehr man sich den Enden des Solenoides nähert, wo dieselbe sogar kleiner als $2\pi n_1 IS$ wird. Denn die magnetische Induction in einem gleichförmig magnetisirten Cylinder, welcher dem Solenoide äquivalent ist (**373**), ist gleich der Resultante der der Achse parallelen Kraft $4\pi n_1 I$ und der Wirkung der beiden Endschichten von den gleichförmigen Dichten $\pm \sigma = n_1 I$, welche entgegengesetzt gerichtet ist. Aber in einem der positiven Fläche benachbarten Querschnitte sendet diese Fläche nach innen eine Kraftströmung gleich $2\pi n_1 IS$, zu der man noch, um die wirkliche Strömung zu erhalten, den Teil der von der negativen Fläche ausgesandten Strömung hinzufügen muss, die durch dieselbe Endfläche geht.

Nehmen wir an, dass die n' Windungen ein mit dem ersten concentrisches Solenoid von derselben Länge l bilden, bezeichnen wir mit r_1 und r_2 die beiden Radien, und mit n_1 und n_2 die Anzahl der in jeder einzelnen in der Längeneinheit enthaltenen Windungen, so kann man, wenn man von der Wirkung der Enden absieht, setzen

$$M = n_2 l g = Ng = 4\pi n_1 n_2 l S,$$

wenn man nämlich setzt

$$N = n_2 l,$$
$$g = 4\pi n_1 S = 4\pi^2 n_1 r_1^2.$$

Der Factor N giebt die gesammte Windungszahl des äusseren Solenoides und g die in dem inneren Solenoide von einem der Einheit gleichen Strome erzeugte Kraftströmung an.

553. Coaxiale Spulen. — Wir fassen ebenso zwei concentrische Spulen, von denen jede aus mehreren Schichten von gleichmässig gezogenem Draht besteht, ins Auge, so dass die Anzahl der Drähte in der Flächeneinheit einer Meridianebene beziehungsweise n_1^2 und n_2^2 ist. Für Schichten von der Dicke dr_1 und dr_2 und von der Einheit gleichen Längen ist die Anzahl der Drähte entsprechend $n_1^2 dr_1$ und $n_2^2 dr_2$. Man erhält demnach

$$N = l n_2^2 \int dr_2,$$

$$g = 4\pi^2 n_1^2 \int r_1^2 dr_1,$$

wo das Integral für jede Spule über die ganze Dicke derselben auszudehnen ist. Bezeichnet man die Endradien für die erste Rolle mit y_1 und x_1 und für die zweite mit y_2 und x_2, so ergiebt sich

$$N = n_2^2 l (y_2 - x_2),$$

$$g = \frac{4\pi^2 n_1^2}{3}(y_1^3 - x_1^3).$$

Sieht man von der Wirkung der Enden ab, so erhält der Coefficient der gegenseitigen Induction den Wert

$$M = Ng = \frac{4}{3}\pi^2 n_1^2 n_2^2 l (y_2 - x_2)(y_1^3 - x_1^3), \tag{51}$$

Berühren sich die Schichten der beiden Spulen, so kann man setzen $x_2 = y_1 = y$. Will man dann den mittleren Radius y so gestalten, dass der Coefficient M ein Maximum wird, so muss man der Bedingung genügen,

$$\frac{y_2 - y}{y - x_1} = \frac{y^3 - x_1^3}{3y^2(y - x_1)} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x_1}{y} + \frac{x_1^2}{y^2}\right).$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung kleiner als Eins ist, muss die äussere Rolle weniger dick als die innere Rolle sein.

Um den Coefficienten der Selbstinduction einer Rolle zu erhalten, kann man zum Beispiel annehmen, dass zwei genau gleiche Rollen übereinander gelagert sind und bestimmen, was dann der Coefficient der wechselseitigen Induction wird (**519**). Macht man so in Gleichung (51)

$$n_1 = n_2,$$
$$y_1 = y_2 = y,$$
$$x_1 = x_2 = x,$$

so erhält man

$$L = \frac{4}{3}\pi^2 n_1^4 l (y - x)(y^3 - x^3). \tag{52}$$

554. Spulen mit Weicheisenkern. — Nehmen wir an, dass die innere Spule einen cylindrischen Weicheisenkern vom Radius a enthält, dessen Magnetisirungscoefficient k ist, so ändert sich der Wert von N nicht; aber, wenigstens so lange man in den Grenzen bleibt, innerhalb deren die Magnetisirung der magnetisirenden Kraft proportional ist, ist die magnetische Induction in dem von dem weichen Eisen eingenommenen Raume gleich dem ursprünglichen Werte der Kraft multiplicirt in $(1 + 4\pi k)$ (**379**). Der Wert von g wird dann in dem Falle eines Solenoides

$$g = 4\pi n_1 (S + 4\pi k \pi a^2) = 4\pi^2 n_1 (r_1^2 + 4\pi k a^2).$$

Besteht die Spule aus mehreren Schichten, so erhält man

$$g = 4\pi^2 n_1^2 \int (r_1^2 + 4\pi ka^2)\, dr_1 = 4\pi^2 n_1^2 \left[\frac{y_1^3 - x_1^3}{3} + 4\pi k a^2 (y_1 - x_1)\right];$$

hieraus folgt

$$(53) \qquad M = \frac{4}{3} \pi^2 n_1^2 n_2^2 l (y_2 - x_2) [y_1^3 - x_1^3 + 12\pi k a^2 (y_1 - x_1)].$$

Füllt der Eisenkern die innere Höhlung ganz aus, und berühren sich die beiden Spulen, so kann man setzen

$$a = x_1 = x,$$
$$x_2 = y_1 = y,$$
$$y_2 = z;$$

es ergiebt sich dann

$$(54) \qquad M = \frac{4}{3} \pi^2 n_1^2 n_2^2 l (z - y)(y - x)[y^2 + xy + x^2 + 12\pi k x^2].$$

Ist der Radius des Kernes allein veränderlich, und will man über denselben so verfügen, dass der Coefficient der wechselseitigen Induction ein Maximum wird, dann muss die partielle Ableitung von M nach x Null sein; es folgt dann

$$x = y\, \frac{8\pi k}{1 + 12\pi k},$$

oder bis auf Grössen zweiter Ordnung $3x = 2y$, da der Coefficient k sehr gross ist.

Wenn der äussere Radius z ebenso wie die Art der Wickelung der Drähte gegeben ist, und man über x und y so verfügen will, dass der Coefficient M ein Maximum wird, dann findet man in derselben Weise, indem man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial M}{\partial x}$ und $\frac{\partial M}{\partial y}$ gleich Null setzt,

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}.$$

Endlich wird der Coefficient der Selbstinduction einer Rolle mit dem äusseren Radius z, dem inneren Radius y, welche einen Weicheisenkern mit dem Radius x enthält, ausgedrückt durch

$$(55) \qquad L = \frac{4}{3}\pi^2 n_1^4 l(z - y)^2 [z^2 + zy + y^2 + 12\pi k x^2].$$

Die eben behandelte Aufgabe ist bei der Construction der Inductionsrollen zu lösen.

555. Ringförmige Spulen. — In einer durch regelmässige Wickelung eines Drahtes um einen Kreisring gebildeten Spule wird der Coefficient g (**496**)

$$g = 4\pi n_1 \int \frac{dS}{x}.$$

Nehmen wir an, dass ein zweiter Draht n' Mal in beliebiger Weise um den ersten gewickelt ist, so ist der Coefficient der gegenseitigen Induction

$$(56) \qquad M = 4\pi n_1 n' \int \frac{dS}{x}.$$

Wenn die erste Spule einen Weicheisenkern enthält, der durch Drehung um dieselbe Achse entstanden ist und dessen Querschnitt S' ist, so ist der Wert von g

$$g = 4\pi n_1 \left[\int \frac{dS}{x} + 4\pi k \int \frac{dS'}{x} \right].$$

Füllt der Kern die ganze Höhlung des Solenoides aus, so reducirt sich dieser Wert auf

$$g = 4\pi n_1 (1 + 4\pi k) \int \frac{dS}{x}.$$

In diesem Falle ist der Coefficient der gegenseitigen Induction auf einen äusseren Draht mit n' Windungen

$$(57) \qquad M = 4\pi n_1 n' (1 + 4\pi k) \int \frac{dS}{x},$$

und der Coefficient der Selbstinduction der Spule, die $2\pi n_1$ Windungen enthält, ist

$$(58) \qquad L = 8\pi^2 n_1^2 (1 + 4\pi k) \int \frac{dS}{x}.$$

Wir haben (**502**) gesehen, welches die Werte des Integrals $\int \frac{dS}{x}$ in bestimmten speciellen Fällen sind.

556. Elektrische Motoren. — Die *elektrischen Motoren* sind Maschinen, welche Leitungsdrähte und Elektromagnete oder dauernde Magnete enthalten, die so verbunden sind, dass, wenn man einen durch irgend eine fremde Quelle erzeugten Strom in das System einführt, die gegenseitigen elektro-

magnetischen oder elektrodynamischen Wirkungen, die zwischen den verschiedenen Organen ausgeübt werden, benutzt werden, um eine Verschiebung dieser Organe gegen einander hervorzurufen. Die Stetigkeit der Bewegung wird dabei entweder durch Schleifcontacte oder durch Commutatoren erzielt, die die Stromrichtung in der Maschine modificiren.

Diese Maschinen könnten so construirt werden, dass sie eine gleichförmige Arbeit leisten, wenn die Stromintensität constant ist; dies ist der Fall bei der Faraday'schen Scheibe (**530**); aber meist sind die Wirkungen periodisch, und die relative Bewegung der Organe, die eine oscillirende oder eine rotirende ist, erzeugt in jedem Augenblicke eine elektromotorische Inductionskraft E von periodischem Charakter. Um die Bewegung dauernd zu erhalten, muss der Strom in einem Teile des Kreises zweimal während jeder Periode durch einen Commutator umgekehrt werden, damit die elektromotorische Inductionskraft in jedem Augenblicke dem Erregungsstrome E_0 entgegengesetzt gerichtet ist.

Sobald ein stationärer Zustand eingetreten ist, wird die Arbeit der gegenseitigen Einwirkungen allein dazu benutzt äussere Widerstände zu überwinden, da die Geschwindigkeit am Ende jeder Periode immer wieder denselben Wert erhält.

Die von der Quelle während jeder Periode θ aufgewendete Energie ist gleich der äusseren Arbeit, vermehrt um die Energie, welche der Erwärmung der Leiter entspricht. Nennt man R den Widerstand des Kreises, so erhält man demnach

$$(59) \qquad \int_0^\theta E_0 I dt = \int_0^\theta I^2 R dt + \int_0^\theta E I dt.$$

Die Stromumkehrungen durch den Commutator erzeugen Funken, die einen Teil der Arbeit verbrauchen; ihr Auftreten beeinflusst die Gleichungen, wenn man die entsprechenden Aenderungen im Widerstande R des Kreises in Rechnung zieht.

In dem allgemeinen Falle hängen die Werte der Integrale von dem Gesetze ab, nach welchem sich der Strom während der Dauer einer Periode ändert; wenn aber die Intensität merklich constant ist, dann reducirt sich die Gleichung (59) auf

$$(60) \qquad E_0 - E = IR.$$

Der Nutzeffect ρ eines derartigen Motors ist der Quotient der äusseren Arbeit EI während der Zeiteinheit durch die gesammte aufgewendete Energie $E_0 I$ oder das Verhältnis $\frac{E}{E_0}$ der elektromotorischen Kräfte. Nennt man I_0 die Stromintensität, die in dem in Ruhe befindlichen Kreise von der elektromotorischen Kraft E_0 erzeugt würde, so erhält man demnach

$$(61) \qquad \rho = \frac{E}{E_0} = 1 - \frac{IR}{E_0} = 1 - \frac{I}{I_0}.$$

Die äussere Arbeit selbst wird ausgedrückt durch

$$(62)\qquad EI = \frac{E(E_0 - E)}{R} = RI(I_0 - I).$$

Wenn die äussere elektromotorische Kraft constant ist, dann ist diese Arbeit ein Maximum, wenn die Bewegung die Stromintensität um die Hälfte verkleinert, und der Nutzeffect ist dann gleich 0,50.

Ist die äussere Arbeit sehr klein, so wächst die Geschwindigkeit des Motors schnell, mit oder ohne Grenze, je nach der Art der Construction; die elektromotorische Inductionskraft sucht der äusseren elektromotorischen Kraft gleich zu werden, und der Nutzeffect nähert sich der Einheit.

557. Elektromotoren. — Wird ein elektrischer Motor durch eine fremde Maschine in Bewegung gesetzt, so wird derselbe Träger einer elektromotorischen Kraft, deren Richtung derjenigen entgegengesetzt ist, durch welche die Bewegung hervorgerufen würde, und der Kreis, aus dem er besteht, wird, wenn er geschlossen ist, im Allgemeinen von einem elektrischen Strom durchflossen. Der Apparat wird dann ein Elektricitätserzeuger oder ein *Elektromotor*.

Wir nehmen an, dass aus irgend einem vorübergehenden Grunde in dem Kreise ein Strom von der Intensität i existirt; so lange die Arbeit Ei, die von der elektromotorischen Inductionskraft E absorbirt wird, grösser als die von ihm in den Leitern entwickelte Wärmeenergie ist, wächst der Strom, bis man hat

$$(63)\qquad EI = I^2R.$$

Wenn also die Bedingung $E > iR$ für einen unendlich schwachen Strom erfüllt ist, lässt sich die Maschine, einmal in Bewegung gesetzt, von selbst an, und liefert als stationären Zustand einen durch die Gleichung (63) bestimmten Strom. Ist dagegen für einen unendlich kleinen Strom $E < iR$, so kann die äussere Arbeit einen elektrischen Strom nicht erzeugen und unterhalten, ausser wenn man künstlich in den Kreis einen Strom von solcher Intensität einführt, dass die Bedingung $E \geq iR$ erfüllt ist, worauf die fremde elektromotorische Kraft unterdrückt werden kann, ohne dass darum der Strom zu bestehen aufhört.

Eine als Elektromotor gebrauchte Maschine ist demnach im Stande, einen elektrischen Strom zu erzeugen oder einen bereits vorhandenen zu unterhalten oder nicht, je nach dem Werte des Gesammtwiderstandes, oder, was eine analoge Wirkung zur Folge hat, je nach der Natur der äusseren Arbeit, die man von dem Strome leisten lassen will. Da die elektromotorische Induktionskraft, wenn die übrigen Verhältnisse dieselben bleiben, der Geschwindigkeit der Maschine proportional ist, so sieht man, dass für einen gegebenen Gesammtwiderstand und für gegebene äussere Arbeit der Elektromotor um so leichter fähig ist, einen Strom zu erzeugen und zu unterhalten, je grösser seine Geschwindigkeit ist.

Wir betrachten zwei Grenzfälle:

1. Besteht eine Maschine aus permanenten Magneten, die ein unveränderliches magnetisches Feld erzeugen, in dem sich Leitungsdrähte bewegen, wie dies zum Beispiel bei dem Faraday'schen Rade der Fall ist, so ist die elektromotorische Kraft einfach der Anzahl der Touren oder Oscillationen der Maschine während der Zeiteinheit proportional und kann durch nE_1 wiedergegeben werden. Bei constanter Geschwindigkeit verhält sich eine derartige Maschine genau wie eine gewöhnliche Batterie. Dieselbe ist stets im Stande, in einem metallischen Kreise einen Strom zu erzeugen, da die Bedingung $E > iR$ stets erfüllt ist, wenn der Strom sehr schwach ist.

2. Besteht die Maschine aus festen und beweglichen Drähten oder aus zwei Systemen von Elektromagneten, so ist, vorausgesetzt, dass man in den Grenzen bleibt, innerhalb deren die Magnetisirung der magnetisirenden Kraft proportional ist, die elektromotorische Kraft E selbst erst der Stromintensität proportional und kann durch nAI wiedergegeben werden. Eine Maschine dieser Art kann einen Strom nur dann erzeugen und unterhalten, wenn die Geschwindigkeit so gross ist, dass $nA > R$ ist. Für jeden Wert von n über $\frac{R}{A}$ wächst die Stromintensität schnell bis der Widerstand des Kreises infolge der entwickelten Wärme den Wert nA erreicht hat.

Nehmen wir an, dass der Strom ausserhalb eine elektromotorische Kraft E' zu überwinden hat, so hat der Nutzeffect wie in dem Falle einer Batterie den Wert

$$\rho = \frac{E'}{E} = 1 - \frac{IR}{E},$$

und die nutzbare Arbeit während der Zeiteinheit ist

$$E'I = \frac{E'(E - E')}{R}.$$

Im ersteren Falle sind der Nutzeffect und das Maximum der Arbeit dieselben wie für eine Batterie.

Im zweiten Falle, in welchem $E = nAI$ ist, erhalten wir

$$\rho = 1 - \frac{R}{nA},$$

$$EI' = (nA - R)I^2.$$

Der Nutzeffect ist constant, und die Nutzarbeit ist dem Quadrat der Stromintensität proportional.

Besteht die äussere Arbeit in nichts Anderem als darin, dass eine zweite mit der ersten identische Maschine in Bewegung gesetzt wird, so sind die elektromotorischen Kräfte E und E' den Tourenzahlen n und n' der beiden Maschinen und einer Funktion $\varphi(I)$ der Intensität proportional. Der Nutzeffect

$$\rho = \frac{n'\varphi(I)}{n\varphi(I)} = \frac{n'}{n}$$

ist gleich dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten der beiden Maschinen, und die Nutzarbeit während der Zeiteinheit wird ausgedrückt durch

$$E'I = \frac{n'(n-n')}{R}\varphi^2(I).$$

Da die Intensität I eine Funktion von $n-n'$ ist, kann das Maximum der nutzbaren Arbeit nur dann bestimmt werden, wenn man die Form der Funktion φ kennt.

558. — Die letzten Betrachtungen gelten streng genommen nur für den Fall eines gleichförmigen Stromes, wie der ist, den man durch eine Maschine nach Art der Faraday'schen Scheibe erhält. In einer periodisch wirkenden Maschine, wenn etwa ein Rahmen unter dem Einflusse des Erdfeldes um eine verticale Achse rotirt, sind die Erscheinungen complicirter.

Wird die Maschine als Elektromotor angewendet, indem die Drahtenden durch Schleifcontacte in der Weise mit einem äusseren Leiter verbunden sind, dass der Coefficient der gegenseitigen Induction der beiden Teile des Kreises vernachlässigt werden kann, so muss der Strom der Gleichung genügen (**518**)

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{dQ}{dt} = 0,$$

in welcher L der Coefficient der Selbstinduction des ganzen Kreises, R der Widerstand und Q die Strömung der Erdkraft durch den Rahmen hindurch ist. Indem wir S die Fläche des Rahmens, H die Horizontalcomponente des Erdfeldes, und T die Periode der Drehung nennen, können wir setzen

$$Q = HS\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

und auch die elektromotorische Kraft variirt wie ein Sinus, wie wir dies (**535**) gefunden haben. Sobald der stationäre Zustand eingetreten ist, ist der Strom selbst periodisch, und die Arbeit, die nötig ist, um die Bewegung zu unterhalten, entspricht dann der in dem Kreise entwickelten Wärme, was für die Zeiteinheit liefert

$$W_1 = \frac{R}{2}\cdot\frac{H^2S^2}{R^2 + \frac{4\pi^2L^2}{T^2}}.$$

Anstatt dass man durch den äusseren Kreis den inducirten Strom alternirend schickt, kann ein Commutator, der aus zwei einzeln mit den Enden des Rahmens verbundenen Halbplatten und aus mit dem äusseren Kreise verbundenen Federn besteht, an der Achse angebracht werden. Sind die Federn so justirt, dass sie in dem Augenblicke die Verbindungen wechseln, wo der Strom Null ist — also zu einer Zeit ΦT nach dem Durchgang des Rahmens durch eine zum magnetischen Meridian senkrechte Ebene — so ist die Richtung des Stromes in dem äusseren Kreise stets die nämliche, und es tritt keine Aenderung in

dem Gesetze der Erscheinungen ein, wenn der Commutator nicht einen Verlust an Energie verursacht.

Benutzen wir den Rahmen als Motor, indem wir denselben mit einer äusseren elektromotorischen Kraft E_0 verbinden, so muss man notwendig, um die Bewegung zu unterhalten, einen Commutator anwenden, der zweimal in jeder Periode den Strom umkehrt. Es tritt dann ein Energieverlust ein infolge der Funken an den beweglichen Contacten, welche dabei angewandt werden müssen, und die Rechnungen sind viel weniger einfach.

Wir können hier nicht weiter ins Einzelne die Frage der Inductions-Elektromotoren behandeln, werden aber auf diesen Punkt im zweiten Bande wieder zurückkommen.

559. Anwendung auf die Lehre vom Magnetismus. — Wir sind jetzt in der Lage, die (**417**) angedeutete Methode zur Untersuchung der Verteilung des Magnetismus zu begründen, jene Methode, die in den Versuchen von van Rees und von Gaugain angewandt ist.

Umgiebt man einen magnetisirten Stab an einer Stelle mit einer aus einer Anzahl n' von Windungen bestehenden Rolle, die mit einem Galvanometer verbunden ist, und lässt man diese Rolle schnell um eine bestimmte Grösse parallel dem Stabe gleiten, so dass dieselbe in ihrer neuen Lage dann in Ruhe bleibt, so geht eine bestimmte Elektricitätsmenge m durch den Draht; ist R der Gesammtwiderstand des Kreises, so giebt der Ausdruck $\frac{mR}{n'}$ die magnetische Kraftströmung an, die von dem Magnet zwischen den beiden Lagen der Spule ausgeht. Indem man in dieser Weise mit einer Reihe von Verschiebungen operirt, kann man das Gesetz der Aenderung der seitlichen Kraftströmung bestimmen.

Befindet sich die Spule zunächst in der Mitte des Magnets oder genauer im neutralen Punkte, und entfernt man dieselbe dann plötzlich bis in eine grosse Entfernung, so erhält man die gesammte magnetische Kraftströmung, die vom Magnet ausgeht, und folglich die gesammte Masse freien Magnetismus, der in dem entsprechenden Teile des Stabes enthalten ist.

Nun kann man einen Magnet dadurch herstellen, dass man ein Weicheisenstück mit einer Spule umgiebt und durch diese einen Strom schickt. Wenn man daher über die magnetisirende Spule eines solchen Elektromagnets — falls er cylindrisch ist, in seiner Mitte, falls er ringförmig ist, an einer beliebigen Stelle — eine Hilfsspule schiebt und den magnetisirenden Strom, dessen Intensität als bekannt vorausgesetzt wird, plötzlich schliesst oder unterbricht, dann stellt der Ausdruck $\frac{mR}{n'}$, welcher in dem inducirten Kreise der Unterbrechung oder dem Auftreten des Hauptstromes entspricht, die gesammte magnetische Inductionsströmung LI dar, die durch eine Windung der magnetisirenden Spule geht.

Man kann demnach durch den Versuch den Wert von L bestimmen und aus demselben, insbesondere mittels der Formeln (54) und (57), den

Magnetisirungscoefficienten k ableiten. Dies ist das Prinzip der neuerdings von Rowland angewandten Methode.

560. Weber's Hypothesen über den Magnetismus und den Diamagnetismus. — Wir haben oben (498) gesehen, wie Ampère den Magnetismus durch Molekularströme erklärt; wir können jetzt untersuchen, welches die physikalischen Eigenschaften dieser Ströme sind.

Wir fassen einen solchen Strom ins Auge, der durch die Werte L, I und R bestimmt ist; Q sei die äussere Kraftströmung, die derselbe mit seiner Grenzlinie einschliesst; die Gleichung (10) des Artikel **518** wird, da die elektromotorische Kraft Null ist,

$$\frac{d}{dt}(LI+Q)+RI=0.$$

Man muss ferner annehmen, dass der Widerstand Null ist; es folgt daraus

$$LI+Q=\text{Const}=LI_0. \tag{64}$$

Die Intensität I_0 ist die desjenigen Stromes, der durch den betrachteten Kreis gehen würde, wenn die äussere Kraftströmung Null wäre. Nimmt man $I_0=0$ an, also dass der Molekularstrom ursprünglich Null ist, was dem Falle eines im neutralen Zustande befindlichen magnetischen Mittels entspräche, so erhält man schliesslich

$$LI=-Q.$$

Der in dem Molekül durch ein äusseres Feld inducirte Strom erzeugt demnach eine Kraftströmung, die Q entgegengesetzt gerichtet ist. In andern Worten: die dem Strome äquivalente Magnetisirung ist der magnetisirenden Kraft entgegengesetzt gerichtet; da dies bei paramagnetischen Substanzen nicht der Fall ist, so kann die Magnetisirung der magnetischen Körper nicht allein durch Ströme erklärt werden, die in den Molekülen des Mittels inducirt werden.

561. — Diese Ströme können dagegen von den diamagnetischen Erscheinungen Rechenschaft geben. Die Hypothese von Weber besteht in der Annahme, dass in jedem Molekül eines diamagnetischen Mittels Kanäle vorhanden sind, längs deren sich Ströme ohne Widerstand fortpflanzen können. Wären diese Kanäle in allen Richtungen vorhanden, so wäre das Molekül ein vollkommener Leiter. Für einen linearen Strom, der ursprünglich Null gewesen ist, ist die Intensität durch die Gleichung (64) gegeben. Nennt man θ den Winkel, den die magnetisirende Kraft X mit der Normale zur Ebene des Stromkreises bildet, dessen Fläche gleich A sei, so erhält man

$$Q=XA\cos\theta.$$

Das magnetische Moment des Stromes ist IA, und die Projection desselben auf die Richtung der magnetisirenden Kraft ist

$$IA\cos\theta=-\frac{XA^2}{L}\cos^2\theta.$$

Nehmen wir an, dass n Moleküle in der Volumeneinheit vorhanden sind, und dass die Achsen der Kreise nach allen Richtungen ohne Unterschied verteilt sind, so ist die Zone, welche dem Winkel $d\theta$ um die Richtung der magnetisirenden Kraft entspricht, $2\pi \sin\theta d\theta$, so dass der mittlere Wert von $\cos^2\theta$ ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{3}.$$

Das magnetische Moment ist demnach $-\frac{n}{3}\frac{A^2}{L}X$; die Magnetisirung ist der magnetisirenden Kraft genau entgegengesetzt, was mit den Erscheinungen des Diamagnetismus übereinstimmt, und der Magnetisirungscoefficient hat den Wert

$$k = -\frac{n}{3}\frac{A^2}{L}.$$

Sind die Achsen der Molekularkanäle nicht gleichförmig verteilt, so hat die Summe $\Sigma \frac{A^2}{L}\cos^2\theta$, die über alle Moleküle auszudehnen ist, verschiedene Werte, je nach der Richtung der magnetisirenden Kraft, und man findet die bekannten Eigenschaften der anisotropen diamagnetischen Körper wieder.

562. Wir nehmen jetzt an, dass jedes Molekül ein vollkommener Leiter ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass dasselbe von einer Schicht von absoluter Leitungsfähigkeit umgeben ist.

Für einen beliebigen auf der Oberfläche des Moleküls gezogenen Kreis ist dann nach Gleichung (64) die gesammte magnetische Inductionsströmung $LI + Q$, die durch diesen Kreis geht, constant.

Es folgt daraus, dass die Normalcomponente der Kraft in jedem Punkte der Oberfläche constant ist. Ist die Inductionsströmung, die von dem Molekül ausgeht, ursprünglich Null, so ruft jedes äussere magnetische System solche inducirte Ströme hervor, dass die resultirende magnetische Induction auf der ganzen Oberfläche und im Innern der Schicht, welche das Molekül einhüllt, Null bleibt.

Nehmen wir an, dass das Molekül die Form einer Kugel vom Radius r hat, so rufen die Oberflächenströme im Innern eine Kraft $-X$ hervor, die der äusseren magnetischen Kraft entgegengesetzt gleich ist; die Kugel wird gleichförmig magnetisirt mit einer Intensität (**355**) gleich $-\frac{3X}{8\pi}$, und das magnetische Moment derselben hat den Wert $-\frac{1}{2}r^3X$.

Stellt man sich vor, dass in der Volumeneinheit n derartige Moleküle vorhanden sind, die so klein und so weit von einander entfernt sind, dass sie auf einander nicht einwirken, so ist die mittlere Magnetisirungsintensität des Mittels $-\frac{n}{2}r^3X = \frac{-3hX}{8\pi}$, wenn man mit h das Verhältnis der Summe der Volumina der kleinen Kugeln zu dem Gesammtvolumen des Raumes, welcher dieselben enthält, bezeichnet.

563. Absolut leitende Schirme. — Es ist klar, dass diese Folgerungen aus der Formel (64) in gleicher Weise für eine Oberfläche von begrenzter Ausdehnung gelten, falls dieselbe absolute Leitungsfähigkeit besitzt; die inducirten Ströme, welche irgend eine Aenderung des Feldes in dieser Fläche hervorrufen würde, wären stets solche, dass die auf jeden einzelnen Teil der Oberfläche bezügliche Strömung constant bliebe, oder dass die Normalcomponente der magnetischen Induction in jedem Punkte einen festen Wert behielte. Wäre demnach diese Componente zu einer gegebenen Zeit Null, so bliebe dieselbe Null, welches auch die Aenderungen des Feldes sein mögen. Es folgt daraus, dass eine geschlossene oder unbegrenzte Fläche vom Widerstande Null ein absoluter Schirm für alle inneren Punkte gegen alle Wirkungen der Aenderungen des Feldes auf der andern Seite der Fläche ist; diese Wirkungen beschränken sich auf die Erzeugung von Oberflächenströmen, die das innere Feld beständig auf Null erhalten.

Um einen vollkommenen Leiter herum ist die Verteilung der magnetischen Kräfte genau vergleichbar mit der Verteilung der Geschwindigkeiten in einer incompressibeln Flüssigkeit, die denselben Körper umgiebt.

564. Um bei derselben Auffassungsweise die magnetischen Erscheinungen zu erklären, muss man annehmen, dass der ursprüngliche Strom in einem Molekül oder um einen Leiterkanal herum nicht Null ist, und die allgemeine Gleichung (64) benutzen. Fasst man immer einen Kreis ins Auge, dessen Normale mit der Richtung der magnetisirenden Kraft einen Winkel θ bildet, so erhält man

$$LI + XA\cos\theta = LI_0,$$

oder

$$I = I_0 - \frac{XA}{L}\cos\theta.$$

Wäre der ursprüngliche Strom I_0 Null, so wäre das Moment der Wirkung des Feldes auf das Molekül

$$-IAX\sin\theta = \frac{X^2A^2}{L}\sin\theta\cos\theta = \frac{X^2A^2}{2L}\sin 2\theta.$$

Stabiles Gleichgewicht wäre für $\theta = \frac{\pi}{2}$ vorhanden, also wenn die Stromebene gegen die Richtung des Feldes senkrecht wäre. Dies ist beispielsweise der Fall bei einem Ringe, den man plötzlich in ein sehr starkes Feld bringt.

In dem allgemeinen Falle kann das Moment des Paares, welches auf das Molekül wirkt, geschrieben werden

$$\frac{X^2A^2}{L}\cos\theta\sin\theta - I_0AX\sin\theta = mX\sin\theta\,[BX\cos\theta - 1],$$

wenn man setzt $m = I_0A$ und $B = \frac{A}{LI_0}$.

Nimmt man noch mit Weber (**427**) an, dass die Gegenwirkung des Mittels der Grösse und Richtung nach constant ist, so erhält man die Gleichgewichtsbedingung

$$X \sin \theta (1 - BX \cos \theta) = D \sin (\alpha - \theta).$$

Die der magnetisirenden Kraft X parallele Componente des magnetischen Moments des Moleküls ist

$$IA \cos \theta = \left(I_0 - \frac{XA}{L} \cos \theta \right) A \cos \theta = m \cos \theta (1 - BX \cos \theta).$$

Ist der Coefficient B sehr klein, ist also der ursprüngliche Molekularstrom I_0 sehr kräftig, so findet man die Weber'sche Formel für die Magnetisirung der magnetischen Körper wieder. Ist dieser Coefficient B sehr gross, so erhält man die Erscheinungen des Diamagnetismus.

In den dazwischen liegenden Fällen ist hiernach die Magnetisirung zunächst der magnetisirenden Kraft für schwache Kräfte proportional, geht dann durch ein Maximum und nimmt endlich ab. Der Versuch scheint keine Erscheinung dieser Art anzudeuten, so dass das Auftreten von molekularen Inductionsströmen noch nicht für streng bewiesen angesehen werden kann.

6. Capitel.

Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes.

565. Theorie von Maxwell. — Die letzten Auseinandersetzungen genügen, wie wir gesehen haben, um von allen Inductionserscheinungen in den linearen Leitern Rechenschaft zu geben; aber es ist nützlich die Aufgabe von einem andern Gesichtspunkte aus zu untersuchen, von welchem aus wir im Stande sein werden, die Mitwirkung des Zwischenmittels klar zu legen, wie wir dies bereits in der Elektrostatik gethan haben. Wir wollen hier die Principien der Maxwell'schen Theorie darlegen.

566. Gleichungen des magnetischen Feldes. — Wir nehmen der grösseren Allgemeinheit wegen an, dass die Leiter sich in einem magnetischen Mittel befinden, für welches der Coefficient der Permeabilität (**383**) gleich μ ist. Hebt man die gesammte magnetische Inductionsströmung Q, die durch einen geschlossenen Kreis hindurchgeht, auf, so wird dieser der Träger einer elektromotorischen Gesammtkraft, welche eine Elektricitätsmenge $\frac{Q}{R}$ in Bewegung setzt.

Diese elektromotorische Gesammtkraft kann als Resultante elementarer elektromotorischer Kräfte aufgefasst werden, die auf jedes einzelne Element des Kreises wirken und vom Zustande des Mittels herrühren. In jedem Punkte hat die von der Aufhebung der Kräfte herrührende elastische Reaktion des Mittels eine bestimmte Richtung; dieselbe ruft auf einem Elemente ds des Leiters, das in der Richtung der magnetischen Kraft liegt, eine der Länge dieses Elementes proportionale elektromotorische Kraft hervor, die durch Ids dargestellt werden kann, auf einem Elemente, welches mit jener Richtung den Winkel ε bildet, eine solche gleich $Ids \cos\varepsilon$.

Wenn das Mittel homogen und isotrop ist, dann ist die elektromotorische Kraft I für die Längeneinheit eine Funktion der Coordinaten; dieselbe kann durch ihre den Achsen parallelen Componenten F, G und H ersetzt werden, die auf den Projectionen dx, dy, dz des Elementes ds die elektromotorischen Kräfte Fdx, Gdy und Hdz liefern.

Man erhält demnach die Gleichung

$$(1) \qquad Q = \int I ds \cos \varepsilon = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

wo das Integral über den ganzen Kreis auszudehnen ist.

Fasst man andererseits irgend eine vom Kreise begrenzte Fläche S in's Auge und bezeichnet mit X, Y und Z die Componenten der magnetischen Kraft in einem Punkte dieser Fläche und mit α, β und γ die Cosinus der Winkel dieser Kraft mit der Normale, so wird die Gesammtströmung der magnetischen Induction, die durch den Kreis geht, auch durch das über die gesammte Oberfläche genommene Integral $\mu \int (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) dS$ ausgedrückt.

567. — Um die Beziehungen zu bestimmen, die zwischen der elektromotorischen Kraft I und der magnetischen Induction bestehen, wollen wir den Wert des Integrals $\int I ds \cos \varepsilon$ für einen unendlich kleinen rechteckigen Stromkreis bestimmen, der seinen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten hat, senkrecht zur xAchse ist, und dessen Seiten dy und dz sind.

Sind F_0, G_0 und H_0 die Werte der Funktionen, F, G und H im Mittelpunkte des Rechtecks, so erhält man für die obere Seite des Rechteckes

$$G_1 = G_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial z} dz,$$

und für die untere Seite

$$G_2 = G_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial z} dz.$$

Verfolgt man den Umfang in der Richtung, in welcher der Strom infolge der Aufhebung des Feldes zu entstehen sucht, so ist die Summe der beiden Teile der elektromotorischen Kraft, die in den der yAchse parallelen Seiten des Rechteckes auftreten, $G_1 dy - G_2 dy$, also

$$G_1 dy - G_2 dy = \frac{\partial G}{\partial z} dz dy.$$

Man erhält ebenso für die beiden andern Seiten

$$- H_1 dz + H_2 dz = - \frac{\partial H}{\partial y} dy dz.$$

Die auf die ganze Bahn bezügliche elektromotorische Kraft ist demnach

$$\int I ds \cos \varepsilon = \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} \right) dy dz.$$

Andererseits muss dieser Ausdruck auch die magnetische Inductionsströmung darstellen, welche durch den Kreis $dydz$ von der negativen Seite aus hindurchgeht; da der Ausdruck für diese Strömung $\mu X dy dz$ ist, ist die Componente μX gleich $\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}$.

Die andern Componenten der magnetischen Induction, die der y- und der zAchse parallel sind, genügen analogen Bedingungen, woraus sich die Gleichungen ergeben

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mu X &= \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \mu Y &= \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, \\ \mu Z &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}. \end{aligned}$$

Fassen wir nunmehr einen beliebigen geschlossenen Kreis ins Auge, so können wir die Fläche desselben durch zwei Reihen willkürlicher Curven in Elemente teilen. Bildet man die Summe $\int I ds \cos \varepsilon$ der elektromotorischen Kräfte, indem man den Grenzlinien aller Elemente folgt, so erhält man die gesammte magnetische Inductionsströmung, die durch den Kreis geht, und diese Summe reducirt sich auf die Glieder allein, welche von der ursprünglichen Grenzlinie geliefert werden, da die zwei benachbarten Elementen gemeinsamen Curventeile die Summe Null ergeben. Die gesammte elektromotorische Kraft eines Kreises hängt demnach nur von den Werten der Componenten F, G und H an den verschiedenen Punkten der Grenzlinie ab, und diese Componenten sind mit der magnetischen Induction durch die Gleichungen (2) verbunden.

568. — Wir sehen, dass die Componente F die gesammte elektromotorische Kraft bedeutet, welche an einer gegebenen Stelle in einer der xAchse parallelen Längeneinheit entsteht, wenn das magnetische Feld plötzlich aufgehoben wird. Diese elektromotorische Kraft kann auch als das Zeitintegral über die elementaren elektromotorischen Kräfte aufgefasst werden, die der allmäligen Aufhebung des Feldes entsprechen. Das Produkt der elektromotorischen Kraft P, die in einem gegebenen Augenblicke auf die der xAchse parallele Längeneinheit wirkt, in die Zeit dt ist der entsprechenden Verkleinerung des Wertes von F gleich, woraus sich ergiebt

$$P dt = -\frac{\partial F}{\partial t} dt,$$

oder

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t}.$$

Nennt man ebenso Q und R die analogen Componenten längs der andern Achsen, so erhält man zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft für jeden Augenblick die drei Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} P &= -\frac{\partial F}{\partial t}, \\ Q &= -\frac{\partial G}{\partial t}, \\ R &= -\frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

Die Funktion $-P$ drückt die Potentialdifferenz aus, die an einer Stelle in dem betrachteten Augenblicke zwischen den Enden einer der xAchse parallelen Längeneinheit vermöge der Aenderungen auftritt, welche zu gleicher Zeit in dem Werte der magnetischen Inductionsströmung vorhanden sind.

Wären noch elektrische Massen vorhanden, die in demselben Punkte ein Potential ψ ergeben, so wäre die gesammte Potentialdifferenz für ein Element dx gleich $\frac{\partial F}{\partial t}dx - \frac{\partial \psi}{\partial x}dx$; aber dieser letztere Teil ist ein vollständiges Differential, welches von selbst verschwindet, wenn man die Formel auf einen geschlossenen Kreis anwendet.

569. Gleichungen der Ströme. — u, v, w seien die Componenten des Stromes in einem Punkte, also die Elektricitätsmengen, welche in der Zeiteinheit durch die zu jeder einzelnen Achse beziehentlich senkrechte Flächeneinheit geht.

Man weiss (**452**), dass die Arbeit eines Stromes I auf einen der Einheit gleichen, auf einer geschlossenen Curve, welche die Ebene der Strombahn durchschneidet, beweglichen Pol gleich $4\pi I$ ist für jede vollständige Drehung des Poles um den Strom.

Wendet man dieses Gesetz auf den Fall eines Poles an, der eine rechtwinklige Bahn $dydz$ durchläuft, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, die also eine Fläche einschliesst, durch welche hindurch der Strom mit der Intensität $udydz$ fliesst, und bestimmt man dieselbe Arbeit durch die magnetischen Kräfte, so findet man durch eine der (**567**) angewandten analoge Rechnung die drei neuen Gleichungen

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
4\pi u &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\
4\pi v &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\
4\pi w &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

570. Potentielle Energie der Ströme. — Wir betrachten verschiedene Kreise C_1, C_2, $C_3 \ldots$, in denen die Stromintensitäten I_1, I_2, $I_3 \ldots$ sind; L_1, L_2, $L_3 \ldots$ seien deren Coefficienten der Selbstinduction und $M_{1\cdot 2}$, $M_{1\cdot 3}$, $M_{2\cdot 3} \ldots$ die Coefficienten der wechselseitigen Induction.

Die Kraftströmungen, die durch die bezüglichen Kreise gehen, sind

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= L_1 I_1 + M_{1\cdot 2} I_2 + M_{1\cdot 3} I_3 + \cdots \\
Q_2 &= L_2 I_2 + M_{2\cdot 1} I_1 + M_{2\cdot 3} I_3 + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

und die potentielle Energie der Gesammtheit der Ströme (**524**) ist

$$
(5) \qquad W = \frac{1}{2}\left(Q_1 I_1 + Q_2 I_2 + \cdots\right) = \frac{1}{2}\Sigma QI.
$$

Nach Gleichung (1) erhält man demnach

$$W=\frac{1}{2}\Sigma I\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

Der Strom, der durch den Querschnitt S eines Leiters geht, besitzt, wenn man u, v und w dieselben Bedeutungen wie oben (**569**) giebt, die Componenten

$$I\frac{dx}{ds}=uS,$$

$$I\frac{dy}{ds}=vS,$$

$$I\frac{dz}{ds}=wS.$$

Berücksichtigt man ausserdem, dass das Produkt Sds ein Volumenelement darstellt, so erhält man

$$W=\frac{1}{2}\int\int\int(Fu+Gv+Hw)\,dx\,dy\,dz.$$

Die Summation ist durch eine Integration über den ganzen Raum ersetzt, da dort, wo keine Leiter vorhanden sind, $u=v=w=0$ und, wo keine Kräfte wirken, $F=G=H=0$ ist.

Ersetzt man endlich die Componenten u, v, w durch ihre aus den Gleichungen (4) sich ergebenden Werte, so erhält man

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\int\int\left[F\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+H\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right]dx\,dy\,dz.$$

Man kann jedes Glied partiell integriren, was beispielsweise liefert

$$\int F\frac{\partial Y}{\partial z}dx\,dy\,dz=FY\,dx\,dy-\int Y\frac{\partial F}{\partial z}dx\,dy\,dz.$$

Wiederholt man dieselbe Operation für alle andern Glieder, so ergiebt sich

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\int[X(Hdz-Gdy)dx+Y(Fdx-Hdz)dy+Z(Gdy-Fdx)dz]$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int\int\int\left[X\left(\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right]dx\,dy\,dz.$$

Dehnt man diesen Ausdruck über den ganzen in einer sehr entfernten Fläche eingeschlossenen Raum aus, welcher das ganze System von Magneten und Strömen umfasst, so ist das erste Integral, welches sich auf die Fläche selbst bezieht, Null, da die Componenten der magnetischen Kraft dem Kubus des Abstandes umgekehrt proportional sind. Ersetzt man andererseits in dem zweiten Integrale die in Klammern gefassten Glieder durch ihre aus

den Gleichungen (2) sich ergebenden Werte, so erhält man

$$W = \frac{\mu}{8\pi}\iiint (X^2 + Y^2 + Z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

oder wenn man φ die magnetische Induction in einem Punkte, also das Produkt der Kraft in μ, nennt,

$$W = \frac{1}{8\pi\mu}\iiint \varphi^2\,dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

Die potentielle Energie der Ströme kann demnach durch ein Integral (5), welches die Ströme selbst enthält, oder durch ein auf alle Teile des Raumes, in welchem magnetische Kräfte vorhanden sind, bezügliches Integral (6) ausgedrückt werden. In dem ersten Falle wird die Wirkung der Ströme auf einander als direkt in die Entfernung wirkend aufgefasst; in dem zweiten Falle sieht man diese Wirkung als von der Elasticität des Zwischenmediums herrührend an. Schliesst man sich dieser letzteren Auffassungsweise an, so sieht man, dass die potentielle Energie des Mittels an jeder Stelle für die Volumeneinheit ausgedrückt wird durch

$$W_1 = \frac{1}{8\pi\mu}\varphi^2. \tag{7}$$

571. Relative Verschiebung von Kreisen. — Die Formeln (3) entsprechen dem Falle, wo, bei unbeweglichem Kreise, die Induction allein von den Aenderungen des Feldes herrührt; dann sind die Grössen F, G und H in jedem Punkte nur Funktionen der Zeit. Wenn man aber bei veränderlichem Felde den Kreis verschiebt oder deformirt, dann müssen die Coordinaten x, y, z ihrerseits als Funktionen der Zeit aufgefasst werden. Die Gleichung (1) muss dann geschrieben werden

$$Q = \int\left(F\frac{\partial x}{\partial s} + G\frac{\partial y}{\partial s} + H\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds. \tag{8}$$

Die während der Zeit dt nutzbar gemachte elektromotorische Kraft ist $-dQ$, so dass die elektromotorische Inductionskraft e in einem gegebenen Augenblicke, auf die Zeiteinheit bezogen, ausgedrückt wird durch

$$\begin{aligned} e = -\frac{dQ}{dt} = &-\int\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial t}ds \\ &-\int\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial t}ds \\ &-\int\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial z}{\partial t}ds \\ &-\int\left(F\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t} + G\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t} + H\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}\right)ds \\ &-\int\left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds. \end{aligned} \tag{9}$$

Ersetzen wir im ersten Gliede dieses Integrals die partiellen Ableitungen $\frac{\partial G}{\partial x}$ und $\frac{\partial H}{\partial x}$ durch ihre aus den Gleichungen (2) sich ergebenden Werte, so geht dieses Glied über in

$$\int\left(\mu Y\frac{\partial z}{\partial s}-\mu Z\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial t}ds,$$

oder

$$\int\left(\mu Y\frac{\partial z}{\partial s}-\mu Z\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial t}ds.$$

Man erhält analoge Resultate, wenn man ebenso mit dem zweiten und dem dritten Gliede verfährt. Wir sehen ferner, dass

$$\int\left(\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+F\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}\right)ds=F\frac{\partial x}{\partial t}$$

ist, und dass die Gruppen von dieser Form verschwinden, wenn man das Integral über eine geschlossene Linie ausdehnt.

Der Wert der elektromotorischen Kraft reducirt sich demnach für geschlossene Kreise auf

$$e=\int\left[\left(\mu Y\frac{\partial z}{\partial t}-\mu Z\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\left(\mu Z\frac{\partial x}{\partial t}-\mu X\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial s}\right.$$
$$\left.+\left(\mu X\frac{\partial y}{\partial t}-\mu Y\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial s}\right]ds.$$

Jede der drei Gruppen, welche die Klammer enthält, stellt die elektromotorische Kraft dar, welche in einem gegebenen Augenblicke auf die Längeneinheit parallel zu je einer Achse wirkt. Nimmt man ausserdem an, dass das Feld elektrische Massen mit einem Potential ψ enthält, so sind die allgemeinsten Werte der Componenten P', Q', R' der elektromotorischen Kraft

$$P'=\mu Y\frac{\partial z}{\partial t}-\mu Z\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

(10)
$$Q'=\mu Z\frac{\partial x}{\partial t}-\mu X\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$R'=\mu X\frac{\partial y}{\partial t}-\mu Y\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

572. Gleichungen des elektrischen Feldes. — Wir ziehen schliesslich allgemeiner ein isotropes Feld in Betracht, in welchem gleichzeitig continuirliche Ströme und solche vorhanden sein können, welche einer Aenderung in der elektrischen Verschiebung (**126**) entsprechen.

Nennt man f, g, h die Componenten der elektrischen Verschiebung, so setzen sich die thatsächlich vorhandenen Elektricitätsmengen, die in der Zeiteinheit die zu den bezüglichen Achsen senkrechte Flächeneinheit durchsetzen, u', v', w', aus den continuirlichen Strömen u, v, w (**569**) und den Aenderungen der elektrischen Verschiebung zusammen.

Man erhält dann

$$(11)\qquad \begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial f}{\partial t}, \\ v' &= v + \frac{\partial g}{\partial t}, \\ w' &= w + \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Ströme (4) gehen dann über in

$$(12)\qquad \begin{aligned} 4\pi u' &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ 4\pi v' &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ 4\pi w' &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ist das Mittel dielektrisch, so tritt ein Gleichgewichtszustand zwischen der elektromotorischen Kraft, deren Componenten durch die Gleichung (10) gegeben sind, und den durch die Verschiebung erzeugten elastischen Reaktionen ein. Drückt man durch $\frac{4\pi}{K}$ den Wert des elektrischen Elasticitätscoefficienten in elektromagnetischen Einheiten aus, also das Verhältnis der elektromotorischen Kraft zur Verschiebung, so erhält man

$$(13)\qquad \begin{aligned} KP &= 4\pi f, \\ KQ &= 4\pi g, \\ KR &= 4\pi h. \end{aligned}$$

Wenn es sich dagegen um einen leitenden Körper handelt, dann ist die Verschiebung Null, und wenn man mit c die specifische Leitungsfähigkeit des Mittels bezeichnet, liefert das Ohm'sche Gesetz

$$(14)\qquad \begin{aligned} Pc &= u, \\ Qc &= v, \\ Rc &= w. \end{aligned}$$

Nennt man endlich ρ die Dichte der freien Elektricität in dem betrachteten Punkte, so erhält man in dem Falle eines Dielektricums die Bedingung

$$(15)\qquad \rho + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

und in dem Falle eines Leiters

$$(16)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die zwanzig unter den Nummern (2), (10), (11), (12), (13), (14), (15) und (16) angeführten Gleichungen genügen zur Bestimmung der zwanzig Grössen: F, G, H; P, Q, R; X, Y, Z; u, v, w; f, g, h; u', v', w'; ρ und ψ, wenn man in jedem einzelnen Falle die Bedingungen der Aufgabe kennt.

7. Capitel.

Inductionserscheinungen in nicht linearen Leitern.

573. Rotationsmagnetismus. — In Verfolg einer Beobachtung von Gambey über die Dämpfung der Schwingungen einer Bussole zeigte Arago im Jahre 1824, dass eine über einer schnell rotirenden metallischen Scheibe befindliche Magnetnadel von der Scheibe fortgezogen wird und eine Rotation in derselben Richtung anzunehmen sucht.

Die Wirkung, welche unter diesen Umständen auf einen Magnetpol ausgeübt wird, hat drei Componenten: eine tangentiale, welche den Pol in Richtung der Bewegung fortzieht, eine andere normale, die denselben von der Scheibe zu entfernen sucht, endlich eine dritte, die längs des Radius gerichtet ist. Diese letztere ist Null, wenn der Pol in einer ungefähr zwei Drittel des Scheibenradius gleichen Entfernung liegt; näher an der Achse wird der Pol nach dem Mittelpunkte hingezogen, näher dem Rande scheint derselbe nach diesem hingestossen zu werden.

Die Anziehung tritt bei einem gut leitenden Metall, wie dem Kupfer, deutlicher hervor als bei einem weniger leitenden, wie dem Zink und namentlich dem Antimon. Unterbricht man die Continuität der Scheibe, beispielsweise durch Einschnitte längs der Radien, so sieht man, dass die hervorgerufene Wirkung merklich kleiner wird.

Diese Erscheinungen wurden anfangs einer besonderen Form des Magnetismus zugeschrieben und als *Rotationsmagnetismus* bezeichnet. In Wirklichkeit werden dieselben durch die in dem Metalle erzeugten Inductionsströme hervorgerufen; aber erst nach der grossen Entdeckung von Faraday sind dieselben auf ihre wahre Ursache bezogen worden.

574. Leitende Blätter. — Die durch den Arago'schen Versuch gestellte Aufgabe betrifft die Induction in einem Leiter von zwei Dimensionen. Maxwell*) hat diese Aufgabe in sehr eleganter Weise gelöst, indem er eine Methode anwandte, die derjenigen der elektrischen Bilder analog ist.

*) Die auf den allgemeinen Teil dieses Capitels bezüglichen Rechnungen Maxwell's sind etwas näher ausgeführt von Dr. B. Weinstein in seiner Uebersetzung des Maxwell'schen Buches Bd. II. S. 343 u. ff.

Wir fassen einen homogenen, so dünnen Leiter ins Auge, dass man ihn als auf eine Fläche reducirt ansehen kann, in welchem aus irgend einem Grunde Ströme vorhanden sind, die nicht von aussen durch Elektroden zugeführt werden. Diese Ströme sind notwendig in sich geschlossen, und die Stromlinien können einander nicht schneiden. Der ringförmige Raum zwischen zwei unendlich nahen Stromlinien kann als ein linearer Leiter aufgefasst werden, der von einem Strome von der Intensität $d\Phi$ durchflossen wird. Dieser Strom kann durch ein Blatt von derselben Stärke und derselben Grenzlinie ersetzt werden.

Zerlegt man so die Oberfläche des Leiters durch Stromlinien in unendlich dünne Streifen, so sieht man, dass für einen äusseren Punkt die Gesammtheit der Ströme einem complexen Blatte (**333**) äquivalent ist, dessen magnetische Stärke Φ in jedem Punkte gleich der Summe derjenigen der über einander gelagerten Blätter ist. Auf der positiven Seite des Blattes sind die Ströme entgegengesetzt der Drehungsrichtung der Uhrzeiger gerichtet, und umkreisen die Teile, in denen der Wert von Φ ein Maximum ist. Wenn die Platte begrenzt ist, ist auf der Grenzlinie $\Phi = 0$ zu setzen.

Entlang einer Stromlinie ist der Wert von Φ constant; die Stromlinien sind Niveaulinien der Funktion Φ. Ein Element dn einer gegen die Stromlinien senkrechten Linie n wird von einem Strome von der Intensität $\frac{d\Phi}{dn}\, dn$ geschnitten, der nach der rechten Seite eines Beobachters gerichtet ist, der längs dieser Linie nach den Punkten hin sich bewegt, in welchen die Funktion Φ grösser wird. Endlich wird ein Element ds' einer beliebigen Curve von einem Strome $\frac{\partial\Phi}{\partial s'}\, ds'$ geschnitten, der aber nicht mehr senkrecht gegen dasselbe verläuft.

Das magnetische Potential des Blattes nach aussen wird ausgedrückt durch

$$V = \int \Phi\, d\omega.$$

Diese Funktion ist discontinuirlich, wenn man durch die Fläche geht; die beiden Werte V_1 und V_2, die dieselbe zu beiden Seiten des Blattes, auf der positiven und der negativen Seite (**330**), erhält, sind durch die Beziehung verbunden

$$V_2 - V_1 = 4\pi\Phi.$$

Die zur Oberfläche normale Componente der magnetischen Kraft ist continuirlich, denn dieselbe giebt zu beiden Seiten die magnetische Inductionsströmung für die Flächeneinheit an. Ebenso verhält es sich mit der tangentialen Componente längs einer Stromlinie, für die dann $\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0$ ist.

Die tangentiale Componente dagegen längs einer gegen die Stromlinien senkrechten Linie ist discontinuirlich. und man erhält zu beiden Seiten der Oberfläche.

$$\frac{\partial V_2}{\partial n} = \frac{\partial V_1}{\partial n} + 4\pi \frac{d\Phi}{dn}.$$

Der Wert von V kann auch (**360**) als Funktion des Potentials Q einer Schicht ausgedrückt werden, die dieselbe Oberfläche bedeckt, und deren Dichte in jedem Punkte der Stärke Φ des Blattes gleich ist.

575. Fall eines ebenen Blattes. — Wir betrachten insbesondere eine ebene leitende Platte, die in der xyEbene liegt, und nehmen an, dass die positive Seite der Ströme oben liegt; das Potential des entsprechenden magnetischen Blattes in einem Punkte, dessen Coordinaten x, y und z sind, wird ausgedrückt durch (**362**)

(1) $$V = -\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Die Funktion Q, welche das Potential einer Schicht darstellt, deren Dichte in jedem Punkte gleich der magnetischen Stärke des Blattes ist, ist gegen die xyEbene symmetrisch und ändert sich nicht, wenn man z durch $-z$ ersetzt. Die Funktion V dagegen ändert ihr Zeichen mit z, aber ihr absoluter Wert ist in zwei gegen das Blatt symmetrischen Punkten derselbe. Man erhält demnach für correspondirende Punkte auf der positiven und der negativen Seite

(2) $$V_2 = -\frac{\partial Q}{\partial z} = 2\pi\Phi, \qquad V_1 = -\frac{\partial Q}{\partial z} = -2\pi\Phi.$$

Die den Achsen parallelen Componenten X und Y der magnetischen Kraft und die Werte dieser Componenten X' und Y' auf der negativen Seite sind durch die Gleichungen gegeben

(3) $$X = -\frac{\partial V_2}{\partial x} = -2\pi\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -X', \qquad Y = -\frac{\partial V_2}{\partial y} = -2\pi\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -Y'.$$

576. — Wir untersuchen jetzt die Ströme in der Platte. Die der xAchse parallele Componente u des Stromes, welche eine der Einheit gleiche, der yAchse parallele Länge begrenzt, ist

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

und die der yAchse parallele Componente v des Stromes

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Nennt man σ den Widerstand der Platte für die Einheit der Fläche, dann ist das Gefälle des elektrischen Potentials für eine der Einheit gleiche Länge parallel zur x Achse σu und parallel zur y Achse σv; dieses Potentialgefälle ist nichts anderes als die elektromotorische Kraft nach denselben Richtungen. Man erhält demnach mittels der oben (**568**) für den Fall eines mit der Zeit veränderlichen Feldes gefundenen Ausdrücke

$$-\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial t},$$
$$\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{\partial G}{\partial t}.$$

Für die positive Seite ergeben aber die Gleichungen (2)

$$\Phi=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial z};$$

es folgt daraus

(4)
$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}=-\frac{\partial F}{\partial t},$$
$$-\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}=-\frac{\partial G}{\partial t}.$$

Die allgemeinen Gleichungen (**567**), welche die Componenten der gesammten elektromotorischen Inductionskraft mit dem magnetischen Potential verbinden, liefern im vorliegenden Falle

$$\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial y}=X=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z},$$
$$\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial z}=Y=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial x}=Z=-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}.$$

Diesen Gleichungen wird genügt, wenn man setzt

$$F=-\frac{\partial Q}{\partial y},\quad G=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad H=0.$$

577. — Ist gleichzeitig ein äusseres System von Magneten oder Strömen vorhanden, so weiss man (**498**), dass die Wirkung desselben auf eine Fläche, die es umgiebt, der einer passenden Zusammenstellung von Oberflächenströmen äquivalent ist. Das magnetische Potential dieses Systems kann demnach auf der positiven Seite des Blattes, die wir in Betracht ziehen, durch eine Funktion Q' ausgedrückt werden, die der Funktion Q analog ist; man erhält dann

$$V=-\frac{\partial(Q+Q')}{\partial z},$$

woraus sich ergiebt

$$F = -\frac{\partial(Q+Q')}{\partial y}, \quad G = \frac{\partial(Q+Q')}{\partial x}.$$

Die Gleichungen (4) gehen jetzt, wenn man $\frac{\sigma}{2\pi} = R$ setzt, über in

(5)
$$R\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2(Q+Q')}{\partial y \partial t},$$
$$R\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2(Q+Q')}{\partial x \partial t}.$$

Integrirt man die erstere nach y oder die zweite nach x, so erhält man

(6)
$$R\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial(Q+Q')}{\partial t}.$$

Man müsste zur vollständigen Integration eine willkürliche Funktion von t hinzufügen; aber da diese Funktion immer verschwindet, wenn man eine partielle Ableitung nach x oder y zur Berechnung der Stromcomponenten nimmt, braucht man dieselbe nicht zu berücksichtigen.

578. — Zunächst nehmen wir an, dass kein äusserer magnetischer Körper vorhanden ist, dass also Q' Null ist. Dies wäre der Fall eines in dem Blatte hergestellten und sich selbst überlassenen Stromsystems; diese Ströme würden auf einander durch ihre wechselseitige Induction einwirken und schnell ihre Energie durch die Wirkung des Widerstandes des Leiters verlieren. Die Gleichung

$$R\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

liefert dann

(7)
$$Q = f(x, y, z + Rt).$$

Demnach ist der Wert der Funktion Q zur Zeit t in einem im Abstande z von der Ebene auf der positiven Seite gelegenen Punkte, dessen Coordinaten x, y und z sind, derselbe wie zur Zeit $t = 0$ im Punkte x, y und $z + Rt$.

Es folgt daraus, dass wenn ein System von Strömen in einer unbegrenzten und gleichförmigen Ebene hergestellt und dann sich selbst überlassen ist, die magnetische Wirkung dieser Ströme auf einen auf der positiven Seite gelegenen Punkt dieselbe ist, wie wenn die Ebene sich parallel mit sich selbst längs der Normale nach der negativen Seite mit der constanten Geschwindigkeit R bewegte, während die Ströme auf ihrer ursprünglichen Stärke erhalten bleiben. Die von dem Abfallen der Ströme herrührende Verkleinerung der elektromotorischen Kraft wird genau durch die Schwächung des magnetischen Feldes dargestellt, die in jedem Punkte von dieser gedachten Bewegung hervorgerufen wird.

579. Elektromagnetische Bilder. — Das Integral der Gleichung (6) nach t liefert für die auf der Oberfläche des Blattes liegenden Punkte

$$(8) \qquad Q + Q' = \int R \frac{\partial Q}{\partial z} dt.$$

Nehmen wir an, dass Q und Q' anfangs Null sind, und dass plötzlich das äussere System auf der positiven Seite hergestellt wird, so dass das demselben entsprechende Potential Q' plötzlich von 0 auf Q' übergeht, so erhält man auf der andern Seite und für die Oberfläche des Blattes, da das Integral zur Zeit $t = 0$ Null ist,

$$Q = - Q'.$$

Demnach ruft für alle Punkte der Platte und folglich für alle Punkte, die auf der negativen Seite liegen, das anfangs auf der Platte erzeugte Stromsystem eine Wirkung hervor, die der des wirklich vorhandenen, auf der positiven Seite befindlichen Systems entgegengesetzt gleich ist. Die Wirkung der Ströme ist demnach auf der negativen Seite die nämliche wie die eines mit dem wirklich vorhandenen System identischen magnetischen Systems von entgegengesetztem Zeichen, welches mit demselben zusammenfallen würde.

Für die auf der positiven Seite der Platte liegenden Punkte ist die Wirkung der Ströme die nämliche wie die eines Systems von demselben Zeichen, wie es das wirklich vorhandene System besitzt, welches demselben in Bezug auf die leitende Ebene symmetrisch ist; wir wollen es das *positive Bild* des Systems nennen.

Die Wirkung der Ströme auf beiden Seiten des Blattes kann demnach als von einem positiven oder negativen Bilde des Systems, das heisst einem solchen, welches mit dem System gleiches oder entgegengesetztes Zeichen hat, hervorgerufen betrachtet werden, je nachdem der betrachtete Punkt auf der positiven oder negativen Seite des Blattes liegt.

Wäre die Leitungsfähigkeit des Blattes unendlich, so wäre $R = 0$; die rechte Seite der Gleichung (8) wäre stets Null, und der Bedingung $Q = - Q'$ wäre zu jeder Zeit genügt. Die Platte wäre ein absoluter Schirm (**563**) für alle auf der negativen Seite liegenden Punkte. Die Ströme wären dauernd, und ihre Wirkung wäre in jedem Augenblicke für alle Punkte des Raumes durch die Wirkung des einen oder des andern der beiden unbeweglichen Bilder gegeben.

In einem wirklichen Blatte hat der Widerstand R einen endlichen Wert. Die durch die plötzliche Einführung eines magnetischen Systems hervorgerufenen Ströme fangen sofort an abzunehmen und ihre Wirkung zu beiden Seiten wird in jedem Augenblicke durch die der beiden Bilder des Systems dargestellt, die sich normal zum Blatte auf beiden Seiten mit der Geschwindigkeit R entfernen.

580. Induction eines bewegten magnetischen Systems. — Das Prinzip der Bilder ermöglicht es, die durch die Aenderungen eines beliebigen, auf der positiven Seite des Blattes gelegenen magnetischen Systems inducirten Ströme zu bestimmen.

Die Funktion Q', welche die magnetische Wirkung bestimmt, ändert sich um $\frac{\partial Q'}{\partial t} dt$, während sich das System selbst um $\frac{\partial M}{\partial t} dt$ ändert. Man kann diese letztere Aenderung so auffassen, als ob dieselbe selbst ein magnetisches System wäre und annehmen, dass zur Zeit t auf der negativen Seite des Blattes ein positives Bild von $\frac{\partial M}{\partial t} dt$ entstanden ist, welches sich dann normal mit einer constanten Geschwindigkeit R entfernt. Aendert sich das System stetig, so kann man sich vorstellen, dass die verschiedenen Bilder der Aenderungen, welche den verschiedenen Zeitintervallen entsprechen, sich sogleich nach ihrer Bildung nach demselben Gesetze bewegen und so stetige Züge von Bildern herstellen.

581. Nehmen wir zum Beispiel an, dass ein positiver Pol $+m$ sich auf einer geraden Linie mit einer constanten Geschwindigkeit u parallel

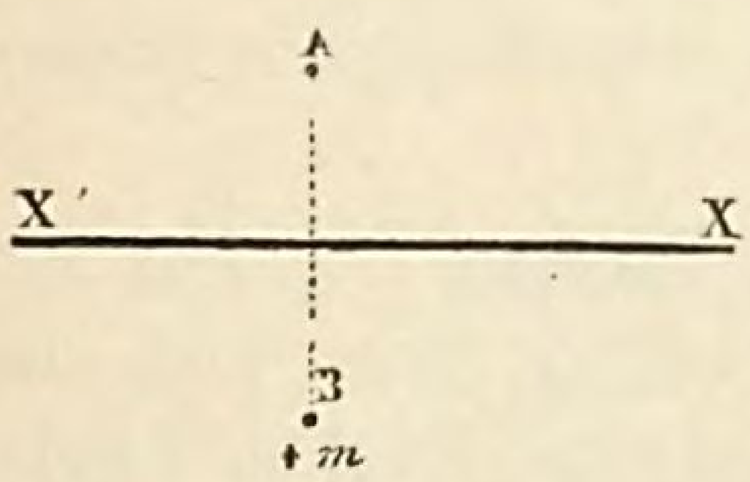


Fig. 120.

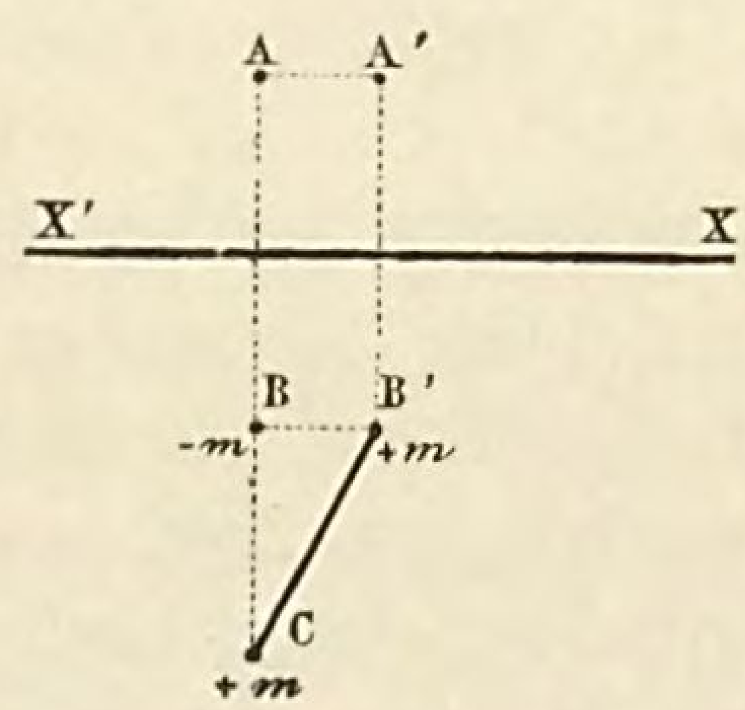


Fig. 121.

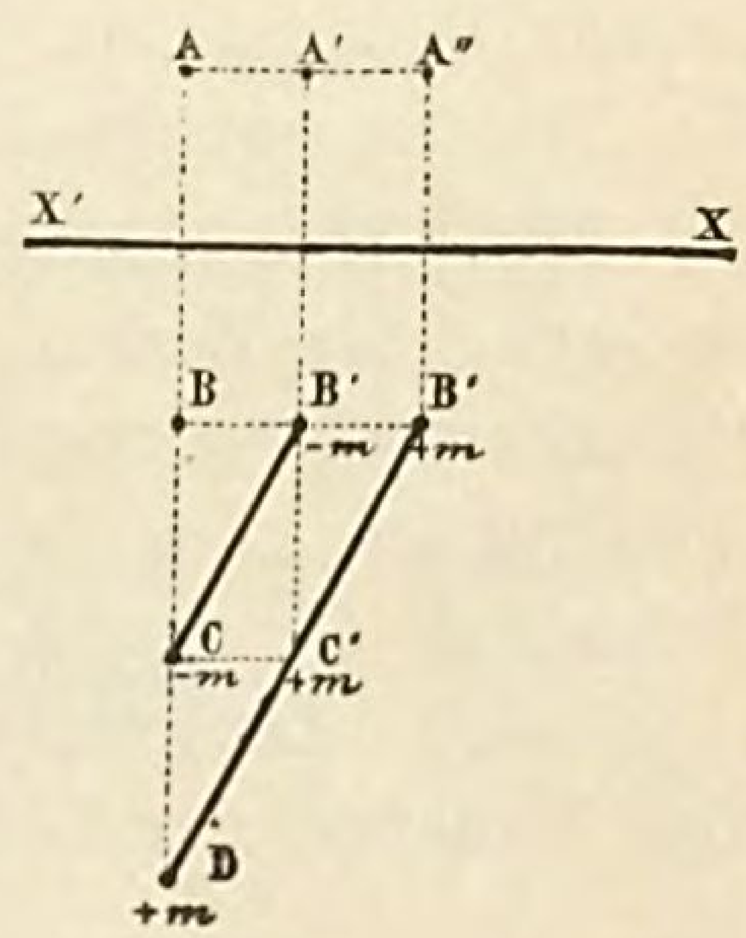


Fig. 122.

einem Blatte bewegt, und setzen voraus, dass dieser Pol plötzlich im Punkte A (Fig. 120) entstanden ist, wodurch in dem symmetrischen Punkte B ein Bild $+m$ hervorgerufen ist, so gelangt nach Verlauf einer unendlich kurzen Zeit δt der Pol nach A' (Fig. 121), im Abstande $u\delta t$ von A: es ist dies so, als ob man plötzlich und gleichzeitig einen Pol $-m$ in A und einen Pol $+m$ in A' einführte, die Bilder von demselben Zeichen in B und B' liefern; aber in diesem Augenblicke ist das erste Bild $+m$, welches sich in B befunden hat, nach C, im Abstande $R\delta t$ von B, gekommen. Zur Zeit $2\delta t$ befindet sich die Masse $+m$ in A'' (Fig. 122), dann sind zwei Bilder gleich $-m$ in C und B' und drei positive Bilder in B'', C' und D vorhanden; u. s. f.

Ist die Bewegung stetig, so sieht man, dass die Wirkung, welche der bewegliche Pol durch die durch seine Bewegung inducirten Ströme erleidet, die zweier magnetischer Linien ist, einer positiven und einer

negativen. Bezeichnet man mit U die Resultante der beiden Geschwindigkeiten $\sqrt{u^2+R^2}$, dann wäre die Dichte dieser beiden Linien $\frac{m}{U\delta t}$ und ihr Abstand $\frac{Ru}{U}\delta t$; das Produkt der Dichte in den Abstand ist demnach $m\frac{Ru}{U^2}\cdot$ Diese beiden Linien bestimmen ein unbegrenztes magnetisches Band, welches von dem der wirklichen Lage des Poles symmetrischen Punkte ausgeht, in der durch die Trajectorie des Poles gehenden Ebene liegt und mit der Ebene des Blattes einen Winkel bildet, dessen Tangente gleich $\frac{u}{R}$ ist.

582. — Beschreibt der Pol $+m$ nicht eine gerade Linie, sondern macht er eine Drehbewegung um eine zum Blatte senkrechte Achse, so braucht man nur anzunehmen, dass das zuletzt besprochene Band auf dem geraden Cylinder, dessen Grundfläche der von dem Pole beschriebene Kreis ist, eine Spirale bildet.

Für einen auf seine beiden Pole reducirten Magnet, der sich um seinen Mittelpunkt dreht, sind die inducirten Ströme ebenfalls dem zweier auf denselben Cylinder gewickelter magnetischer Bänder äquivalent. Endlich sind die durch Verschiebung irgend eines magnetischen Systems, welches sich gleichförmig bewegt, erzeugten Ströme einer Zusammenfassung von magnetischen Bändern äquivalent, die Punkt für Punkt den verschiedenen Massen des Systems entsprechen.

583. Berechnung der Wirkung der inducirten Ströme. — Zur Berechnung der Wirkung dieser Bilder bezeichnen wir mit Q_τ den Wert des Potentials Q, welcher durch die Ströme des Blattes in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, $z+R\tau$ sind, zur Zeit $t-\tau$, mit Q'_τ den Wert des Potentials Q', welcher durch das magnetische System in dem Punkte $x, y, -(z+R\tau)$ zu derselben Zeit $t-\tau$ bestimmt ist. Da das Potential Q_τ eine Funktion der Coordinaten x, y, $z+R\tau$ und von $t-\tau$ ist, erhält man

$$\frac{\partial Q_\tau}{\partial \tau}=R\frac{\partial Q_\tau}{\partial z}-\frac{\partial Q_\tau}{\partial t}. \tag{9}$$

Wendet man Gleichung (6) auf diese Funktion an, so resultirt

$$\frac{\partial Q_\tau}{\partial \tau}=\frac{\partial Q'_\tau}{\partial t}.$$

Durch Integration dieser Gleichung nach τ zwischen den Grenzen $\tau=0$ und $\tau=\infty$ erhält man den Wert der Funktion Q für den Zeitpunkt t, woraus sich ergiebt

$$Q=\int_0^\infty \frac{\partial Q'_\tau}{\partial t}dt=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty Q'_\tau d\tau. \tag{10}$$

Die Funktion Q, von welcher die Lösung der Aufgabe abhängt, da dieselbe in jedem Punkte die Berechnung der Wirkung der inducirten Ströme

gestattet, wird so durch die Funktion Q'_τ bestimmt, welche in jedem Augenblicke durch den Zustand und die Bewegung des äusseren magnetischen Systems definirt ist.

584. Fall eines einzigen Poles. — Man kann diese Berechnungsweise auf den oben behandelten Fall eines einzigen Poles von der Masse m anwenden, der sich geradlinig und gleichmässig in Gegenwart einer unbegrenzten leitenden Ebene bewegt; aber es ist einfacher, die Aufgabe mittels der Betrachtung der magnetischen Bilder direkt zu behandeln.

Wir untersuchen zunächst die Wirkung, die eine homogene gerade Linie von der Dichte λ, die längs der Geraden XX' (Fig. 123) liegt, auf einen Punkt A ausübt. Die Wirkung eines Elementes MM' oder ds im Abstande r vom Punkte A ist gleich $\frac{\lambda ds}{r^2}$. Bezeichnen wir mit $d\alpha$ den Winkel zwischen den beiden Strahlen AM und AM' und fällen die beiden

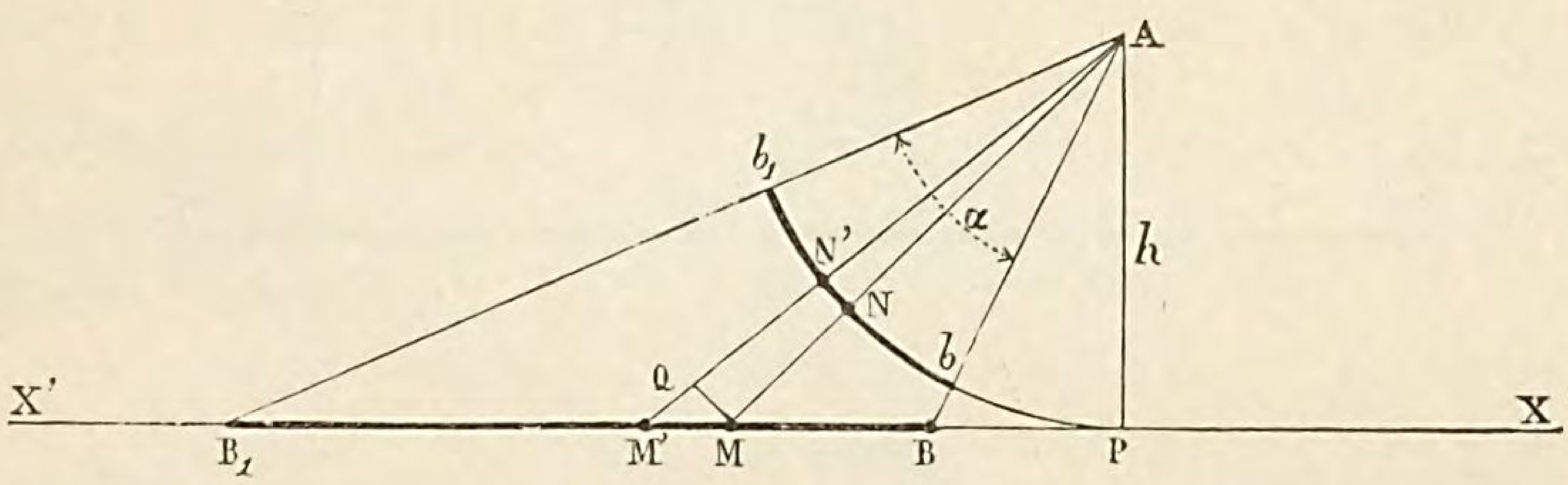


Fig. 123.

Lote MQ auf AM' und AP oder h auf XX', so erhält man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke APM und MQM' die Beziehung

$$\frac{MQ}{MM'} = \frac{AP}{AM} \quad \text{oder} \quad \frac{r d\alpha}{ds} = \frac{h}{r};$$

es folgt hieraus

$$\frac{\lambda ds}{r^2} = \lambda \frac{d\alpha}{h} = \lambda \frac{h d\alpha}{h^2} = \lambda \frac{NN'}{h^2}.$$

Die Wirkung des Elementes ds auf den Punkt A ist demnach gleich der des Elementes NN' des Kreises vom Radius h, wenn dieses dieselbe Dichte λ besässe, oder der des entsprechenden Elementes des Kreises vom Radius 1, wenn dasselbe die Dichte $\frac{\lambda}{h}$ besässe. Wird die betrachtete Linie von den Punkten B und B_1 begrenzt, so ist ihre Wirkung gleich der des Kreisbogens bb_1. Man sieht leicht, dass diese letztere Wirkung f der Länge der Sehne proportional ist, woraus sich ergiebt

$$f = \frac{\lambda}{h^2} 2h \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\lambda}{h} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

585. — Wir setzen jetzt voraus, dass ein beweglicher Pol mit der Masse m, der sich geradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit u bewegt und bereits seit unendlicher Zeit vor dem untersuchten Zeitpunkt in Bewegung ist, sich im Punkte A, in einer Entfernung c vom leitenden Blatte XX' (Fig. 124) befindet, und aus einer solchen Richtung A_1A kommt, dass er das Blatt noch nicht durchschnitten hat. θ sei der Winkel dieser Richtung mit der Normale N des Blattes.

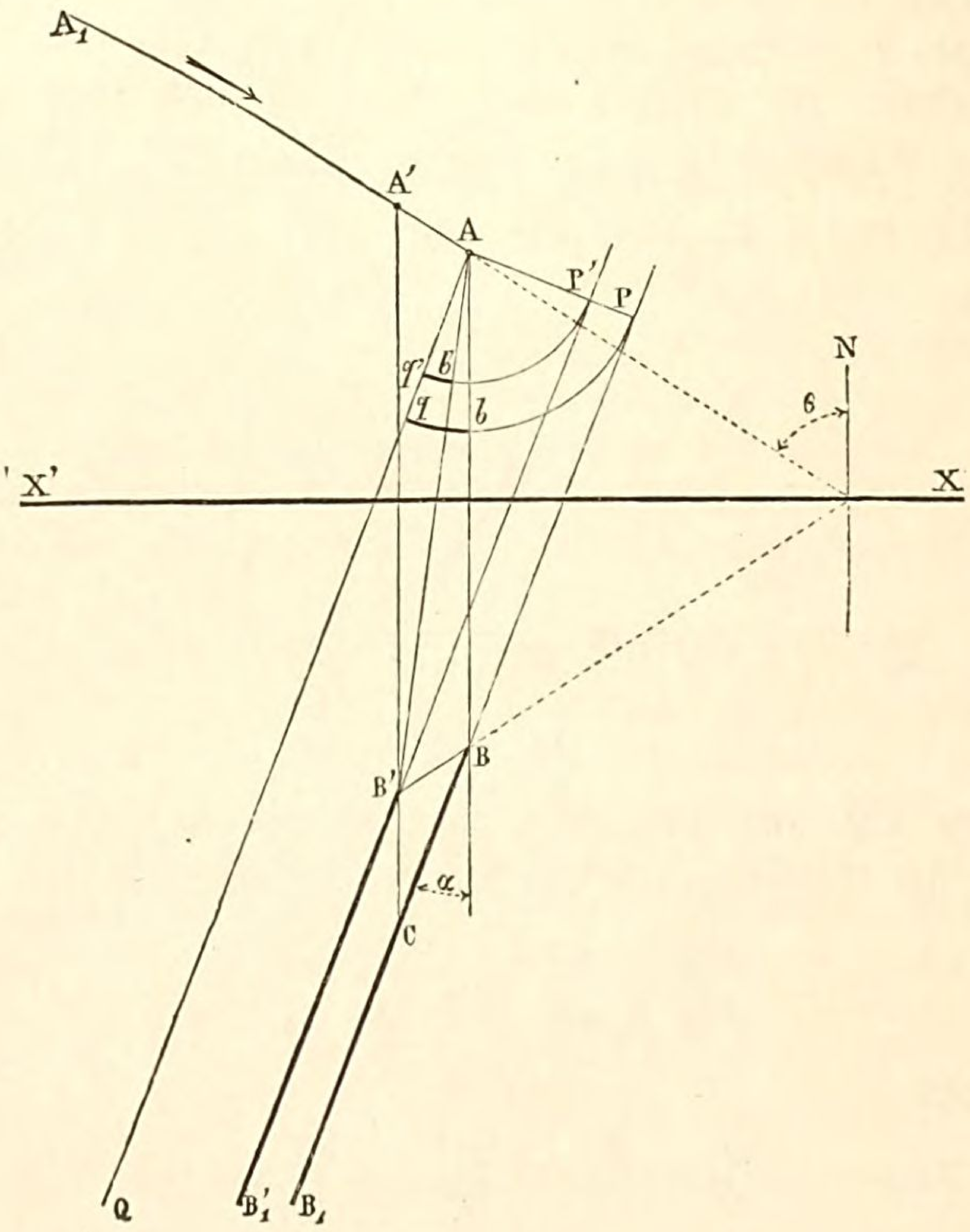


Fig. 124.

Der Winkel α, den die Wege B'_1B' und B_1B der magnetischen Bilder, die sich auf zwei einander folgende Lagen A' und A des Poles beziehen, mit der Normale bilden, ist durch das Dreieck $BB'C$ bestimmt, welches ergiebt

$$U^2 = R^2 + u^2 + 2Ru \cos \theta,$$

$$\sin \alpha = \frac{u \sin \theta}{U}.$$

Der Abstand der beiden Linien längs $B'B$ ist $u\delta t$ und längs des gemeinsamen Lotes $R\delta t \sin\alpha$. Endlich ist die Dichte auf jeder einzelnen bez.

$$\lambda = \mp \frac{m}{U\delta t}.$$

Legen wir die Gerade AQ parallel zu den Wegen der magnetischen Bilder, nennen wir α und α' die Winkel der Kreisbogen bq und $b'q'$, die diesen Wegen entsprechen, h und h' die Lote AP und $A'P'$, so sind die Wirkungen f und f' dieser beiden Linien beziehungsweise längs der Winkelhalbirenden von α und α' gerichtet, und zwar in entgegengesetztem Sinne; sie bilden demnach mit der Normale Winkel, die beziehungsweise gleich $\frac{\alpha}{2}$ und $\alpha - \frac{\alpha'}{2}$ sind, und man erhält (584)

$$f = \frac{2m}{Uh\delta t} \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$f' = \frac{2m}{Uh'\delta t} \sin\frac{\alpha'}{2}.$$

Die Componenten Z und X der resultirenden Kraft, die wir normal und parallel zum Blatte annehmen, und zwar die erste nach oben, die andere in Richtung der Bewegung des beweglichen Poles, sind

$$Z = f\cos\frac{\alpha}{2} - f'\cos\left(\alpha - \frac{\alpha'}{2}\right) = \frac{m}{U\delta t}\left[\frac{\sin\alpha}{h} - \frac{2\sin\frac{\alpha'}{2}\cos\left(\alpha - \frac{\alpha'}{2}\right)}{h'}\right],$$

$$X = f\sin\frac{\alpha}{2} - f'\sin\left(\alpha - \frac{\alpha'}{2}\right) = \frac{2m}{U\delta t}\left[\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{h} - \frac{\sin\frac{\alpha'}{2}\sin\left(\alpha - \frac{\alpha'}{2}\right)}{h'}\right].$$

Nun ist ausserdem

$$h = 2c\sin\alpha,$$

$$h' = h - R\sin\alpha\delta t = h\left(1 - \frac{R\sin\alpha}{h}\delta t\right) = h\left(1 - \frac{R}{2c}\delta t\right),$$

oder unter Fortlassung von Grössen zweiter Ordnung

$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{R}{2c}\delta t\right).$$

Das Dreieck ABB' giebt auch

$$\frac{\alpha - \alpha'}{u\delta t} = \frac{\sin\theta}{2c},$$

oder

$$\alpha' = \alpha - \frac{u\sin\theta}{2c}\delta t = \alpha - \frac{U\sin\alpha}{2c}\delta t.$$

Setzt man diese Werte von h' und von α' in die Ausdrücke der Componenten ein, und lässt man Grössen zweiter Ordnung fort, so erhält man

$$Z = \frac{m}{4c^2}\frac{U-R}{U},$$
$$X = -\frac{m}{4c^2}\frac{R}{U}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Die Kraft selbst bildet mit der Scheibe einen Winkel β, der durch die Bedingung bestimmt ist

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{Z}{-X} = \frac{U-R}{R}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Die inducirten Ströme wirken demnach der Bewegung des Poles, wie vorauszusehen war, entgegen, aber sie ist derselben nicht direkt entgegengesetzt.

Ist die Bewegung des Poles normal gegen das Blatt gerichtet, so erhält man $\theta = 0$, $\alpha = 0$ und $U = R + u$; es ergiebt sich dann

$$Z = \frac{m}{4c^2}\frac{u}{R+u},$$
$$X = 0.$$

Die Wirkung ist die nämliche wie die einer einzigen Masse gleich $m\frac{u}{R+u}$, die in jedem Augenblicke in dem zur Lage des Poles symmetrischen Punkte B liegt, oder einer Masse $\frac{m}{4}\frac{u}{R+u}$, die sich im Fusspunkte des vom Pole auf die Ebene gefällten Lotes befindet.

Wird der Pol parallel zur Platte verschoben, so erhält man

$$U^2 = R^2 + u^2, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{u}{R},$$

woraus sich ergiebt

$$Z = \frac{m}{4c^2}\frac{u^2}{U(R+U)}, \quad F = \frac{mu}{4c^2(R+U)},$$
$$X = -\frac{m}{4c^2}\frac{uR}{U(R+U)}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{u}{R} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Die Kraft ist demnach senkrecht zur Richtung der Wege der magnetischen Bilder; sie ist die nämliche, wie wenn in der Scheibe in der Projection der Bewegungsrichtung eine Masse gleich $\frac{m}{4}\frac{U^2}{(R+U)u}$ vorhanden wäre.

Man kann sich auch noch vorstellen, dass die Kraft F von einem unendlich kleinen in der Ebene gelegenen Magnet erzeugt ist. Wendet man zum Beispiel die Gauss'schen Formeln (**154**) an, so findet man, dass der

Magnet hinter der Projection des Poles liegt in einem Abstande von demselben, der gegeben ist durch die Gleichung

$$x = \frac{3cR}{4u}\left(\sqrt{1 + \frac{8u^2}{9R^2}} - 1\right),$$

wenn die Magnetisirung der Richtung der Bewegung parallel ist. Das Moment dieses Magnets wäre dann leicht zu berechnen.

Die Componente X ist ein Maximum für einen gegebenen Wert von R, wenn $u = 1{,}27 R$ ist; dieselbe ist Null für $R = 0$ und $R = \infty$.

Die Componente Z sucht den Pol von der Platte zu entfernen; dieselbe wächst mit der Geschwindigkeit und nähert sich dem Werte $\frac{1}{4c^2}$, wenn die Geschwindigkeit ins Unendliche zunimmt.

586. In dem Falle einer geradlinigen und gleichförmigen, der Ebene parallelen Bewegung kann man die Erscheinungen noch in anderer Weise behandeln.

Das magnetische Band, welches vom Punkte B (Fig. 125) ausgeht,

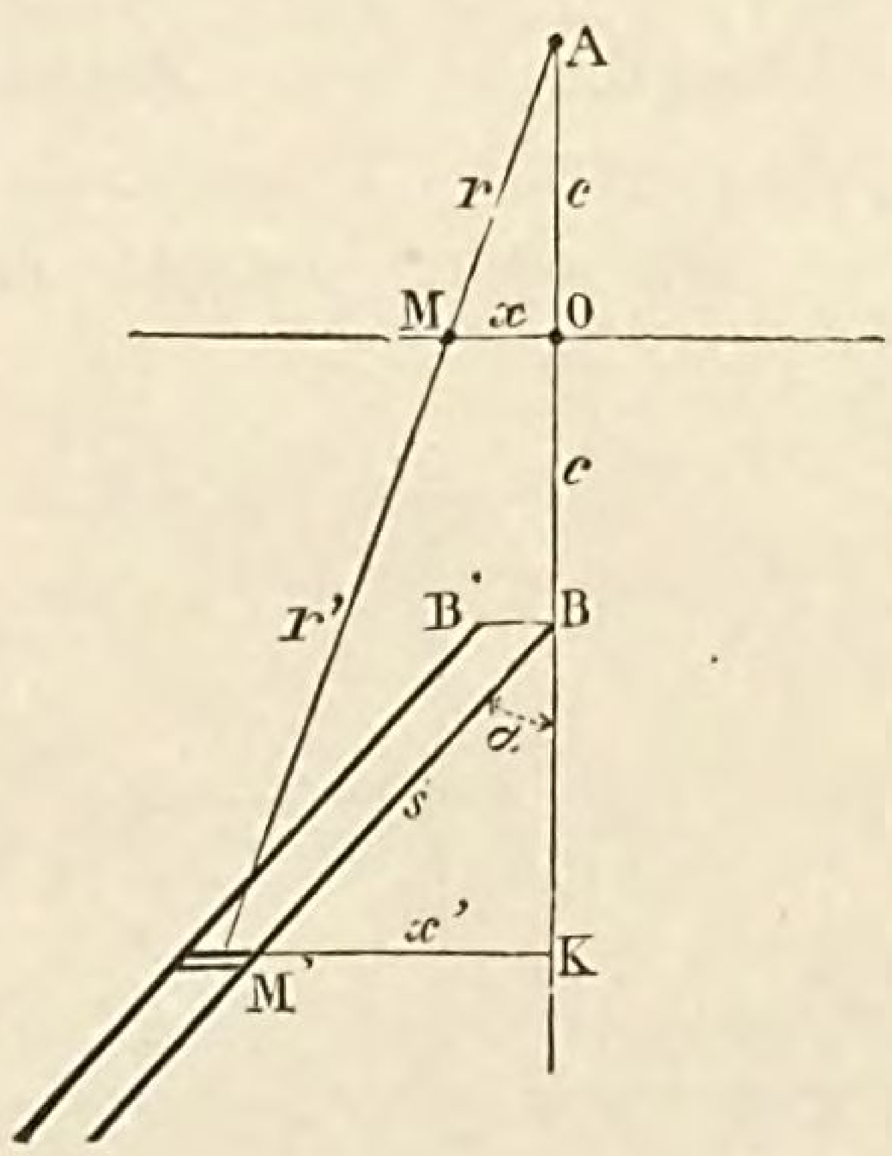


Fig. 125.

wird von zwei magnetischen Linien gebildet, deren Dichte $\frac{m}{U\delta t}$ und deren horizontaler Abstand von einander $u\delta t$ ist.

Bezeichnen wir mit s den Abstand $M'B$ des Punktes B von einem beliebigen Punkte M' und mit x' den Abstand $M'K$, so ist für ein Element ds des Bandes das magnetische Moment ϖ'

$$\varpi' = m\frac{u}{U}ds = mds \sin\alpha.$$

Da $x' = s \sin\alpha$ ist, ergiebt sich $\varpi' = mdx'$.

Die Wirkung dieses unendlich kleinen in M' befindlichen Magnets auf den Punkt A im Abstande r' ist der eines unendlich kleinen in M im Abstande r befindlichen Magnets vom Momente ϖ äquivalent, der so beschaffen ist, dass

$$\frac{\varpi}{r^3} = \frac{\varpi'}{r'^3} = \frac{mdx'}{r'^3}.$$

Nennt man x und c die Abstände MO und AO, so ist

$$\frac{r}{r'} = \frac{x}{x'} = \frac{c}{2c + x' \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{c - x \operatorname{ctg} \alpha}{2c}.$$

Es folgt daraus

$$\omega = \frac{m}{4} \frac{c - x \operatorname{ctg} \alpha}{c} dx.$$

Man sieht, dass die Wirkung der inducirten Ströme auf den Punkt A der eines complexen Solenoides (**327**) äquivalent ist, welches auf der Scheibe liegt, vom Punkte O ausgeht, in einer der Bewegung entgegengesetzten Richtung verläuft, und dessen Magnetisirungsintensität in jedem Punkte ist

$$\frac{\omega}{dx} = \frac{m}{4} \frac{c - \operatorname{ctg} \alpha}{c}.$$

Man würde so für die Kraftcomponenten X und Z dieselben Werte wie vorher finden.

587. Versuche von Arago. — Diese Methode kann verallgemeinert werden. Nehmen wir an, dass der Pol einen Kreis vom Radius a beschreibt in einer Richtung, welche von oben gesehen derjenigen der Uhrzeiger

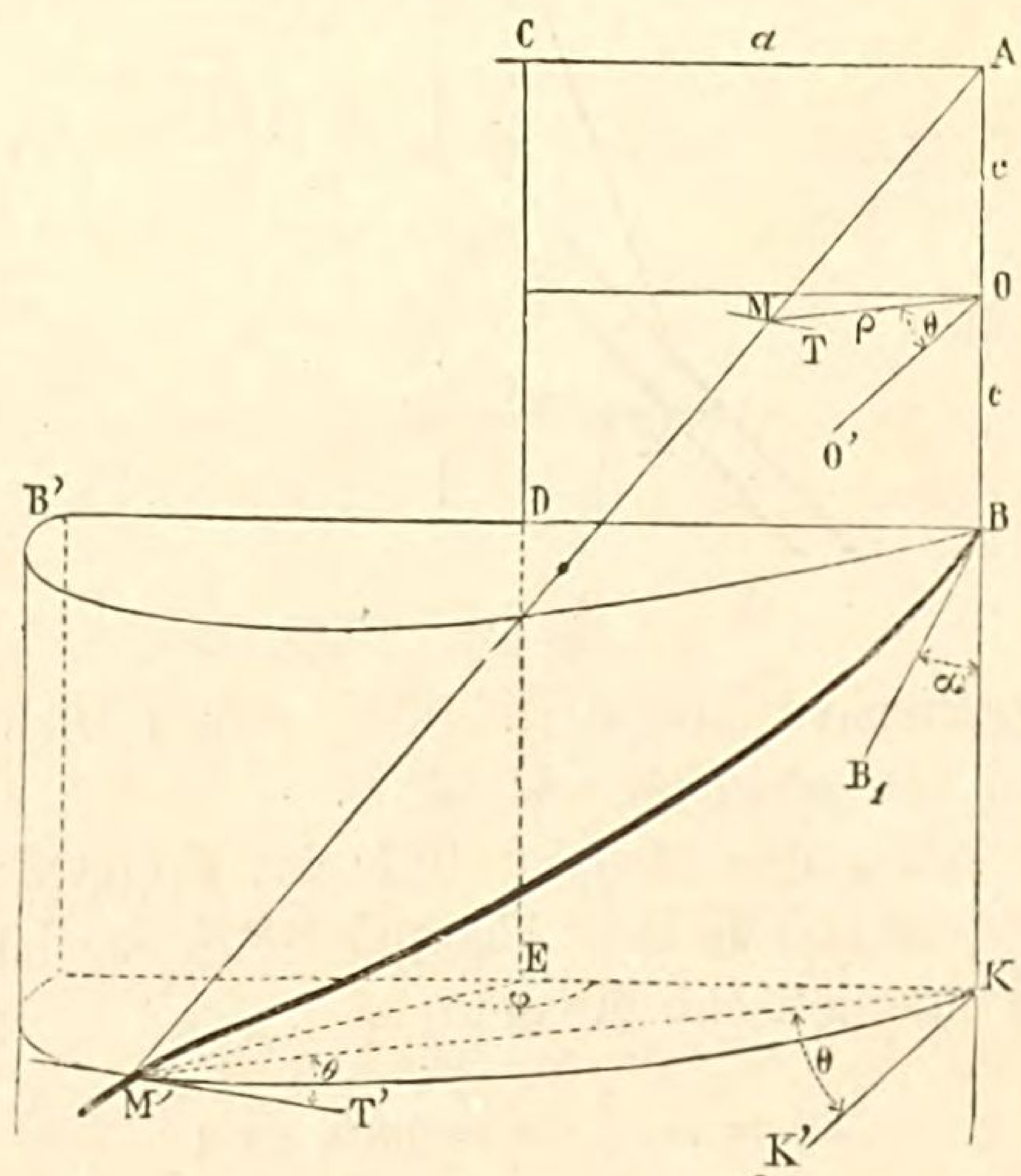


Fig. 126.

entgegengesetzt ist, so ist die Wirkung der inducirten Ströme die zweier homogener Spiralen von entgegengesetztem Zeichen oder eines spiraligen Bandes BM' (Fig. 126), welches auf einen Cylinder aufgewickelt ist, dessen Achse die Rotationsachse ist, und das durch den Pol geht. Jedes Element dieser Spirale ist längs einer Tangente des Cylinders magnetisirt, die senk-

recht zur Achse gelegt ist, und seine Wirkung auf den Pol ist mit der eines unendlich kleinen in einem Punkte M in der Leiterebene liegenden Magnets gleichwertig. Der Ort der Punkte M ist die perspectivische Curve der vom Punkte A aus gesehenen Spirale. Bezeichnet man mit ρ den Radius-Vector MO, mit θ den Winkel, den derselbe mit der Tangente im Punkte O bildet, und berücksichtigt man, dass dieser Winkel θ die Hälfte des Winkels φ der beiden Ebenen ist, die durch die Achse und bez. durch die Punkte B und M' gehen, so erhält man durch die Dreiecke AMO und $AM'K$

$$\frac{\rho}{c} = \frac{M'K}{AK} = \frac{2a \sin\frac{\varphi}{2}}{2c + a\varphi \operatorname{cotg} \alpha} = \frac{a \sin\theta}{c + a\theta \operatorname{cotg} \alpha}.$$

Diese perspectivische Curve besteht aus einer Reihe von geschlossenen Ringen, die im Punkte O eine gemeinsame Tangente besitzen.

Da der Bogen KM' gleich $a\varphi$ oder $2a\theta$ ist, ist das magnetische Moment ϖ' des Elementes der Spirale in M' $2mad\theta$. Das magnetische Moment des entsprechenden Magnets in M ist durch die Beziehung gegeben

$$\frac{\varpi}{r^3} = \frac{\varpi'}{r'^3} = \frac{2ma}{r'^3} d\theta.$$

Beachten wir, dass

$$\frac{r}{r'} = \frac{MO}{M'K} = \frac{\rho}{2a \sin\theta}$$

ist, so folgt

$$\varpi = \frac{m}{4a^2} \frac{\rho^3 d\theta}{\sin^3\theta}.$$

Der Magnet ϖ im Punkte M ist der Magnetisirung der Spirale in M' parallel; dieselbe bildet demnach mit dem Radius-Vector ρ der perspectivischen Curve den Winkel θ.

Die Berechnung der Kraft in A wäre sehr complicirt, aber es ist klar, dass die Curventeile, welche dem ersten Teile BM' der Spirale entsprechen, vorherrschen. Nach der Richtung der Elementarmagnete auf der perspectivischen Curve sieht man, dass die Wirkung auf den Punkt A eine verticale Componente besitzt, eine andere der Geschwindigkeit des Poles direkt entgegengesetzte und eine dritte, welche nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet ist, den derselbe beschreibt. Das ganze System ist auch einem kleinen hinter dem Punkte O senkrecht zu einem Radius der Scheibe auf der der Bewegung entgegengesetzten Seite, der mit dem dem Pole entsprechenden Radius einen gewissen Winkel bildet, gelegenen Magnete äquivalent, wenn die Magnetisirung die Richtung der Bewegung hat, und wenn der betrachtete Pol ein Nordpol ist.

Wäre die Scheibe unbegrenzt, so läge dieser Magnet in einem Abstande von der Achse, der grösser ist als der des Poles; aber die Einwirkung der

Ränder bringt ihn um so mehr nach dem Mittelpunkte hin, je kleiner der Radius wird. Man findet so alle Einzelheiten des Arago'schen Versuches wieder, unter anderem die Thatsache, dass die radiale Componente centripetal ist, wenn der Pol von dem Rande weit abliegt, und dass dieselbe centrifugal wird, wenn er sich demselben nähert.

588. — Beschreibt der Pol eine beliebige, zur Scheibe parallele Curve, so erhält man ebenso durch Construction der entsprechenden magnetischen Bilder die Magnetisirung der perspectivischen Curve in jedem Punkte. Die Wirkung auf den Punkt A in dem Falle einer unbegrenzten Ebene hat noch eine verticale Componente, eine andere der Bewegung direkt entgegengesetzte und eine dritte zur Trajectorie des Poles normale, nach der concaven Seite der Curve hin gerichtete.

589. Dämpfung der Bussolen. — Die Wirkung einer leitenden Platte auf ein in Bewegung befindliches magnetisches System wird in den Bussolen und Galvanometern zur Dämpfung der Schwingungen der Nadeln benutzt, in derselben Form, in der die Erscheinung zuerst von Gambey entdeckt worden ist.

Diese gegenseitige Einwirkung ist einer Art von Reibung äquivalent, die sich der relativen Bewegung der beiden Systeme entgegenstellt; es folgt daraus eine Absorption von Energie, welche genau der Erwärmung des Leiters durch die inducirten Ströme entspricht.

590. Induction auf einen beliebigen Leiter. — Allgemeiner entstehen, wenn ein Leiter von beliebiger Form in einem magnetischen Felde verschoben wird, inducirte Ströme, die der Bewegung Widerstand leisten: aber die Berechnung der Inductionswirkungen bietet dann die grössten Schwierigkeiten, weil man die drei Dimensionen des Leiters in Rechnung ziehen muss. Faraday hat so gefunden, dass, wenn man zwischen die Pole eines nicht erregten Elektromagnets einen an einem Draht aufgehängten Kupferwürfel bringt und denselben in eine schnelle Rotationsbewegung versetzt, der Würfel plötzlich stehen bleibt, sobald man einen Strom durch die Spulen schickt, und dass man einen grossen Widerstand bemerkt, wenn man ihn wieder in Bewegung setzen will.

Foucault kam auf den Gedanken, diesen Versuch zu benutzen, um die Erwärmung der Leiter zu demonstriren. Mittels eines Systems von Zahnrädern, die durch eine Kurbel getrieben werden, unterhält er die Rotation einer Leiterscheibe zwischen den Armen eines sehr kräftigen Elektromagnets: die aufgewandte Arbeit ist beträchtlich, und die Temperatur der Scheibe hebt sich schnell. Das Maass der aufgewandten Arbeit und der entsprechenden Wärme liefert selbst ein Mittel zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents; dies ist das Prinzip der von Violle angewandten Methode.

8. Capitel.

Optische Erscheinungen.

591. Entdeckung von Faraday. — Nach zahlreichen Versuchen, die lange erfolglos geblieben waren, entdeckte Faraday im Jahre 1845, dass ein durchsichtiger Körper, der von selbst keine Drehkraft besitzt, unter dem Einfluss des Magnetismus fähig wird, die Polarisationsebene der Lichtstrahlen zu drehen. Die Wirkung ist am grössten, wenn der polarisirte Strahl parallel zu den Kraftlinien durch den Körper geht; sie ist Null, wenn die beiden Richtungen gegen einander rechtwinklig sind.

Diese Erscheinung, die zuerst am schweren Flintglas beobachtet ist, tritt mit verschiedenen Intensitäten bei allen flüssigen und den einfach brechenden festen Körpern auf; die Einwirkung des Magnetismus ist bei den doppelbrechenden Körpern weniger merklich; dieselbe ist äusserst schwach bei den Gasen und Dämpfen, und erst in den jüngsten Versuchen ist man dazu gelangt, sie überhaupt zu constatiren. Die ihrer eigenen Natur nach mit der Drehkraft behafteten Körper zeigen dieselbe Erscheinung: die beiden Drehungen addiren sich und ziehen sich von einander ab, je nach ihrer eigenen Richtung.

592. Positive und negative Körper. — Alle von Faraday untersuchten Substanzen drehen die Polarisationsebene unter dem Einflusse des Magnetismus in demselben Sinne; und zwar ist die Richtung der Drehung diejenige, die ein um den Strahl fliessender Strom haben müsste, um ein magnetisches Feld zu erzeugen, welches die Richtung des thatsächlich vorhandenen Feldes hat. Alle diese Substanzen sind aber diamagnetisch. Verdet hat gefunden, dass die meisten magnetischen Substanzen, zum Beispiel Lösungen von Eisen-Chlorid in Weingeist oder Aether, die Polarisationsebene in entgegengesetztem Sinne drehen. Fasst man die erste Drehung als positiv auf, so kann man sagen, dass im Allgemeinen, wenn nicht immer, die diamagnetischen Substanzen die Polarisationsebene in positivem Sinne, die magnetischen Substanzen in negativem Sinne drehen.

593. — Es besteht ein wichtiger Unterschied in der Art, wie die Drehung der Polarisationsebene erfolgt, je nachdem man die natürliche oder

die magnetische Drehung betrachtet. In beiden Fällen ist der Drehungswinkel, wenn alles Uebrige gleich ist, der durchsetzten Dicke des Mittels proportional; aber im Quarz, in der Zuckerlösung, im Terpentinöl steht die optische Drehung stets mit der Fortpflanzung des Lichtes in solcher Verbindung, dass dieselbe immer in demselben Sinne für den Beobachter erfolgt, der den Strahl empfängt. Es folgt daraus, dass wenn der Strahl, nachdem er durch die durchsichtige Substanz gegangen ist, infolge einer normalen Reflexion auf seinen Weg zurückkommt, derselbe bei der Rückkehr eine gleiche der ersten entgegengesetzte Drehung erleidet, und dass die Polarisationsebene in ihrem Ausgangspunkte in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt.

Die magnetische Rotation dagegen ist von der Richtung der Fortpflanzung unabhängig und hängt nur von der Richtung der magnetischen Kraft ab. Der Strahl, der nach einer normalen Reflexion auf seinen Weg zurückgelangt, erleidet eine Drehung von derselben absoluten Richtung, die sich zur ersten addirt; man kann so dadurch, dass man einen Strahl eine ungerade Anzahl $(2n + 1)$ Mal senkrecht reflektiren lässt, dieselbe Drehung beobachten, wie wenn derselbe durch eine $(2n + 1)$ Mal so grosse Dicke der Substanz gegangen wäre.

594. Gesetze von Verdet. — Verdet hat durch den Versuch gezeigt, dass für einen homogenen, polarisirten Strahl die Drehung der Polarisationsebene proportional ist:

1. der durchsetzten Dicke der Substanz,
2. der Componente der magnetischen Kraft in Richtung des Strahles,
3. einem Coefficienten, der von der Natur des Körpers abhängt, und welcher positiv oder negativ ist, je nachdem der Körper diamagnetisch oder magnetisch ist.

Diese Gesetze können in folgendem Satze zusammengefasst werden:

Die Drehung der Polarisationsebene zwischen zwei Punkten ist der Differenz der magnetischen Potentiale, die in den beiden Punkten herrschen, proportional.

Sind V und V' die Werte des Potentials in zwei auf dem Wege des Strahles angenommenen Punkten A und A', so wird der Winkel θ, um welchen sich die Polarisationsebene zwischen diesen beiden Punkten gedreht hat, ausgedrückt durch die Beziehung

$$\theta = \omega(V - V'),$$

wenn ω die Drehung ist, welche für die betrachtete Substanz einer der Einheit gleichen Potentialdifferenz entspricht. Diese Grösse ist als *Verdetsche Constante* bekannt; sie definirt die magnetische Drehkraft des Körpers.

Verdet hat gezeigt, dass, wenn ein Salz in Wasser gelöst ist, das Wasser und das Salz einzeln in die Lösung ihre eigene magnetische Drehkraft bringen; die von der Lösung hervorgerufene Drehung ist die algebraische Summe der von den einzelnen sie bildenden Körpern herrührenden Drehungen. So dreht eine Lösung von Eisen-Chlorid, da die Drehkraft des

Wassers positiv, die des Eisen-Chlorids negativ ist, die Polarisationsebene in der einen oder anderen Richtung je nach der Concentration der Lösung. Das Gesetz gilt allgemein.

595. Dispersion durch magnetische Drehung. — Für denselben Körper ändert sich der Wert der Constante ω mit der Wellenlänge. Der Sinn der Aenderung ist derselbe wie bei der natürlichen Drehung, denn in beiden Fällen ist die Drehung nahezu dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional. In Wirklichkeit wird das Produkt der Drehung in das Quadrat der Wellenlänge immer grösser, je kleiner die Wellenlänge wird. In beiden Fällen, ob es sich um die natürliche oder um die magnetische Drehung handelt, sind die Substanzen, für welche dieser Zuwachs am bemerkbarsten ist, diejenigen, welche die grösste zerstreuende Kraft besitzen.

Einige Monate nach den Entdeckungen Faraday's bemerkte George Airy, dass man von diesen Erscheinungen Rechenschaft geben kann, wenn man nur zu den bekannten Gleichungen für die schwingenden Bewegungen in isotropen Körpern gewisse den Ableitungen ungerader Ordnung der Verschiebungen nach der Zeit proportionale Glieder hinzufügt. Unter den verschiedenen Formeln, zu denen man durch besondere Annahmen über die Natur der den Gleichungen hinzuzufügenden Glieder gelangt, zeigt die folgende, von Maxwell gefundene

$$\omega = m \frac{n^2}{\lambda^2}\left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right),$$

in der m eine Constante und n den Brechungscoefficienten der Substanz für einen Strahl von der Wellenlänge λ bezeichnet, eine fast vollkommene Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Die Constante m ist dabei, wie wir später sehen werden, der magnetischen Permeabilität umgekehrt proportional.

H. Becquerel hat bemerkt, dass der Quotient der Drehkraft durch das Produkt $n^2(n^2 - 1)$ sehr wenig für die verschiedenen Substanzen variirt, und dass dieser Quotient für alle Körper derselben chemischen Familie denselben Betrag hat.

596. Versuch von Kerr. — Wird ein polarisirter Lichtstrahl an dem Pole eines Magnets reflectirt, so erleidet nach den Versuchen von Kerr seine Polarisationsebene eine deutliche Drehung; es ist vorteilhaft die Reflexion senkrecht erfolgen zu lassen, um die Wirkungen der elliptischen Polarisation zu vermeiden. Auf einem positiven Pol, Nordpol, erfolgt die Drehung für den Beobachter von links nach rechts, also entgegengesetzt der Richtung des Stromes, welcher die Magnetisirung erzeugen würde. Es ist schwierig zu entscheiden, ob dies eine einfache von dem den Pol umgebenden Gase hervorgerufene magnetische Drehung ist, oder, wie Kerr glaubt, eine neue Erscheinung.

597. Erklärung der Drehung der Polarisationsebene. — Die Principien der von Fresnel angegebenen Theorie zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene im Quarz und in den activen Flüssigkeiten können auf die magnetische Drehung der Polarisationsebene übertragen werden.

Man weiss, dass ein in einer Ebene polarisirter Lichtstrahl zwei in entgegengesetzten Richtungen kreisförmig polarisirten Strahlen von gleicher Periode äquivalent ist, die sich mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen, und deren Schwingungsamplitude um die Hälfte kleiner ist als die der resultirenden geradlinigen Schwingung.

Um sich jeden dieser einzelnen kreisförmig polarisirten Strahlen vorzustellen, kann man annehmen, dass man, während sich alle Moleküle einer Geraden von ihrer Gleichgewichtslage entfernt und auf einer Schraubenlinie verteilt haben, deren Achse diese Gerade ist, dem System eine gleichförmige Rotationsbewegung um die Achse giebt. Jeder Punkt der Schraubenlinie, welcher ein schwingendes Molekül darstellt, beschreibt einen Kreis um die Achse, und zugleich erhält die Schraubenlinie scheinbar eine longitudinale Bewegung, welche die Fortpflanzung der Wellenbewegung darstellt. Die Wellenlänge, welche gleich dem während einer Periode durchlaufenen Wege ist, wird durch die Ganghöhe der Schraubenlinie gegeben. Ist die Schraube eine rechtsdrehende, wie eine gewöhnliche Schraube, so erfolgt die Schwingung in der Richtung der Bewegung eines Uhrzeigers für einen Beobachter, gegen den hin die Fortpflanzung erfolgt. Man nennt den Strahl nach rechts kreisförmig polarisirt oder einfacher einen rechten Kreisstrahl. Der Kreisstrahl ist ein linker, wenn die Schwingung in dem dem Gange der Uhrzeiger entgegengesetzten Sinne erfolgt, für einen Beobachter, nach dem hin sich dieselbe fortpflanzt.

Legt man nun zwei Schraubenlinien von entgegengesetztem Sinne, die von demselben Punkte A ausgehen, über einander, so dass jedes Molekül des Mittels an der doppelten Bewegung teilnimmt, so sind die einander folgenden Lagen, die dasselbe infolge der beiden Kreisbewegungen einnimmt, stets symmetrisch gegen die durch den Strahl und den Punkt A gehende Ebene; die resultirende schwingende Bewegung liegt stets in dieser Ebene, und folglich bleibt der Strahl geradlinig polarisirt in seiner ursprünglichen Ebene.

Man kann annehmen, dass die Dinge sich so verhalten, wenn ein geradlinig polarisirter Strahl durch einen durchsichtigen, durch äussere Kräfte nicht beeinflussten Körper geht, wie durch das Flintglas bei Faraday. Aber wenn dieses Flintglas sich in einem magnetischen Felde befindet, beispielsweise innerhalb einer cylindrischen Spule, die von einem Strom durchflossen ist, und wenn sich das Licht parallel zu den Kraftlinien und in deren Richtung fortpflanzt, dann bleibt der Strahl an seinem Ausgangspunkte noch polarisirt, aber die Polarisationsebene hat sich um einen gewissen Winkel in Richtung der Ströme der Spule gedreht, also nach links für den Beobachter, der den Strahl empfängt. Die Drehung erfolgt dagegen nach rechts, wenn das Licht sich in der entgegengesetzten Richtung fortpflanzt.

Bei der Annahme von kreisförmigen Schwingungen muss demnach der eine der Kreisstrahlen während seines Durchganges durch das active Mittel vor dem andern einen Phasenvorsprung gleich dem doppelten Drehungswinkel der Polarisationsebene erhalten haben. Für das Flintglas und die dia-

magnetischen Substanzen ist es der linksdrehende Strahl, der voraneilt, wenn die Fortpflanzung in Richtung der Kraftlinien erfolgt; das Umgekehrte tritt für die magnetischen Mittel ein.

Wie dem auch sein möge, die Auffassung, dass zwei entgegengesetzt gerichtete Kreisstrahlen vorhanden sind, die sich in dem Mittel mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen, ist keineswegs eine blosse Hypothese; der Versuch zeigt vielmehr, dass ein gegebener Kreisstrahl nicht den nämlichen Brechungscoefficienten besitzt, wenn er einmal die der Einwirkung des Magnetismus ausgesetzte Substanz in Richtung der Kraftlinien, das andere Mal in entgegengesetzter Richtung durchsetzt.

Cornu hat ausserdem nachgewiesen, dass in beiden Fällen die Aenderungen der Coefficienten gegen denjenigen, den der Strahl in demselben Mittel besässe, wenn dieses der Einwirkung des Magnetismus entzogen wäre, entgegengesetzt gleich sind.

598. — Diese Phasendifferenz kann auf verschiedene Arten erklärt werden: man kann annehmen, dass für die beiden Strahlen die Periode dieselbe bleibt, aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine verschiedene ist; oder auch, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe bleibt, dass aber die Periode für die beiden Strahlen aufhört gleich zu sein und für jeden derselben von derjenigen verschieden ist, welche im äusseren Mittel besteht; oder endlich, was vielleicht in Anbetracht der gewöhnlichen Gesetze der Dispersion am wahrscheinlichsten ist, dass gleichzeitig eine Aenderung der Periode und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eintritt.

Im Allgemeinen ist es unmöglich einen dauernden schwingenden Zustand mit einer Periode anzunehmen, die von der der Ursache verschieden ist, welche denselben erzeugt; aber in dem vorliegenden Falle scheint die Schwierigkeit gehoben zu werden, wenn man annimmt, dass das Mittel, welches das Licht überträgt, selbst in einer Rotationsbewegung in bestimmtem Sinne begriffen ist, die relative Bewegungsperiode bliebe für die beiden Strahlen die nämliche und zwar dieselbe, wie in dem äusseren Mittel; der Phasenvorsprung würde dann allein von der Differenz der absoluten Bewegungen herrühren und genau der Hälfte dieser Differenz gleich sein.

In allen Fällen erhalten die beiden Kreisstrahlen, wenn sie aus dem Mittel heraustreten, dieselbe Periode und dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit wieder und bilden wieder einen geradlinig polarisirten Strahl. Die Zeitdifferenz, die für diese beiden Strahlen von den Geschwindigkeiten V' und V'' beim Durchsetzen einer Dicke e des Mittels eintritt, ist

$$t = e\left(\frac{1}{V''} - \frac{1}{V'}\right).$$

Nennt man T die Periode des Strahles in der Luft, so haben demnach die zwei Strahlen beim Austritt aus dem Mittel die Phasendifferenz

$$(1) \qquad 2\pi\frac{t}{T} = 2\pi\frac{e}{T}\left(\frac{1}{V''} - \frac{1}{V'}\right).$$

Wenn diese Strahlen in dem Mittel Perioden T' und T'' haben, dann sind die Anzahlen m' und m'' der Schwingungen, die sie ausführen,

$$m'\,T'=\frac{e}{V'} \quad \text{und} \quad m''\,T''=\frac{e}{V''},$$

woraus sich ergiebt

$$m''-m'=e\left(\frac{1}{V''T''}-\frac{1}{V'T'}\right).$$

Die Phasendifferenz beim Austritte ist demnach

$$(2) \qquad 2\pi\left(m''-m'+\frac{t}{T}\right)=2\pi e\left[\frac{1}{V''}\left(\frac{1}{T''}+\frac{1}{T}\right)-\frac{1}{V'}\left(\frac{1}{T'}+\frac{1}{T}\right)\right],$$

und die Drehung der Polarisationsebene

$$(3) \qquad \theta=\pi e\left[\frac{1}{V''}\left(\frac{1}{T''}+\frac{1}{T}\right)-\frac{1}{V'}\left(\frac{1}{T'}+\frac{1}{T}\right)\right].$$

Bezeichnen wir mit V und λ die Geschwindigkeit bez. die Wellenlänge des Strahles in der Luft, so können wir setzen

$$(4) \qquad \theta=\frac{\pi e}{\lambda}\left[\frac{V}{V''}\left(1+\frac{T}{T''}\right)-\frac{V}{V'}\left(1+\frac{T}{T'}\right)\right].$$

599. — Welches auch die Ursache sein möge, welche die Kreisschwingungen verändert, es ist vorauszusehen, dass die Wirkungen, da sie sehr klein sind, an den beiden entgegengesetzten Strahlen entgegengesetzt gleich sein müssen, und dass dieselben der magnetischen Kraft X proportional sind.

Man kann demnach, wenn man mit U und T die Geschwindigkeit und die Periode bezeichnet, die der betrachtete Strahl in dem Mittel besässe, wenn das magnetische Feld aufgehoben wäre, und wenn man mit n den zur Geschwindigkeit U gehörigen Brechungscoefficienten bezeichnet, setzen

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{V}{V'}&=\frac{V}{U}(1-\alpha X)=n(1-\alpha X),\\ \frac{V}{V''}&=\frac{V}{U}(1+\alpha X)=n(1+\alpha X); \end{aligned}$$

und

$$(6) \qquad \frac{T}{T'}=1-\beta X,\quad \frac{T}{T''}=1+\beta X.$$

Die Drehung der Polarisationsebene ist dann

$$\theta=\frac{2\pi e n}{\lambda}(2\alpha+\beta)\,X.$$

Da das Feld als gleichförmig vorausgesetzt ist, stellt das Produkt eX die Potentialdifferenz zwischen der Eintritts- und Austrittsstelle des Strahles dar; man erhält demnach

$$\omega = \frac{\theta}{eX} = \frac{2\pi n}{\lambda}(2\alpha + \beta). \tag{7}$$

Für die natürliche Drehung nimmt Fresnel an, dass die Periode sich nicht ändert. Stellt man sich auf den Boden dieser Hypothese, so ist der Coefficient β Null; nennt man n' und n'' die Brechungscoefficienten der beiden Kreisstrahlen, so erhält man dann einfach

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda X}\left(\frac{V}{V''} - \frac{V}{V'}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{n'' - n'}{X} = \alpha\frac{4\pi n}{\lambda}. \tag{8}$$

600. — Dies wäre die Drehung, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge unabhängig wäre; aber man muss noch beachten, dass die drehende Polarisation eine Dispersion zwischen den Kreisstrahlen erzeugt.

Die Geschwindigkeiten V' und V'' beziehen sich auf zwei verschiedene Längen λ' und λ'', und die Werte von U und n, die man auf der rechten Seite der Gleichung (4) einsetzt, beziehen sich auf die Fortpflanzung der Schwingungen dieser beiden Wellenlängen in dem Mittel in seinem natürlichen Zustande. Wir müssen demnach, wenn wir uns auf die Glieder erster Ordnung beschränken, in den Gleichungen (5) setzen

$$(5)' \quad \begin{aligned} n' &= \left[n + \frac{dn}{d\lambda}(\lambda' - \lambda)\right](1 - \alpha X) = n - n\alpha X + \frac{dn}{d\lambda}(\lambda' - \lambda) \\ n'' &= \left[n + \frac{dn}{d\lambda}(\lambda'' - \lambda)\right](1 + \alpha X) = n + n\alpha X + \frac{dn}{d\lambda}(\lambda'' - \lambda). \end{aligned}$$

Es folgt hieraus, wenn die Periode ungeändert bleibt,

$$\omega = \alpha\frac{4\pi}{\lambda}\left[n + \frac{1}{2\alpha X}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda'' - \lambda')\right]. \tag{9}$$

Nun ist ausserdem

$$\frac{\lambda''}{\lambda'} = \frac{V''}{V'} = \frac{1 - \alpha X + \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda' - \lambda)}{1 + \alpha X + \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda'' - \lambda)} = 1 - 2\alpha X + \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda' - \lambda''),$$

woraus sich mit derselben Annäherung ergiebt

$$\frac{\lambda'' - \lambda'}{2\alpha X} = -\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right).$$

Die magnetische Drehung ist dann

$$\omega = \alpha\frac{4\pi}{\lambda}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right). \tag{10}$$

Man sieht, dass man das ohne Berücksichtigung der Dispersion erhaltene Resultat mit dem Faktor $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$ zu multipliciren hat.

Der Coefficient α ist selbst eine Funktion der Wellenlänge. Um die Formel aus Art. 595, welche am besten den Erfahrungen entspricht, wieder zu erhalten, braucht dieser Coefficient nur proportional $\frac{n^3}{\lambda^2}$ zu sein. Wir werden sehen, bei welcher Anschauungsweise wir diese Formel durch die Theorie erhalten können.

601. Bemerkungen von Sir W. Thomson. — Die Erscheinungen der magnetischen Drehung der Polarisationsebene scheinen, wie W. Thomson hervorhebt, die Anschauungen Ampère's über die innere Natur des Magnetismus zu bestätigen.

„Der Einfluss des Magnetismus auf das Licht, wie derselbe von Faraday entdeckt ist, hängt von der Bewegungsrichtung der bewegten Partikel ab. Bespielsweise besitzen in einem unter diesem Einfluss stehenden Mittel die Partikel die in Geraden liegen, die gegen die Linien der magnetischen Kraft senkrecht stehen, wenn dieselben auf einer Schraubenlinie verschoben werden, deren Achse diese Linie ist, und dann tangential mit einer solchen Geschwindigkeit fortgetrieben werden, dass sie Kreise beschreiben, verschiedene Geschwindigkeiten, je nachdem die Kreisbewegung in einer Richtung, beispielsweise in der des Stromes, der das Feld erzeugen würde, erfolgt oder in der entgegengesetzten Richtung. Aber die elastische Reaktion des Mediums muss für gleiche Verschiebungen die nämliche sein, welches auch die Geschwindigkeiten und die Richtung der Partikel sein mögen: die Kräfte, welche der Centrifugalkraft der Kreisbewegung das Gleichgewicht halten, müssen also gleich sein, auch wenn die Lichtbewegungen ungleich sind. Da aber die absoluten Kreisbewegungen entweder gleich sind, oder den zuerst betrachteten Partikeln gleiche Centrifugalkräfte mitteilen, so folgt, dass die Lichtbewegungen nur Componenten der Gesammtbewegung sind, und dass eine kleinere leuchtende Componente in einer Richtung zusammen mit der Bewegung, die in dem Mittel vorhanden ist, wenn dasselbe kein Licht überträgt, dieselbe Resultante liefert, wie eine grössere Lichtbewegung in entgegengesetzter Richtung zusammen mit derselben nicht-leuchtenden Bewegung.

„Meiner Meinung nach ist es nicht blos unmöglich, anders als durch diese dynamische Erklärung die Thatsache zu begreifen, dass ein kreisförmig polarisirter Lichtstrahl, der parallel den Kraftlinien durch ein magnetisches Glasstück geht, indem er immer dieselbe Qualität beibehält, also stets rechts oder links drehend bleibt, sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen kann, je nachdem er sich in der Richtung bewegt, in der ein magnetischer Nordpol getrieben wird, oder in entgegengesetzter Richtung, sondern ich meine auch, dass man beweisen kann, dass eine andere Erklärung der Thatsache nicht möglich ist. Hieraus scheint zu folgen,

dass die Entdeckung Faraday's einen Beweis für die Realität der Ampère'schen Hypothese über die innere Natur des Magnetismus beibringt und eine Definition der Magnetisirung innerhalb der mechanischen Wärmetheorie liefert.

„Die Einführung des Prinzips von der Erhaltung der Flächen in die mechanische Behandlung von Mr. Rankine's Hypothese über die „molekularen Wirbel" scheint auf eine zur Ebene des resultirenden Rotationsmomentes (der „invariabeln Ebene") der Wärmebewegungen senkrechte Gerade als auf die magnetische Achse eines magnetisirten Körpers hinzuweisen und führt zu der Anschauung, dass „das magnetische Moment" durch das resultirende Moment der Momente definirt ist. Die Erklärung aller Erscheinungen der elektromagnetischen Anziehung und Abstossung sowie der elektromagnetischen Induction ist jetzt einfach in der Trägheit und dem Drucke der Materie zu suchen, in deren Bewegungen die Wärme besteht. Ist nun diese Materie Elektricität oder nicht, ist dieselbe ein continuirliches Fluidum, welches die Intermolekularräume ausfüllt, oder besteht sie selbst aus Molekülen, oder ist endlich alle Materie continuirlich, und rührt die molekulare Verschiedenheit nur von begrenzten Wirbeln oder andern relativen Bewegungen der benachbarten Teile eines Körpers her? — Dies sind Fragen, die zu entscheiden bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft unmöglich und über die zu speculiren vielleicht müssig ist." (Reprint of Papers p. 419.)

602. Elektrische Doppelbrechung. — Man weiss, dass stets, wenn ein einfachbrechender durchsichtiger Körper einer mechanischen Einwirkung, wie einem Drucke oder einem Zuge in einer bestimmten Richtung, unterzogen wird, dieser Körper vorübergehend die Eigenschaften eines doppelbrechenden Körpers erhält, wobei die Achse der Doppelbrechung längs der Druck- oder Zuglinie gerichtet ist.

Kerr hat nun gezeigt, dass jeder einfachbrechende, feste oder flüssige Körper, der sich in einem elektrischen Felde befindet, vorübergehend eine Doppelbrechung erhält; die Achse der Doppelbrechung fällt mit der Richtung der Kraftlinien zusammen, und je nach der Natur des Körpers ist die Geschwindigkeit des extraordinären Strahles grösser oder kleiner als die des ordinären Strahles.

Nennen wir δ die Intensität der Doppelbrechung, also die Gangdifferenz, die zwischen dem ordinären und dem extraordinären Strahl für eine der Einheit gleiche Dicke des Dielektricums eintritt, und V die elektrostatische Potentialdifferenz zwischen zwei im Abstande d gelegenen Punkten, so ist die elektrische Kraft F in den fraglichen Punkten gleich $\frac{V}{d}$. Kerr leitet aus seinen Versuchen die Beziehung ab

$$\delta = k\frac{V^2}{d^2} = kF^2,$$

wo k eine für den Körper charakteristische Constante ist, die je nach den Umständen positiv oder negativ ist. Es folgt hieraus, dass die Intensität der elektrischen Doppelbrechung dem Quadrate der elektrischen Kraft proportional ist.

Wir haben gesehen (**107**), dass man annehmen kann, dass das Dielektricum in Richtung der Kraftlinien einer dem Quadrate der Kraft proportionalen Spannung unterworfen ist. Es scheint demnach, dass die von Kerr beobachtete Erscheinung als eine von der elektrostatischen Spannung des Mittels herrührende vorübergehende Doppelbrechung aufzufassen ist.

9. Capitel.

Elektrische Einheiten.

603. Fundamentale Einheiten. — Abgeleitete Einheiten. — Lange Zeit hindurch hat man sich darauf beschränkt, in den Erscheinungen der Elektricität und des Magnetismus die verschiedenen Grössen als Funktionen willkürlicher Einheiten zu definiren, deren Wahl für jeden besonderen Fall durch die Bequemlichkeit bei den Versuchen bedingt war. Diese Methode bringt, selbst wenn die angewandten Einheiten passend definirt werden, die Unzuträglichkeit mit sich, nicht nur die Vergleichung der von verschiedenen Beobachtern erhaltenen Resultate sehr zu erschweren, sondern besonders noch die, dass die Beziehungen, die zwischen den verschiedenen Gruppen von Erscheinungen bestehen können, leicht verdeckt werden. Es ist demnach für den Fortschritt der Wissenschaft von der grössten Wichtigkeit, allgemeine Uebereinstimmung in der Wahl der Einheiten herzustellen, und dieselben so zu wählen, dass gleichzeitig die gewählten Einheiten unter einander jenen Charakter der Nebeneinanderordnung zeigen, in welchem die Ueberlegenheit des metrischen Systems beruht.

Die Einheiten, welche den verschiedenen Arten von Grössen entsprechen, könnten in der That willkürlich und von einander unabhängig gewählt werden; aber es ist ein unleugbarer Vorteil, dieselben sämmtlich von einer möglichst kleinen Anzahl einfacher Einheiten abhängen zu lassen. So können in der Geometrie zum Beispiel die Flächen- und die Volumeneinheit von der Längeneinheit abgeleitet werden. In die Kinematik wird mit der Geschwindigkeit ein neuer Begriff und eine neue Einheit, die der Zeit, eingeführt. Das Studium der Mechanik führt zu einer dritten, von den beiden ersten unabhängigen Einheit, zur Einheit der Kraft oder zur Einheit der Masse. Alle mechanischen Grössen können so als Funktionen der drei Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse oder der Länge, der Zeit und der Kraft bestimmt werden. In einem coordinirten Systeme werden die nicht reducirbaren Grössen *Fundamentaleinheiten* genannt; die andern werden als *abgeleitete Einheiten* bezeichnet.

Alle Grössen, die wir in der Elektricität und im Magnetismus betrachtet haben, sind durch ihre mechanischen Eigenschaften definirt worden; sie können demnach, wie die mechanischen Grössen selbst, als Funktionen der

drei Fundamentaleinheiten der Länge, der Zeit und der Masse, gemessen werden.

Ein auf diese Prinzipien begründetes Maasssystem wird ein *absolutes System* genannt, im Gegensatz zu *relativen System*, welches ein System von von einander unabhängigen Maassen bezeichnen würde.

604. Dimensionen einer derivirten Einheit. — Ist n der numerische Ausdruck für eine Grösse, also die Anzahl Einheiten, die derselbe enthält, und $[N]$ die Grösse der Vergleichseinheit, so würde die gemessene Grösse, wenn diese Einheit gleich $[N']$ gewählt würde, durch eine andere Zahl n' ausgedrückt werden, und man erhielte die Beziehung

$$n[N] = n'[N'],$$

welche ergiebt

$$\frac{n'}{n} = \frac{[N]}{[N']}.$$

Es folgt daraus, dass *das Verhältnis der numerischen Werte einer gegebenen Grösse gleich dem umgekehrten Verhältnisse der Einheiten ist, die derselben als Maass gedient haben.*

Ist die Einheit eine abgeleitete Einheit und ändert sich dieselbe infolge einer Aenderung in der Grösse der Fundamentaleinheiten, so muss man um dieses letztere Verhältnis kennen zu lernen, wissen, in welcher Weise die abgeleitete Einheit von den Fundamentaleinheiten abhängt. Man nennt *Dimensionen* einer abgeleiteten Einheit die Beziehung, welche diese Einheit mit den Fundamentaleinheiten verbindet.

Wir wollen durch die Symbole $[L]$, $[M]$ und $[T]$ die fundamentalen Einheiten der Länge, der Masse und der Zeit bezeichnen und durch einen in eckige Klammern geschlossenen Buchstaben $[x]$ die Grösse irgend einer Einheit. Die Dimension der Flächeneinheit wird dann durch das Symbol $[L^2]$ und die der Volumeneinheit durch $[L^3]$ dargestellt; dies deutet an, dass die Flächeneinheit wie das Quadrat, die Volumeneinheit wie der Kubus der Längeneinheit variirt.

Werden allgemeiner die Dimensionen einer abgeleiteten Einheit durch das Symbol $[L^p M^q T^r]$ ausgedrückt, und wählt man der Reihe nach als Fundamentaleinheiten Werte L, M, T und L', M', T', so ist das Verhältnis der abgeleiteten Einheit in beiden Systemen

$$\frac{[N']}{[N]} = \left(\frac{L'}{L}\right)^p \left(\frac{M'}{M}\right)^q \left(\frac{T'}{T}\right)^r.$$

605. Abgeleitete mechanische Einheiten. — Die wichtigsten abgeleiteten Grössen der Mechanik sind die *Geschwindigkeit*, die *Beschleunigung*, die *Kraft* und die *Arbeit* oder die *Energie*.

Geschwindigkeit $[v]$. — Die Geschwindigkeit v ist der von etwas Beweglichem in der Zeiteinheit durchlaufene Weg oder der Quotient einer Länge

durch eine Zeit. Die Dimensionen der Geschwindigkeitseinheit werden demnach ausgedrückt durch die Formel

$$[v] = [LT^{-1}].$$

Beschleunigung $[\gamma]$. — Die Beschleunigung γ ist das Verhältnis des Zuwachses der Geschwindigkeit zum Zuwachs der Zeit; folglich der Quotient einer Geschwindigkeit durch eine Zeit, und man erhält für die Dimensionen der Einheit

$$[\gamma] = [LT^{-2}].$$

Kraft $[f]$. — Die Kraft f ist das Produkt einer Masse in eine Beschleunigung, woraus sich ergiebt

$$[f] = [LMT^{-2}].$$

Arbeit, Energie $[W]$. — Die Arbeit oder die Energie W ist das Produkt einer Kraft in einer Länge; die lebendige Kraft, die eine Grösse derselben Art ist, ist das Produkt einer Masse in das Quadrat einer Geschwindigkeit. Man erhält in beiden Fällen

$$[W] = [L^2MT^{-2}].$$

Die Einheit der Kraft ist das, was auf die Masseneinheit wirkend, derselben in der Zeiteinheit eine der Einheit gleiche Beschleunigung mitteilt.

Die Einheit der Arbeit ist die von der Einheit der Kraft erzeugte Arbeit, wenn der Angriffspunkt der Kraft sich in ihrer eigenen Richtung um die Längeneinheit verschiebt.

Die beiden letzteren Einheiten sind nicht die der gewöhnlichen Praxis; man wählt häufiger das Gewicht eines Körpers als Krafteinheit, beispielsweise das Gramm oder das Kilogramm, und das Kilogrammmeter als Arbeitseinheit. Es kommt dies darauf zurück, dass man die Krafteinheit statt der Masseneinheit als dritte fundamentale Einheit wählt. Die Wahl eines Gewichtes, wie des Kilogrammes im Pariser Archiv, als Krafteinheit, bringt die Unzuträglichkeit mit sich, dass, wenn dieser Körper oder jeder andere ihm äquivalente auf einen andern Punkt der Erde übergeführt wird, sein wirkliches Gewicht infolge der Aenderung der Intensität der Schwerkraft nicht mehr die Krafteinheit darstellt; die Masse eines Körpers dagegen ist eine unveränderliche Grösse, an welchem Orte sich dieselbe auch befinden möge.

Man erkennt leicht die Beziehung, die zwischen diesen beiden Einheiten besteht: die Formel $p = mg$, in welcher m die Masse eines Körpers und p dessen Gewicht an einem Orte darstellt, an dem die Beschleunigung durch die Schwerkraft g ist, zeigt, dass wenn die Masse eines Körpers der Einheit gleich ist, sein Gewicht ihm eine Geschwindigkeit gleich g giebt und folglich dem g-fachen der oben gewählten Krafteinheit gleichwertig ist, wenn die Beschleunigung g als Funktion der als Fundamentaleinheit gewählten Länge dargestellt ist.

Wählt man demnach als Einheiten das Meter und die Masse des Kilogrammes, so ist die Krafteinheit $\frac{1}{9,81}$ Kilogramm oder ungefähr 100 Gramm. Mit dem Kilogramm als Krafteinheit ist die Masseneinheit die Masse eines Körpers, der 9,81 Kilogramm wiegt.

606. Elektrische und magnetische abgeleitete Einheiten. — Die wichtigsten elektrischen Grössen sind die *Elektricitätsmenge,* die *Intensität des elektrischen Feldes,* das *Potential* oder die *elektromotorische Kraft,* die *Capacität,* die *Stromintensität,* der *Widerstand* etc. Wir haben ebenso für die magnetischen Grössen die *Menge des Magnetismus,* die *Intensität des magnetischen Feldes,* die *magnetische Stärke eines Blattes* etc. Alle diese Grössen sind mit einander durch Beziehungen verbunden, die sie definiren, so dass, wenn eine derselben gegeben ist, alle andern aus derselben abgeleitet werden können.

Um ein absolutes System herzustellen, muss die Grösse, von der man ausgeht, direkt in mechanischen Einheiten gemessen werden können. So kann man die Elektricitätsmenge durch das Coulomb'sche Gesetz (**7**) definiren oder auch die Menge des Magnetismus durch das entsprechende Gesetz (**293**) oder endlich die Stromintensität durch die elektrodynamische Formel von Ampère (**473**). Hieraus resultiren drei Systeme von absoluten Maassen, die von einander unabhängig sind und nicht in einander übergeführt werden können, in denen die verschiedenen Einheiten in verschiedener Weise mit den Fundamentaleinheiten verknüpft sind, und die man bez. als *elektrostatisches,* als *elektromagnetisches* und als *elektrodynamisches System* bezeichnet.

Es giebt keinen theoretischen Grund dafür, eines dieser Systeme den andern vorzuziehen; indessen haben zwei eine grössere praktische Bedeutung, nämlich das elektrostatische und das elektromagnetische System. Die Einheiten des elektrodynamischen Systems unterscheiden sich übrigens nur durch einen numerischen Faktor (**473**) von den entsprechenden elektromagnetischen Einheiten, und ihre Anwendung ist weniger einfach. Wir werden uns ausschliesslich mit den ersten beiden beschäftigen; wir werden durch kleine Buchstaben die Grössen darstellen, wenn sie in dem elektrostatischen System bestimmt sind, und durch grosse Buchstaben die Ausdrücke für dieselben Grössen im elektromagnetischen System.

607. Elektrostatisches System. — *Elektricitätsmenge* $[q]$. — Das Coulomb'sche Gesetz liefert für die Abstossung f, die zwischen zwei gleichen Massen q im Abstande d besteht,

$$f=\frac{q^2}{d^2}, \quad \text{oder } q=d\sqrt{f}.$$

Man findet hieraus für die Dimensionen der Elektricitätseinheit

$$[q]=[d]\,[f^{\frac{1}{2}}]=[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}].$$

Oberflächendichte. — Elektrische Verschiebung [σ]. — Die Dichte ist die Elektricitätsmenge für die Flächeneinheit (**18**); ebenso ist die elektrische Verschiebung die Menge, die durch die Flächeneinheit gegangen ist (**126**); man erhält demnach

$$[\sigma] = [q]\,[L^{-2}] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Elektrische Kraft. Intensität des Feldes [h]. — Dies ist die Kraft, welche auf die elektrische Masseneinheit in dem betrachteten Punkte wirkt, woraus sich für die Dimensionen der Einheit ergiebt

$$[h] = [f]\,[q^{-1}] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}];$$

dieselben sind die nämlichen, wie die für die Dichte, wie dies auch nach dem Coulomb'schen Satze (**36**) vorauszusehen war.

Die *Strömung der elektrischen Kraft* ist das Produkt der elektrischen Kraft in eine Fläche, hat also die Dimensionen $[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.

Specifische inductive Capacität [k]. — Die specifische inductive Capacität ist in dem elektrostatischen System eine absolute Zahl.

Elektromotorische Kraft oder *elektrostatisches Potential* [e]. — Das Potential einer elektrischen Masse in einem Abstande d ist der Quotient dieser Masse durch diesen Abstand; man erhält demnach

$$[e] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Elektrostatische Capacität [c]. — Die Capacität eines Condensators ist der Quotient seiner Ladung durch die Potentialdifferenz seiner Belegungen, und es ist

$$c = \frac{q}{e} \text{ oder } [c] = [L].$$

Die elektrostatische Capacität ist demnach eine Länge, wie wir bereits für einen speciellen Fall gesehen haben (**73**).

Stromintensität [i]. — Die Stromintensität (**204**) ist die Elektricitätsmenge, die durch den Querschnitt eines Drahtes in der Zeiteinheit geht, oder der Quotient einer Menge q durch die Zeit t, die dieselbe braucht, um durch diesen Querschnitt zu gehen. Man erhält so

$$i = \frac{q}{t} \text{ oder } [i] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Widerstand [r]. — Der Widerstand eines Leiters ist durch das Ohm'sche Gesetz definirt (**204**). Es ist dies der Quotient der elektromotorischen Kraft zwischen zwei Punkten durch die Stromintensität, also

$$r = \frac{e}{i}, \text{ und } [r] = [L^{-1}\,T].$$

Der elektrostatische Widerstand ist demnach das Reciproke einer Geschwindigkeit, wie wir bereits (**206**) gezeigt haben.

Menge des Magnetismus $[q']$. — In dem elektrostatischen System wird die Menge des Magnetismus durch die Bedingung definirt, dass die Wirkung eines Magnetpols von der Masse q' auf einen Stromteil von der Intensität i und der sehr kleinen Länge l, der sich im Abstande d vom Pole befindet und senkrecht gegen die Gerade steht, die seine Mitte mit dem Pole verbindet, durch das Elementargesetz ausgedrückt wird (**458**)

$$f = \frac{ilq'}{d^2}, \text{ oder } q' = \frac{fd^2}{il};$$

man findet hieraus

$$[q'] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

Magnetische Dichte $[\sigma']$. — Da die Flächendichte die Menge des Magnetismus für die Flächeneinheit ist, erhält man

$$[\sigma'] = [L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

Magnetische Kraft. — Magnetisches Feld $[h']$. — Es ist dies die Kraft, welche auf die Einheit der magnetischen Masse wirkt; folglich

$$[h'] = [f][q'^{-1}] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Magnetisches Potential $[e']$. — Das magnetische Potential ist die Arbeit der magnetischen Kraft, also das Produkt dieser Kraft in eine Länge; man erhält demnach

$$[e'] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Stärke eines magnetischen Blattes $[\varphi]$. — Die magnetische Stärke eines Blattes ist das Produkt der Oberflächendichte in die Dicke des Blattes, woraus sich ergiebt

$$[\varphi] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

608. Elektromagnetisches System. — *Menge des Magnetismus* $[Q']$. — In dem elektromagnetischen System ist der Ausgangspunkt für die Maasse die Definition der Menge des Magnetismus nach dem Coulomb'schen Gesetze

$$f = \frac{Q'^2}{d^2}; \text{ woraus } [Q'] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Es sind dies natürlich dieselben Dimensionen wie die der Elektricitätseinheit in dem elektrostatischen Systeme.

Magnetische Flächendichte $[\Sigma']$. — *Magnetische Kraft; Intensität des Feldes* $[H']$. — *Magnetisches Potential* $[E']$. — Es folgt aus der letzten Bemerkung, dass die Dimensionen dieser verschiedenen Einheiten dieselben sind, wie die der entsprechenden elektrischen Grössen in dem elektrostatischen System, nämlich:

$$[\Sigma'] = [H'] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}],$$

$$[E'] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Stärke eines magnetischen Blattes [Φ]. — *Stromintensität* [*I*]. — Da die magnetische Stärke eines Blattes das Produkt der Flächendichte in die Dicke ist, erhält man

$$[\Phi] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Die Dimensionen sind die nämlichen wie die des Potentials, ein Resultat, welches vorauszusehen war (**329**).

Die Stromintensität hat denselben Wert und dieselben Dimensionen, wie die magnetische Stärke eines Blattes (**450**).

Elektricitätsmenge [*Q*]. — Da die Elektricitätsmenge das Produkt einer Stromintensität in eine Zeit ist, erhält man

$$[Q] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

Diese Dimensionen sind die nämlichen wie die der Menge des Magnetismus in dem elektrostatischen System; folglich haben im elektromagnetischen System die *elektrische Flächendichte,* die *elektrische Kraft* und das *elektrische Potential* die nämlichen Dimensionen wie die entsprechenden magnetischen Grössen im elektrostatischen System.

Specifische inductive Capacität [*K*]. — Die specifische inductive Capacität ist (**126**) dem elektrischen Elasticitätscoefficienten des Mittels umgekehrt proportional, also dem Verhältnisse der Verschiebung zur entsprechenden Kraft proportional, woraus sich ergiebt

$$[K] = [L^{-2} T^2];$$

dieselbe ist demnach gleich dem reciproken Quadrat einer Geschwindigkeit.

Widerstand [*R*]. — Der Widerstand eines Leiters kann durch das Joule'sche Gesetz (**244**) definirt werden, also durch

$$W = I^2 Rt,$$

woraus man findet

$$[R] = [LT^{-1}].$$

Der elektromagnetische Widerstand ist demnach einer Geschwindigkeit gleichwertig; wir haben dieses Resultat direkt erhalten (**407**). Nehmen wir an, dass die beiden Schienen und der Stab in dem in jenem Artikel betrachteten Versuch ohne merklichen Widerstand sind und dass in dem Kreise kein anderer Widerstand vorhanden ist als der des Drahtes, der die beiden Punkte *A* und *B* verbindet, so ist der Widerstand dieses Drahtes der absoluten Einheit gleich, wenn der Stab der Längeneinheit gleich ist, sich in einem der Einheit gleichen Felde mit einer der Einheit gleichen Geschwindigkeit senkrecht gegen die Kraftlinien bewegt und dabei einen Strom erzeugt, der im Stande ist, in der Sekunde eine Einheit der Energie in Form von Wärme in dem Drahte zu leisten.

Elektromotorische Kraft $[E]$. — Die elektromotorische Kraft ergiebt sich aus dem Ohm'schen Gesetze

$$E = IR,$$

und die Dimensionen derselben sind

$$[E] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Capacität $[C]$. — Da die Capacität das Verhältnis der Elektricitätsmenge, welche einen Condensator ladet, zur Potentialdifferenz der beiden Belegungen ist, erhält man noch

$$C = \frac{Q}{E}, \text{ oder } [C] = [L^{-1} T^2].$$

609. Dimensionen der Haupteinheiten. — Man kann in derselben Weise die Dimensionen anderer Grössen bestimmen, die wir nicht untersucht haben. Wir wollen in den folgenden Tabellen die Dimensionen der wichtigsten Grössen zusammenstellen.

Fundamentaleinheiten.

Länge	$[L]$,
Masse	$[M]$,
Zeit	$[T]$.

Abgeleitete mechanische Einheiten.

Geschwindigkeit	$[LT^{-1}]$,
Beschleunigung	$[LT^{-2}]$,
Kraft	$[LMT^{-2}]$,
Energie	$[L^2 MT^{-2}]$.

Abgeleitete elektrische Einheiten.

	Elektrostatisches System	Elektromagnetisches System
Elektricitätsmenge	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$
Elektrische Flächendichte Elektrische Verschiebung	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$
Elektrische Kraft Elektrisches Feld	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$
Elektrische Kraftströmung	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$
Inductive specifische Capacität . . .	1	$[L^{-2} T^2]$
Elektrostatisches Potential Elektromotorische Kraft	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$
Elektrostatische Capacität	$[L]$	$[L^{-1} T^2]$
Stromintensität	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Widerstand	$[L^{-1} T]$	$[LT^{-1}]$.

Abgeleitete magnetische Einheiten.

	Elektrostatisches System	Elektromagnetisches System
Menge des Magnetismus	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Flächendichte	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Magnetische Kraft, Magnetisches Feld	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Magnetische Kraftströmung	$[L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Magnetisches Potential	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Magnetische Stärke	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{2} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Magnetisches Moment	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Intensität der Magnetisirung . . .	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Coefficient der Magnetisirung, Magnetische Permeabilität . .	$[L^{-2} T^{2}]$	1
Verdet'sche Constante	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{-\frac{1}{2}} T^{2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} T]$
Coefficienten der wechselseitigen Induction und der Selbstinduction .	$[L^{-1} T^{2}]$	$[L]$.

610. Beziehungen zwischen den beiden Systemen von Einheiten. — Um die Beziehung festzustellen, die zwischen den entsprechenden Einheiten der beiden Systeme besteht, braucht man nur ihre Dimensionen zu vergleichen oder auch die numerischen Ausdrücke für eine und dieselbe Grösse als Funktion jedes einzelnen gleich zu setzen. Betrachten wir zum Beispiel die verschiedenen Ausdrücke für dieselbe Energiemenge W, so erhalten wir die Gleichungen

$$W = i^2 r t = I^2 R t,$$
$$W = e i t \;= E I t,$$
$$W = e q \;= E Q,$$
$$W = e^2 c \;= E^2 C.$$

Man findet hieraus den constanten Wert a

$$a = \sqrt{\frac{R}{r}} = \frac{i}{I} = \frac{E}{e} = \frac{q}{Q} = \sqrt{\frac{c}{C}}.$$

Da diese Beziehungen zwischen den numerischen Werten bestehen, erhält man für die Verhältnisse der entsprechenden Einheiten (**604**)

$$\frac{[I]}{[i]} = \frac{[e]}{[E]} = \frac{[Q]}{[q]} = a,$$
$$\frac{[r]}{[R]} = \frac{[C]}{c} = a^2.$$

Die Constante a bezeichnet demnach die Anzahl elektrostatischer Elektricitätseinheiten $[q]$, die in einer elektromagnetischen $[Q]$ vorhanden sind.

Da der elektromagnetische Widerstand R eine Geschwindigkeit und der elektrostatische Widerstand das Reciproke einer Geschwindigkeit ist, ist das Verhältnis $\frac{R}{r}$ oder $\frac{[r]}{[R]}$ das Quadrat einer Geschwindigkeit. Da dieses Verhältnis gleich a^2 ist, folgt, dass die Constante a selbst eine Geschwindigkeit ist.

Eine grosse Zahl von Versuchen ist zur Bestimmung des Wertes dieser Constanten angestellt worden. Es bieten sich augenscheinlich hierfür so viel Methoden, als Grössen vorhanden sind, die sich zugleich direkt in elektrostatischen und in elektromagnetischen Einheiten bestimmen lassen. Alle erhaltenen Resultate liegen in der Nähe der Zahl, die die Lichtgeschwindigkeit in der Luft angiebt. Es ist wahrscheinlich, dass dieses Zusammentreffen kein zufälliges ist, und dass die Gleichheit der beiden Zahlen auf eine Beziehung in der Natur dieser Erscheinungen hinweist. Die Geschwindigkeit des Lichtes ist sehr nahe 300 000 Kilometer in der Sekunde. Diese Zahl wollen wir für das Verhältnis a annehmen, indem wir dieselbe als Funktion der Länge ausdrücken, die wir als Fundamentaleinheit wählen werden.

611. Wahl der Fundamentaleinheiten. — Die Wahl der Grössen, die man als Einheiten der Zeit, der Länge und der Masse festsetzt, ist augenscheinlich willkürlich. Für die Einheit der Zeit ergab sich die von allen civilisirten Völkern adoptirte mittlere Zeitsekunde von selbst; für die Einheit der Länge kann man ebensowohl das Meter wie einen Decimalteil des Meters wählen. Was die Masseneinheit betrifft, so ist es vorteilhaft, die Masse der Volumeneinheit Wasser bei seiner grössten Dichte zu wählen; man behält so den Vorteil, dass das specifische Gewicht des Wassers der Einheit gleich ist, und dass das Gewicht eines Körpers gleich dem Produkte seines Volumens in seine Dichte ist.

Das absolute System, welches am wenigsten von den beim Gebrauch der metrischen Maasse eingeführten Gewohnheiten abweicht, würde darin bestehen, als Fundamentaleinheiten das Decimeter und die Masse des Kilogramms zu wählen.

Gauss und Weber, die das absolute System zuerst in die Wissenschaft eingeführt haben, hatten das Millimeter und die Masse des Milligramms gewählt. Die British Association hat auf W. Thomson's Vorschlag das Centimeter und die Masse des Gramms angenommen. Diese letzteren Einheiten sind für die elektrischen und magnetischen Messungen endgiltig von dem internationalen Elektriker-Congress in Paris 1881 adoptirt worden.

612. Absolutes *C. G. S.*-System. — Man ist übereingekommen, die vom *Centimeter*, der *Masse des Gramms* und der *Sekunde* der mittleren Zeit abgeleiteten Einheiten als die aufzufassen, welche das absolute System in engerem Sinne bilden, und dieselben durch das Symbol *C. G. S.* zu bezeichnen.

Diese Einheiten haben keine besonderen Bezeichnungen erhalten. So ist die Krafteinheit *C. G. S.* die Kraft, die, auf die Masse eines Gramms wirkend, derselben in einer Sekunde eine Beschleunigung von einem Centimeter mitteilt. Es folgt daraus, dass ein Gramm g Krafteinheiten *C. G. S.* gilt, ein Kilogramm $g\,10^3$ Einheiten *C. G. S.*, wobei der Wert von g in Centimetern angegeben ist. Ebenso ist ein Kilogrammmeter $g.10^5$ gleich, also 981.10^5 oder ungefähr 10^8 Arbeitseinheiten *C. G. S.* In diesem System ist der Wert von a (**610**) 3.10^{10}.

613. Praktisches System. — Die Werte der absoluten Einheiten des Systems *C. G. S.* stehen nun aber nicht in einem passenden Verhältnisse zu den Grössen, die man in der Praxis zu messen hat. So ist die absolute Einheit des elektromagnetischen Widerstandes *C. G. S.* kaum der Widerstand des Zwanzigtausendstels eines Millimeters Kupferdraht von einem Millimeter Durchmesser, und die Einheit der elektromotorischen Kraft ist ein Hunderttausendstel derjenigen eines Daniell'schen Elementes. Hierdurch wurde das Comité der British Association, das im Jahre 1861 behufs Herstellung eines rationellen Systems elektrischer Maasse eingesetzt war, veranlasst, Einheiten zu wählen, die den Bedürfnissen der Praxis mehr entsprechen, und diese Einheiten zur Erleichterung der Ausdrucksweise mit besonderen Namen zu belegen. Dieses System ist in folgender Form von dem Pariser Congress endgiltig festgestellt worden.

Die praktische Widerstandseinheit ist gleich 10^9 absoluten Einheiten *C. G. S.* und hat den Namen *Ohm* erhalten*);

Man nennt *Volt* die praktische Einheit der elektromotorischen Kraft: das Volt ist 10^8 Einheiten *C. G. S.***) gleich;

Man nennt *Ampère* den von der elektromotorischen Kraft eines Volt in einem Kreise, dessen Widerstand ein Ohm beträgt, erzeugten Strom; das Ampère beträgt 10^{-1} Einheiten *C. G. S.*

Ein *Coulomb* ist die Elektricitätsmenge, die in einer Sekunde durch den Querschnitt eines Leiters geht, durch den ein Strom von einem Ampère fliesst: das Coulomb beträgt 10^{-1} Einheiten *C. G. S.*

*) Das Comité der British Association hat zahlreiche Versuche gemacht zur Bestimmung des Wertes des Ohm und zur Construction von Etalons, die den nämlichen Widerstand besitzen. Die ersten Versuche schienen zu zeigen, dass das Ohm sehr annähernd dargestellt wird durch den Widerstand einer Quecksilbersäule bei einer Temperatur von 0°, die einen Quadratmillimeter Querschnitt und eine Länge von 104 Centimeter hat; aber es scheinen gewisse Fehler bei der Berechnung der Versuche gemacht zu sein, und es scheint, dass diese Länge um ungefähr ein Hundertstel vergrössert werden muss, also auf 105 Centimeter. Neuere Arbeiten führen zu demselben Resultat; aber die Frage scheint noch nicht definitiv gelöst. Da es andererseits nicht sicher ist, dass die festen Metalle ihre elektrischen Eigenschaften ohne Aenderung beibehalten, hat der Pariser Congress entschieden, dass das Ohm durch eine Quecksilbersäule bei der Temperatur von 0° mit einem Querschnitt von ein Quadratmillimeter dargestellt werde, und dass eine internationale Commission beauftragt werde, durch neue Versuche die Länge zu bestimmen, die man dann für diese Einheit in der Praxis zu adoptiren habe.

**) Die elektromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes ist ungefähr 1,08 Volt.

Man nennt *Farad* die Capacität eines Condensators, dessen Belegungen eine Potentialdifferenz von einem Volt erhalten, wenn man sie mit einem Coulomb ladet; das Farad beträgt 10^{-9} Einheiten *C. G. S.*

Bei gewissen Anwendungen ist es nützlich, die verschiedenen Grössen durch Einheiten auszudrücken, die eine Million Mal kleiner oder grösser sind als die entsprechende praktische Einheit. Man bezeichnet diese neuen Einheiten mit demselben Namen, vor den man das Präfix *Mega* oder *Mikro* setzt, je nachdem dieselben mit einer Million multiplicirt oder durch eine Million dividirt sind.

So beträgt das *Megohm* 10^6 Ohm, das *Mikrohm* 10^{-6} Ohm. Ebenso beträgt für die Capacität das Millionstel Farad oder *Mikrofarad* 10^{-6} Farad oder 10^{-15} Einheiten *C. G. S.*

Das Mikrofarad ist in Wirklichkeit die praktische Einheit der Capacität; denn das Farad hat noch einen viel zu grossen Wert. Beispielsweise ist die elektrostatische Capacität der Erde gleich seinem Radius R; ihre elektromagnetische Capacität C ist gleich dem Quotienten des Radius durch a^2, woraus sich ergiebt

$$C = \frac{R}{a^2} = \frac{2.10^9}{\pi} \frac{1}{3^2.10^{20}} = 708.10^{-15} \text{ Einheiten } C.\ G.\ S.$$

also 708 Mikrofarad.

Es ist wichtig, zu bemerken, dass die praktischen Einheiten, für sich genommen, ein absolutes System bilden, in denen die Fundamentaleinheiten sind

$$[L] = 10^7 \text{ Meter oder ein Viertel des Erdmeridians,}$$
$$[M] = 10^{-11} \text{ der Masse eines Grammes,}$$
$$[T] = \text{eine Sekunde.}$$

Eine andere Bemerkung, die oft von praktischem Nutzen ist, ist die, dass man den Ausdruck für die Arbeit im praktischen System nur durch den in Metern ausgedrückten Wert von g, also merklich durch 10, zu dividiren braucht, um den Wert derselben in Kilogrammmetern zu erhalten.

Denn die praktische Einheit für die elektrische Arbeit wird erhalten, wenn man ein Volt mit einem Ampère multiplicirt, was 10^7 Einheiten *C. G. S.* ergiebt. Nun haben wir aber gesehen (**612**), dass ein Kilogrammmeter ungefähr 10^8 Einheiten *C. G. S.* gleichwertig ist, also zehnmal so gross. Dieselbe Arbeit wird also in Kilogrammmetern durch eine zehnmal so kleine Zahl ausgedrückt.

614. Vergleichende Werte der Haupteinheiten. — Wir stellen in der folgenden Tabelle die Werte der praktischen Einheiten in absoluten Einheiten *C. G. S.* und ebenso als Funktionen der Einheiten von Gauss und Weber, die in einer gewissen Zahl von Arbeiten über die Elektricität angewandt sind, noch einmal zusammen.

Fundamental-Einheiten	Praktische Einheiten	Einheiten C. G. S.	Einheiten von Gauss u. Weber
Länge	10^7 Meter	Centimeter	Millimeter
Masse	10^{-11} Gramm	Gramm	Milligramm
Zeit	Sekunde	Sekunde	Sekunde
Widerstand	Ohm	10^9	10^{10}
Elektromotorische Kraft	Volt	10^8	10^{11}
Strom	Ampère	10^{-1}	10^1
Menge	Coulomb	10^{-1}	10^1
Capacität	Farad	10^{-9}	10^{-10}

615. Physikalische Auffassung der Geschwindigkeit a. — Der Geschwindigkeit a, welche das Verhältnis der Elektricitätseinheiten in den beiden Systemen ausdrückt, kann man auch eine physikalische Deutung geben.

Nehmen wir zum Beispiel an, dass man eine Kugel vom Radius R oder einen Condensator von der gleichen Capacität, der so geladen ist, dass sein elektrostatisches Potential der Einheit gleich ist, n Mal in der Zeit t durch einen Leiter hindurch entladet, so ist die mittlere Stromintensität in elektrostatischen Einheiten $\frac{nR}{t}$. Bestimmt man n so, dass die Intensität dieses Stromes der elektromagnetischen Einheit gleich ist, so stellt der Ausdruck $\frac{nR}{t}$ die Anzahl der elektrostatischen Elektricitätseinheiten dar, die in einer elektromagnetischen Einheit vorhanden sind, also den Wert von a, und dieser Ausdruck ist eine Geschwindigkeit.

616. — Maxwell giebt eine andere Darstellung für diese Geschwindigkeit an, die auf der Annahme begründet ist, dass die äussere Wirkung einer in Bewegung begriffenen elektrischen Masse der eines Stromes gleichartig ist.

Wir fassen eine Ebene ins Auge, die mit einer gleichförmigen Elektricitätsladung von der Dichte σ bedeckt ist und sich mit gleichförmiger Bewegung längs ihrer eigenen Fläche mit einer Geschwindigkeit u fortbewegt.

Jeder Streifen von einer der Einheit gleichen Breite, welcher der Richtung der Bewegung parallel ist, ist das Aequivalent eines Stromes, dessen Intensität in elektrostatischem Maasse σu ist und in elektromagnetischem Maasse $\frac{\sigma u}{a}$ ist. Nehmen wir jetzt an, dass eine zweite, der ersten parallele Ebene im Abstande δ, deren Dichte σ' sei, sich in derselben Weise und in derselben Richtung mit einer Geschwindigkeit u' bewegt, so treten zwei Arten von Wirkungen zwischen diesen Ebenen auf: eine elektrostatische Abstossung vermöge ihrer gleichnamigen Ladungen und eine elektrodynamische, von den gleichgerichteten, parallelen Strömen herrührende Anziehung.

Wir nehmen in der zweiten Ebene einen Streifen von der Länge l und der unendlich kleinen Breite b an und in der ersten Ebene einen parallelen unbegrenzten Streifen von der Breite dx, der im Abstande x von der Pro-

jection des Streifens bl liegt. Die von diesem unbegrenzten Streifen auf den ersteren, in der Entfernung $\sqrt{\delta^2 + x^2}$ liegenden, ausgeübte Wirkung hat den Wert (**480**)

$$2\frac{\sigma u}{a}dx\frac{\sigma' u'}{a}b\frac{l}{\sqrt{\delta^2 + x^2}} = 2\frac{\sigma\sigma' uu'}{a^2}b \cdot l\frac{dx}{\sqrt{\delta^2 + x^2}},$$

und ihre Componente df längs der Normale der Ebene ist

$$df = 2\frac{\sigma\sigma' uu'}{a^2}bl\frac{\delta dx^2}{\delta^2 + x^2}.$$

Um die gesammte Wirkung der ersten beweglichen Ebene auf den betrachteten Streifen bl der zweiten zu erhalten, muss man von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ integriren, wodurch man erhält

$$f = 2\frac{\sigma\sigma' uu'}{a^2}bl\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta dx}{\delta^2 + x^2} = 2\frac{\sigma\sigma' uu'}{a^2}bl\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\delta}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

oder

$$f = 2\pi\frac{\sigma\sigma' uu'}{a^2}bl.$$

Andererseits ist die elektrostatische Ladung dieser Fläche $bl\sigma'$. Da die Wirkung der ersten, unbegrenzten Ebene auf die Masseneinheit gleich $2\pi\sigma$ ist, ist die auf diese Fläche wirkende Abstossung f' normal und hat den Wert

$$f' = 2\pi\sigma\sigma' bl.$$

Sind diese beiden Wirkungen gleich, so verhält es sich ebenso mit den andern Teilen der zweiten Ebene, und das Gleichgewicht besteht zwischen ihnen. In diesem Falle muss $uu' = a^2$ oder, wenn die Geschwindigkeiten u und u' gleich sind, $u = a$ sein.

Die Constante a ist demnach die Geschwindigkeit, die man zwei unbegrenzten parallelen Ebenen geben muss, die gleichförmig elektrisirt sind und sich in derselben Richtung bewegen, wenn ihre elektrodynamische Anziehung ihrer elektrostatischen Abstossung gleich sein soll. Da die Geschwindigkeit a die des Lichtes ist, ist der Versuch in dieser Form unausführbar.

617. — Um die Grössenordnung der Wirkungen zu bestimmen, die man thatsächlich erhalten kann, bemerken wir, dass ein unbegrenzter Streifen von der Breite b und der Dichte σ, der in seiner Richtung mit einer Geschwindigkeit u bewegt wird, mit einem Strome gleichwertig ist, dessen elektromagnetische Intensität $\frac{u\sigma}{a}b$ ist. Nimmt man an, dass derselbe sich im Abstande e von einem andern, ähnlichen Streifen befindet, und ladet man

einen so gebildeten Condensator auf ein elektrostatisches Potential V, so erhält man (81)

$$\sigma = \frac{V}{4\pi e}.$$

Man kann aber mit der Elektrisirmaschine Potentiale erhalten, die 100,000 Daniell'schen Elementen gleichkommen, also ungefähr 10^5 Volts oder $10^5.10^8$ Einheiten *C. G. S.* Mit derartigen Maschinen erhält man also in elektrostatischen Einheiten

$$V = \frac{10^5.10^8}{a} = \frac{10^{13}}{3.10^{10}} = 333,$$

was bis auf kleine Grössen ergiebt $\sigma = \frac{30}{e}$.

Nimmt man $b = 10$ und $e = 1$ an, so ist die elektromagnetische Intensität des Stromes

$$I = \frac{u.300}{3.10^{10}} = \frac{u}{10^8} C.\ G.\ S.$$

Da ein Volt in einem Kreise von n Ohm einen Strom von der Intensität

$$I' = \frac{1}{10n} C.\ G.\ S.$$

liefert, so sieht man, dass die Geschwindigkeit, die man dem Streifen geben muss, um denselben Strom zu erhalten, ist

$$u = \frac{10^7}{n} = \frac{100,000}{n} \text{ Meter.}$$

Es muss hervorgehoben werden, dass der durch Bewegung eines elektrischen Körpers erzeugte Strom viel schwerer zu constatiren ist, als der eines gewöhnlichen Elementes, da man denselben direkt auf die Nadel einwirken lassen müsste, ohne die Mitwirkung der Multiplication.

Rowland hat durch den Versuch gezeigt, dass die Drehung einer elektrisirten Scheibe einen merklichen Effect auf eine Magnetnadel ausübt, und dass die Wirkung von derselben Ordnung ist, wie sie durch die letzten Betrachtungen angezeigt ist.

10. Capitel.

Allgemeine Theorien.

618. **Ampère's Anschauungen.** — Um die Elementarformeln für die elektrodynamischen Wirkungen aufzustellen, stützte sich Ampère allein auf die Annahme von Centralkräften und auf gewisse Erfahrungsthatsachen, ohne irgend einen besonderen Gesichtspunkt über die Natur der elektrischen Ströme selbst einzuführen. Immerhin suchte er seit dem Jahre 1822 „von der Kraft Rechenschaft zu geben, die zwischen zwei Elementen von Leitungsdrähten unter der Einwirkung des im Raume verbreiteten Fluidums auftritt, dessen Schwingungen die Lichterscheinungen erzeugen." Ampère deutet auch noch eine andere Auffassungsweise für die Erscheinungen an: „Wenn man annimmt, dass die elektrischen Moleküle, die in den Leitungsdrähten unter der Einwirkung der Batterie in Bewegung gesetzt werden, dort stetig ihren Ort verändern, sich dort in jedem Augenblicke zu einem neutralen Fluidum vereinigen, sich wieder trennen, um sich sogleich wieder mit andern Molekülen des Fluidums von entgegengesetzter Natur zu vereinigen, so liegt kein Widerspruch in der Annahme, dass aus den im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates stehenden Wirkungen, die jedes Molekül ausübt, zwischen zwei Elementen von Leitungsdrähten eine Kraft resultiren kann, die nicht blos von ihrem Abstande, sondern auch von den Richtungen der beiden Elemente abhängt, längs deren sich die elektrischen Moleküle bewegen, sich mit Molekülen der entgegengesetzten Art vereinigen und sich im nächsten Augenblicke von denselben trennen, um sich sofort mit andern zu verbinden" (Mémoires de l'Institut 1823, p. 294 u. 299). Ampère hat die Entwicklung dieser Ideen nicht weiter verfolgt; er hielt die Zeit noch nicht für gekommen, in der dies mit Nutzen hätte geschehen können.

Von ähnlichen Grundgedanken gehen die von verschiedenen Physikern aufgestellten Hypothesen aus, insbesondere die von Weber und von Maxwell; wir wollen eine zusammenfassende Uebersicht über die vorliegenden Hypothesen geben.

619. **Formeln von Gauss und Weber.** — Zieht man die Einwirkungen elektrischer Massen, die in den Leitern circuliren, auf einander in Rechnung, so muss die Wirkung zweier elektrischer Massen m und m' eine Funktion

sein nicht blos ihres Abstandes, sondern auch ihrer relativen Bewegung, und die so gestellte Aufgabe erscheint unbestimmt. Eine von den Hypothesen — sie rührt von Gauss her — besteht in der Annahme, dass diese Wirkung zwar längs der sie verbindenden Geraden gerichtet, dem Produkt der Massen proportional und dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional ist, dass dieselbe aber noch ein Glied enthält, welches einer Potenz der relativen Geschwindigkeit u der beiden Massen proportional ist, und ein anderes Glied, welches einer Potenz der ihrem Abstande parallelen relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ proportional ist. Diese Potenzen müssen gerade sein, wenn die Wirkung sich nicht ändern soll, wenn man zugleich die Richtungen beider Bewegungen und die der Ströme selbst ändert, und man genügt der Aufgabe, wenn man die Exponenten gleich 2 annimmt, woraus sich das Elementargesetz ergiebt

$$(1) \qquad \frac{mm'}{r^2}\left[1 + \alpha u^2 + \beta\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Weber hat zunächst die einfachen Fälle zweier auf derselben Geraden liegenden oder gegen dieselbe Gerade senkrechten Elemente untersucht. Im ersten Falle muss man annehmen, dass die Wirkung der beiden Massen ein Glied enthält, welches von ihrer relativen Geschwindigkeit abhängt, und er hat vorausgesetzt, dass dieses Glied dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Der zweite Fall führte Weber zur Einführung der Beschleunigung längs der Geraden, und die einfachste Hypothese war die Annahme, dass dieses neue Glied der Beschleunigung proportional ist. Es folgt hieraus ein anderes Elementargesetz

$$(2) \qquad \frac{mm'}{r^2}\left[1 + \alpha'\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \beta'\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Die Coefficienten α, β, α' und β', die in diesen beiden Ausdrücken (1) und (2) vorkommen, bleiben noch zu bestimmen.

620. — Wir betrachten zunächst zwei bewegliche Körper, die sich beziehungsweise auf zwei Curven s und s' mit den constanten Geschwindigkeiten v und v' bewegen. Durchlaufen die beiden Körper die Elemente ds und ds', die im Abstande r liegen und den Winkel ε mit einander bilden, so ist

$$u^2 = v^2 - 2vv'\cos\varepsilon + v'^2,$$

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ und } v' = \frac{ds'}{dt}.$$

Hieraus findet man

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = v^2\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 2vv'\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} + v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}.$$

Nimmt man an, dass die beiden Curven s und s' Träger von Strömen mit den Intensitäten I und I' sind, so ist die Wirkung der Elemente ds und ds' nach der Ampère'schen Formel (**351**), wenn man die Kraft als eine repulsive betrachtet,

$$(3) \quad -\frac{2II'dsds'}{r^2}\left[\cos\varepsilon + \frac{3}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right] = \frac{2II'dsds'}{r^2}\left[r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right].$$

621. — Nunmehr nehmen wir an, dass das Element ds elektrische Massen m und m_1 enthält, die bez. die Geschwindigkeiten v und v_1 besitzen, und dass ebenso das Element ds' Massen m' und m'_1 mit den Geschwindigkeiten v' und v'_1 enthält. Bestimmt man die Wirkungen der Massen m und m_1 auf die Massen m' und m'_1 nach den Formeln (1) und (2), so muss die Resultante wieder das Ampère'sche Gesetz in einer der beiden Formen (3) liefern, und folglich darf dieselbe nur Glieder enthalten, in welchen das Produkt vv' der Geschwindigkeiten als Faktor vorkommt.

Die Glieder, welche die Quadrate der Geschwindigkeiten enthalten, sind bis auf einen Faktor

$$(mv^2 + m_1v_1^2)(m' + m'_1) \text{ und } (m'v'^2 + m_1v_1^2)(m + m_1).$$

Sollen diese Glieder Null sein, dann muss man haben

$$(4) \quad mv^2 + m_1v_1^2 = 0 \text{ oder } m' + m'_1 = 0.$$

Diesen beiden Bedingungen wird gleichzeitig genügt, wenn man mit Weber annimmt, dass ein elektrischer Strom von der Intensität I aus zwei Strömen von entgegengesetzten Elektricitäten gebildet ist, die sich mit der gleichen Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen bewegen und einzeln eine halb so grosse Intensität wie der beobachtete Strom besitzen. Ebenso ist die Annahme notwendig, dass die algebraische Summe der in jedem Stromelemente vorhandenen elektrischen Massen für den stationären Zustand Null ist, wenn man der Bedingung (**203**) genügen will, dass die Dichte in dem Leiter Null ist; aber ohne etwas über das Verhältnis der elektrischen Massen von entgegengesetztem Zeichen zu bestimmen, brauchte nur die Summe $mv^2 + m_1v_1^2$ in jedem Elemente Null zu sein, es brauchten also nur elektrische Massen von entgegengesetztem Zeichen mit der nämlichen lebendigen Kraft vorhanden zu sein.

Die Elektricitätsmenge, die durch den Querschnitt des ersten Leiters in der Zeiteinheit geht, ist gleich $mv + m_1v_1$; bezeichnet man mit a die Anzahl elektrostatischer Einheiten, welche die elektromagnetische Einheit enthält, so erhält man

$$(5) \quad \begin{aligned} mv + m_1v_1 &= aIds, \\ m'v' + m'_1v'_1 &= aI'ds'. \end{aligned}$$

Nimmt man die Existenz gleicher und entgegengesetzter Ströme an, so gehen diese Gleichungen über in

$$(6)\qquad \begin{aligned} 2mv &= aI ds, \\ 2m'v' &= aI'ds'. \end{aligned}$$

Wenn man die Wirkung der Massen m und m_1 auf die Massen m' und m'_1 bestimmt, sind die Glieder, welche von dem Produkte der Geschwindigkeiten abhängen, bei der ersten Hypothese

$$\frac{2\beta}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}(mv + m_1v_1)(m'v' + m'_1v'_1) - \frac{2\alpha}{r^2}(mv + m_1v_1)(m'v' + m'_1v')\cos\varepsilon,$$

also

$$-\frac{2II'ds ds'}{r^2}\left[a^2\alpha\cos\varepsilon - a^2\beta\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right];$$

und mit der Hypothese von Weber

$$2\frac{(mv + m_1v_1)(m'v' + m'_1v'_1)}{r^2}\left[\alpha'\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} + \beta'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right]$$

oder

$$\frac{2II'ds ds'}{r^2}\left[a^2\beta'\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} + a^2\alpha'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right].$$

Was das von der relativen Bewegung unabhängige Glied betrifft, so ist dasselbe in beiden Fällen gleich $\frac{(m + m_1)(m' + m'_1)}{r^2}$. Dieses Glied muss Null sein, wenn in jedem Drahte zwei entgegengesetzt gleiche Ströme vorhanden sind; andernfalls würde dasselbe auf eine elektrostatische Wirkung zwischen den Leitern hinweisen, welche der Versuch bis jetzt noch nicht constatirt hat.

Um dem Ampère'schen Gesetze zu genügen, muss im ersten Falle sein

$$a^2\alpha = 1,\ a^2\beta = -\frac{3}{2},$$

und im zweiten

$$a^2\beta' = r,\ a^2\alpha' = -\frac{1}{2}.$$

Die Ausdrücke (1) und (2), welche die Elementarwirkung zwischen zwei elektrischen Massen angeben, gehen dann über in

$$(1)'\qquad \frac{mm'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{a^2}\left(u^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right],$$

$$(2)'\qquad \frac{mm'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{a^2}\left(r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)\right] = mm'\left[\frac{1}{r^2} + \frac{2}{a^2\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right].$$

622. — Der erste Ausdruck (1)', der in den Gauss'schen Manuscripten gefunden wurde, ist mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie unvereinbar, denn er würde zu der Consequenz führen, dass ein begrenztes physikalisches System eine ohne Grenzen wachsende Energiemenge liefern könnte.

Die Weber'sche Formel dagegen ist mit diesem Prinzip vereinbar.*) Denn der Ausdruck für die Kraft (2)' kann als die mit entgegengesetztem Zeichen versehene Ableitung nach r der Funktion

$$\psi = \frac{mm'}{r}\left[1 - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] \tag{7}$$

aufgefasst werden.

Die durch die Abstossungswirkung einer festen Masse auf eine bewegliche geleistete Arbeit ist gleich der Differenz $\psi_0 - \psi_1$ der Werte der Funktion ψ, die sich auf diese beiden Massen für die Anfangs- und Endlage beziehen. Die Funktion ψ kann als Darstellung der potentiellen Energie des Systems der beiden Massen betrachtet werden; dieselbe hängt nur von ihrem Abstande und ihrer relativen Geschwindigkeit längs der Geraden r ab; sie erhält denselben Wert wieder, wenn eine der Massen gegen die andere einen geschlossenen Weg beschreibt und in denselben Punkten immer dieselbe Geschwindigkeit besitzt.

Da die Induction eine Consequenz des Ampère'schen Gesetzes und des Prinzips der Erhaltung der Energie ist, muss die Weber'sche Formel, welche beiden Bedingungen in gleicher Weise genügt, die Induction liefern.

623. — Diese Formel lässt auch die auf zwei geschlossene Kreise bezügliche potentielle Energie direkt finden. Denn ersetzt man $\frac{dr}{dt}$ durch seinen Wert als Funktion der Geschwindigkeiten der elektrischen Massen, so findet man nach der Weber'schen Hypothese, dass das Potential eines Elementes auf ein anderes ausgedrückt wird durch

$$\psi\,(ds, ds') = -\,II'\,ds\,ds'\,\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,.$$

Die potentielle Energie der beiden Kreise ist demnach

$$W = -\,II'\int\!\!\int \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r'}{\partial s'}\,ds\,ds' = II'\int\!\!\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'. \tag{8}$$

Dies ist die bereits oben (**353**) gefundene Formel von Neumann.

Sind die Ströme constant und durchfliessen sie Kreise von unveränderlicher Form, so ist die Resultante der von dem einen Strome auf eine beliebige Masse m' des andern ausgeübten Wirkungen normal gegen ihre Trajectorie.

624. Induktionserscheinungen. — Wir nehmen jetzt an, dass die Kreise sich verschieben, und dass die Intensitäten veränderlich sind. Der Abstand r ist dann nicht wie oben eine Funktion allein der beiden unabhängigen Variabeln s und s', sondern derselbe ist ausserdem eine Funktion

*) Vgl. die hierauf bezüglichen Aufsätze von Helmholtz, *Pogg. Ann.* 102, p. 59 und in den *Gesammelten Abhandlungen.*

der Zeit, und es ist $r = \varphi(s, s', t)$. Für einen gegebenen Wert von t giebt die Funktion φ den Abstand zweier Elemente der Kreise an; ist t veränderlich, und fasst man s und s' als Funktionen von t auf, so giebt der Wert von φ den Abstand der beiden auf den beweglichen Kreisen in Bewegung begriffenen elektrischen Massen an. Was die Geschwindigkeiten v und v' betrifft, so hängen dieselben bei constantem Querschnitt des Leiters in keiner Weise von s und s' als unabhängigen Variabeln ab, da in jedem Augenblicke die Stromintensität in allen Punkten des Kreises denselben Wert hat. Man erhält demnach für die relative Geschwindigkeit der beiden Massen

$$\frac{dr}{dt} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial r}{\partial t};$$

und die relative Beschleunigung ist, wenn man die Ableitungen $\frac{\partial r}{\partial s}$ und $\frac{\partial r}{\partial s'}$ als Funktionen von s und s' allein auffasst,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = v^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + 2vv'\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'} + v\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial v'}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.$$

Die Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ und die Beschleunigung $\frac{d^2r}{dt^2}$ beziehen sich auf die elektrischen Massen, während die Ausdrücke $\frac{\partial r}{\partial t}$ und $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ auf der rechten Seite sich auf die Abstände zweier Elemente der beiden Kreise beziehen.

Die mechanische Wirkung von ds und ds' wird wie oben erhalten, wenn man die Summe der Wirkungen bildet, welche die Massen des Elementes ds auf die des Elementes ds' ausüben. Mit der Formel und der Hypothese von Weber sieht man leicht, dass in dieser Summe wie vorher nur die Glieder mit vv' und zwar mit den bereits gefundenen Coefficienten bleiben. Es folgt daraus, dass im variabeln Zustande die mechanische Wirkung in jedem Augenblicke mit der conform ist, welche die Ampère'sche Formel ergeben würde.

625. — Die elektromotorische Kraft, die auf das Element ds' wirkt, ist die Kraft, die die entgegengesetzt gleichen, in diesem Element enthaltenen Massen zu trennen und in entgegengesetzten Richtungen fortzuziehen sucht. Man erhält ihren Wert, indem man die Differenz der in Richtung des Elementes ds' auf jede einzelne Masse desselben von den beiden Massen des Elementes ds ausgeübten Wirkungen bildet. Wenn man aber die Summe der Wirkungen der beiden Massen $+m$ und $-m$ des Elementes ds auf die eine der Massen m' des Elementes ds' bildet, so sind die bestehen bleibenden Glieder solche mit v, vv' und $\frac{dv}{dt}$, die zugleich mit m ihr Zeichen wechseln. Unter diesen sind die einzigen, welche in der schliesslichen Differenz bleiben, die, welche mit der Geschwindigkeit v ihr Zeichen wechseln, welches auch übrigens das Zeichen von v' sein möge. Diese Glieder redu-

ciren sich auf zwei, von denen das eine von $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ herrührt, und zwar ist dies $2v\,\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t}$, das andere von $\frac{d^2r}{dt^2}$ herkommt, nämlich $\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}$.

Die so berechnete Differenz ist gleich

$$\frac{4mm'}{a^2r^2}\left[r\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}-v\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t}\right]=\frac{1}{r^2}\left[r\frac{\partial I}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}-I\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t}\right]ds\,ds',$$

wenn man die Gleichungen (6) berücksichtigt und die Intensität in dem Elemente ds' der Einheit gleich annimmt.

Man muss die Componente dieser Wirkung längs ds' bilden und folglich den letzten Ausdruck mit $\frac{\partial r}{\partial s'}$ multipliciren. Berücksichtigt man, dass

$$r\,\frac{\partial I}{\partial t}-I\frac{\partial r}{\partial t}=r^2\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{I}{r}\right)$$

ist, so ergiebt sich für die elektromotorische Elementarkraft

$$d^2E=\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial s'}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{I}{r}\right)ds\,ds'.$$

Die gesammte elektromotorische Kraft, die in dem Kreise s' von dem Kreise s erzeugt wird, erhält man, wenn man diesen Ausdruck nach s und s' integrirt. Da die Intensität I ausschliesslich eine Funktion der Zeit ist, und da die Grenzen des Integrals ihrerseits von der Zeit unabhängig sind, kann man setzen

(9) $$E=\frac{d}{dt}I\int\!\!\int\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds'.$$

Man erhält demnach (**353**)

(10) $$E=-\frac{d}{dt}I\int\!\!\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'=-\frac{d}{dt}(IM)=\frac{dQ}{dt},$$

was den allgemeinen Ausdruck (**518**) für die in einem Kreise von einem äusseren Kreise hervorgerufene elektromotorische Kraft ergiebt. Man kann in derselben Weise auch die andern Fälle der Induction wiederfinden.

626. Verschiedene Versuche einer Theorie. — Zahlreiche Versuche sind gemacht worden, beispielsweise von Weber, die Erscheinungen der statischen Elektricität, die dauernden Ströme und die Inductionswirkungen in einer und derselben Theorie zu vereinigen und ein Band zwischen der Elektricität, dem Magnetismus und dem Lichte herzustellen.

Gauss hat die Ansicht ausgesprochen, dass die elektrischen Wirkungen nicht augenblicklich eintreten können, und dass man den Schlüssel für die elektrodynamischen Erscheinungen finden müsste, wenn man das Gesetz für die Fortpflanzung der elektrischen Kräfte finden könnte.

Verschiedene Mathematiker haben die Aufgabe in dieser Richtung behandelt. Man kann zum Beispiel die Inductionserscheinungen erklären, wenn man annimmt, dass das elektrische Potential sich in einem Mittel mit einer gewissen Geschwindigkeit ausbreitet; und zwar wäre diese Geschwindigkeit nach Riemann die des Lichtes, nach der Theorie von C. Neumann eine solche von einer ganz andern Grössenordnung.

Betti vergleicht die Wirkung der Ströme mit der eines Systems von Elementarmagneten, die in jedem Punkte Tangenten an der Grenzlinie der Kreise sind und periodisch in entgegengesetzten Richtungen polarisirt werden, und er fasst die magnetische Kraft als mit einer gewissen Geschwindigkeit in dem Mittel fortgeführt auf.

Lorenz hat gezeigt, dass man, wenn man zu den von Kirchhoff angegebenen Gleichungen über die elektrischen Ströme passend gewählte Glieder hinzufügt, die keine experimentelle Folgerung verändern, eine neue Reihe von Gleichungen erhält, welche eine Wirkung von Element zu Element des Mittels und eine Wellenbewegung andeuten, die sich mit der Geschwindigkeit des Lichtes verbreitet. Er gelangt so zu Resultaten, die denen ähnlich sind, welche Maxwell aus einer vollständig verschiedenen Theorie abgeleitet hat.

Innerhalb derselben Anschauungsweise hat Edlund zu zeigen versucht, dass die elektrischen Erscheinungen, sowohl die statischen als die dynamischen, sich mit Hülfe eines einzigen Fluidums erklären lassen, das aller Wahrscheinlichkeit nach nichts anderes ist als der Aether.

Edlund nimmt an, dass alle Körper im neutralen Zustande eine normale Menge Aether enthalten, und dass eine positive oder negative Elektrisirung einer Ladung von Aether entspricht, die grösser oder kleiner ist als die normale. Ein elektrisirter Körper erleidet in einem neutralen Raume infolge der Symmetrie keine Einwirkung, welches auch seine elektrische Ladung sein mag. Man findet hieraus leicht, dass die Einwirkung zweier Körper auf einander proportional ist dem Ueberschuss ihrer Ladungen über die normalen Ladungen.

Ein elektrischer Strom ist dann nur ein Transport von Aether in einer bestimmten Richtung; nimmt man dann an, dass die Wirkung zweier Massen von ihrer Geschwindigkeit und ihrer relativen Beschleunigung längs der sie verbindenden Geraden abhängt, so gelangt man auf einem Wege, der dem Weber'schen ähnlich ist, und indem gewisse Coefficienten durch Identificirung der Formel mit den Versuchsresultaten bestimmt werden, dazu, von den Ampère'schen Gesetzen und den Inductionserscheinungen Rechenschaft zu geben.

Alle angeführten Theorien deuten auf die Existenz eines Zwischenmediums hin; denn wenn irgend ein mechanischer Effect, eine Kraft oder ein Potential, mit einer endlichen Geschwindigkeit von einem Partikel auf ein anderes übergeht, muss notwendig ein Mittel von passender Structur Träger desselben sein in der Zeit, während dieser Effect das eine Partikel

verlassen hat, bis er das zweite erreicht hat. Maxwell zog direkt die Eigenschaften dieses Mittels in Betracht und gelangte dazu, zwischen den elektrischen und den optischen Erscheinungen bemerkenswerte, mit der Erfahrung übereinstimmende numerische Beziehungen festzustellen.

627. Elektromagnetische Theorie des Lichtes. — Wir haben mehrfach gesehen, wie sehr die verschiedenen Erscheinungen der Elektricität und des Magnetismus die Auffassung Faraday's begünstigen, die darin besteht, die Idee der Fernwirkung aufzugeben und die Kräfte als durch elastische Reaktionen eines Zwischenmittels übertragen aufzufassen. Es ist dies eine Hypothese, die der analog ist, welche heutzutage als Grundlage der physikalischen Theorie des Lichtes dient; aber es wäre jeder wissenschaftlichen Anschauung zuwider, ebenso viele verschiedene Medien anzunehmen, als Erscheinungen zu erklären sind, wie man dies früher mit den verschiedenen Annahmen des Wärmefluidums, der elektrischen Fluida und der magnetischen Fluida gethan hat.

Die grosse Aufgabe, welche die Philosophie der Wissenschaft stellt, ist die, die Constitution eines einzigen Mediums zu erkennen, welches zugleich alle physikalischen Erscheinungen zu erklären gestattet. Zeigt nun der Versuch, dass die elektromagnetischen Störungen sich nicht blos in der Luft, sondern in allen Körpern mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes verbreiten, so hat die Frage schon einen grossen Schritt vorwärts gethan, denn es ist gezeigt, dass dieses Medium vorhanden ist, und dass aller Wahrscheinlichkeit nach die elektrischen und die optischen Erscheinungen nur verschiedene Aeusserungen der Eigenschaften sind, mit denen dasselbe behaftet ist. Dies ist die Consequenz der Maxwell'schen Theorie. Die von Faraday entdeckte Einwirkung eines magnetischen Feldes auf die Polarisation des Lichtes, welches durch dasselbe hindurchgeht, ist dann eine natürliche Folge des Bandes, welches das gemeinschaftliche Medium zwischen den beiden Klassen von Erscheinungen herstellt.

628. Allgemeine Gleichungen. — Um die Bedingungen der Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung in einem Mittel zu bestimmen, setzen wir dieses Mittel als in Ruhe befindlich voraus, also von jeder andern Bewegung als von der, welche von der Störung selbst herrührt, befreit.

Die Gleichungen (11), (13) und (14) aus § 572 ergeben

$$u' = u + \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$4\pi f = KP,$$

$$u = Pc.$$

Man findet daraus

$$u' = cP + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t},$$

eine Gleichung, die man in der symbolischen Form schreiben kann

$$u' = \left(c + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\right) P. \tag{11}$$

Da das Mittel als in Ruhe befindlich vorausgesetzt ist, sind die Ableitungen der Coordinaten nach der Zeit Null. Die Gleichungen (10) in § 571 ergeben dann

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

es folgt daraus

$$4\pi u' = -\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right). \tag{12}$$

Andererseits ist nach den Gleichungen (12) § 572

$$4\pi u' = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \tag{13}$$

und die Gleichungen (2) § 567 ergeben

$$\mu\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) - \Delta F = \frac{\partial \theta}{\partial x} - \Delta F,$$

wenn man setzt

$$\theta = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z},$$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (13) ein, so ergiebt sich

$$\mu 4\pi u' = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \Delta F\right). \tag{14}$$

Durch Eliminirung von u' aus den Gleichungen (12) und (14) und Wiederholung der analogen Operationen für die andern Coordinaten erhält man schliesslich

$$\begin{aligned}
&\mu\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial x} - \Delta F = 0,\\
&\mu\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} - \Delta G = 0,\\
&\mu\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial \theta}{\partial z} - \Delta H = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Wenn man die partiellen Ableitungen dieser Gleichungen beziehungsweise nach x, y und z bildet und dieselben addirt, ergiebt sich

$$\mu\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \Delta \psi\right) = 0. \tag{16}$$

Wenn das Mittel kein Leiter ist, ist $c=0$, und der Wert von $\Delta\psi$, welcher der Dichte der freien Elektricität proportional ist, ist von der Zeit unabhängig. Es ergiebt sich dann $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0$, also dass θ eine lineare Funktion der Zeit oder eine constante Grösse ist. Diese beiden Funktionen θ und ψ spielen demnach keine Rolle für Nichtleiter in den von periodischen Störungen herrührenden Erscheinungen.

629. Fortpflanzung von Wellenbewegungen in einem Dielektricum. — In dem Falle eines Dielektricums können demnach die Gleichungen (15) reducirt werden auf

$$(17)\qquad \begin{aligned} K\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}-\Delta F&=0,\\ K\mu\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-\Delta G&=0,\\ K\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}-\Delta H&=0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen definiren die Art, in der die Funktionen F, G, H mit der Zeit variiren, und folglich die Ausbreitung der elektromagnetischen Störungen; dieselben haben die nämliche Form wie die, welche die schwingenden Bewegungen in einem festen elastischen Körper bestimmen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V einer Erschütterung ist durch den Ausdruck gegeben

$$(18)\qquad V=\frac{1}{\sqrt{K\mu}}.$$

630. *Ebene Wellen.* — Nehmen wir an, dass zu irgend einer Zeit die elektromagnetischen Störungen eine zur zAchse senkrechte ebene Welle bilden, so wird das Mittel von ebenen Wellen durchsetzt, die der ersten parallel sind, und alle Grössen, deren Veränderungen diese Wellen bestimmen, sind allein Funktionen von z und t und unabhängig von x und y. Die Gleichungen (2) in § 567 gehen dann über in

$$\begin{aligned} \mu X&=\frac{\partial G}{\partial z},\\ \mu Y&=-\frac{\partial F}{\partial z},\\ \mu Z&=0. \end{aligned}$$

Die den Gleichungen (13) analogen ergeben ebenso

$$(19)\qquad \begin{aligned} 4\pi u'&=\frac{\partial Y}{\partial z}=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2},\\ 4\pi v'&=-\frac{\partial X}{\partial z}=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2},\\ 4\pi w'&=0. \end{aligned}$$

Man sieht bereits, dass die elektrische Störung ebenfalls in der Wellenebene liegt und senkrecht zur elektromagnetischen Störung ist; denn wenn $Y = 0$ ist, wenn also die elektromagnetische Störung der xAchse parallel ist, erhält man $u' = 0$, und die elektrische Störung ist der yAchse parallel.

Für ein nicht leitendes Mittel ergeben die Gleichungen (12) und die analogen auf die andern Coordinaten bezüglichen Beziehungen

$$
(20) \qquad \begin{aligned}
4\pi u' &= -K\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \\
4\pi v' &= -K\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \\
4\pi w' &= -K\frac{\partial^2 H}{\partial t^2},
\end{aligned}
$$

es folgt daraus

$$
(21) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{K\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\
&\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{1}{K\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \qquad\qquad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \\
&\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0; \qquad\qquad\qquad\quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Die letzte von diesen Gleichungen hat das Integral

$$
(22) \qquad H = A + Bt,
$$

in welchem Ausdruck A und B Funktionen von z sind. Diese Grösse H ist demnach constant oder verändert sich mit der Zeit. In keinem Falle tritt dieselbe in die Fortpflanzung periodischer Erscheinungen ein.

Die beiden ersten Gleichungen haben zu Integralen Ausdrücke von der Form

$$
(23) \qquad \begin{aligned}
F &= f_1(z - Vt) + f_2(z + Vt), \\
G &= \varphi_1(z - Vt) + \varphi_2(z + Vt).
\end{aligned}
$$

Die Werte von F und von G setzen sich aus zwei gesonderten Teilen zusammen. Der erste ändert sich nicht, wenn man der Reihe nach setzt $z = 0$, $t = 0$, oder $z = V$ und $t = 1$; derselbe stellt eine ebene Welle dar, die sich parallel zur zAchse mit einer Geschwindigkeit V bewegt. Der zweite stellt gleichfalls eine ebene Welle dar, die sich in der entgegengesetzten Richtung mit derselben Geschwindigkeit bewegt.

631. — Eine magnetische Störung in Form einer ebenen Welle ruft demnach zwei ebene Wellen hervor, die sich nach beiden Seiten mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen.

Ist $G = 0$, also die magnetische Kraft der yAchse parallel und gleich $-\frac{\partial F}{\partial z}$, so ist die elektromotorische Kraft der xAchse parallel und hat den Wert $-\frac{\partial F}{\partial t}$. Nimmt man die Identität dieser Erscheinungen mit denen des Lichtes an,

so entspricht der vorliegende Fall einem polarisirten Lichtstrahl. Die Polarisationsebene fällt dann entweder mit der Ebene der magnetischen Störung oder mit der Ebene der elektrischen Störung, welche gegen erstere senkrecht ist, zusammen.

Ist die ursprüngliche Störung eine periodische, und bildet sie eine einfache, $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ proportionale Schwingung, so findet sich dieselbe Eigenschaft in jeder Ebene, die der ursprünglichen Welle parallel ist, wieder, und die Wellenlänge der Erscheinung ist der von der Ausbreitung der Bewegung während der Dauer T einer Periode durchlaufene Abstand VT.

Ist die Störung kreisförmig, kann dieselbe also durch einen beweglichen Körper vorgestellt werden, der einen Kreisumfang mit gleichförmiger Bewegung beschreibt, so tritt dieselbe Eigenschaft in den fortgepflanzten Wellen wieder auf, und die Ebenen, welche durch den Strahl und die magnetische Kraft oder die elektrische Verschiebung gehen, sind stets gegen einander senkrecht. Dies wäre bei einem kreisförmig polarisirten Lichtstrahl der Fall.

632. Verteilung der Energieen. — Wir haben gesehen (**120**), dass in einem elektrischen System die Energie des Mittels für die Volumeneinheit gleich dem halben Produkt der Verschiebung in die elektrische Kraft ist. Ebenso ist in dem Felde eines Stromsystems (**570**) die Energie für die Volumeneinheit gleich dem Quotienten des Quadrates der Induction durch $8\pi\mu$.

Wir nehmen an, dass die betrachtete Welle polarisirt ist, und dass die elektrische Störung längs der xAchse gerichtet ist. Man erhält dann $X = Z = 0$; $v' = w' = 0$; $g = h = 0$; $Q = R = 0$; $G = H = 0$.

Die elektrische Energie für die Volumeneinheit wird ausgedrückt durch

$$\frac{1}{2} fP = \frac{K}{8\pi} P^2 = \frac{K}{8\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2,$$

und die elektromagnetische Energie durch

$$\frac{1}{8\pi\mu}(\mu^2 Y^2) = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Diese beiden Ausdrücke sind gleich; denn wenn man beide Seiten der ersten der Gleichungen (21) mit den gleichen Faktoren $\frac{\partial F}{\partial t}$ und $\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$ multiplicirt und nach t integrirt, erhält man

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = K\mu\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2.$$

Die gesammte Energie des Mittels, in dem sich die Wellen fortpflanzen, tritt demnach zur Hälfte in Form von elektrostatischer Energie und zur Hälfte in Form von elektromagnetischer Energie auf.

Wir bezeichnen mit p jede dieser Energien für die Volumeneinheit. Infolge seines elektrischen Zustandes (**104**) erleidet das Mittel eine der

xAchse parallele Spannung $\frac{p}{2}$ und einen Druck, parallel der yAchse und der zAchse von demselben Werte. Infolge seines elektromagnetischen Zustandes erleidet das Mittel dieselben Wirkungen, nur dass man die xAchse mit der yAchse zu vertauschen hat. Diese Wirkungen heben sich in der Wellenebene auf, und es bleibt normal gegen diese Ebene ein Druck p bestehen, der der Hälfte der Gesammtenergie für die Volumeneinheit gleich ist.

Ein Lichtstrahl ruft demnach in einem Mittel einen der Fortpflanzungsrichtung parallelen Druck hervor und würde auf eine Metallplatte, der er begegnet, abstossend wirken. Es ist möglich, dass diese Wirkung bei einem Teile der Bewegungen der Radiometer auftritt.

633. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. — Die wahre Controle dieser Theorie ist demnach die, dass in allen Mitteln die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der magnetischen Störungen die nämliche wie die des Lichtes sein muss.

Wir nehmen zunächst an, dass das betrachtete Mittel die Luft ist. Der Coefficient K ist dann der Einheit gleich, wenn man die elektrostatischen Einheiten zur Messung wählt. In dem elektromagnetischen System ist der Wert dieses Coefficienten (608) $\frac{1}{a^2}$.

Es folgt daraus

$$V = \frac{1}{\sqrt{K}} = a.$$

Demnach ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Störung in der Luft gleich dem Verhältnisse der Einheiten. Dieses Verhältnis muss demnach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes gleich sein. Nun zeigt der Versuch für diese beiden Geschwindigkeiten Werte, die sich äusserst wenig von 300,000 Kilometer in der Sekunde unterscheiden, und die neuesten Arbeiten stimmen darin überein, dass sie Zahlen liefern, die um so näher an einander liegen, mit je grösserer Genauigkeit die Messungen gemacht sind. Eine derartige Uebereinstimmung kann keine Folge des Zufalls sein, und die geistvolle Theorie Maxwell's findet demnach im Versuche eine eclatante Bestätigung.

634. Specifische inductive Capacität. — Wir fassen jetzt ein dielektrisches Mittel ins Auge, dessen Brechungscoefficient n ist, und dessen specifische inductive Capacität grösser als die der Luft ist. Bezeichnen wir mit V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Luft und mit V' diese Geschwindigkeit in dem betrachteten Mittel, so erhält man

$$nV' = V \text{ oder } n^2 V'^2 = V^2.$$

Andererseits wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V'' für elektromagnetische Störungen erhalten, wenn man K durch K' ersetzt, wodurch man erhält

$$K' V''^2 = KV^2 = 1.$$

Sollen die Geschwindigkeiten V'' und V' auch in diesem Falle gleich sein, so muss $n^2 = \frac{K'}{K}$ sein.

Aus dieser Theorie folgt demnach, dass die specifische inductive Capacität eines Dielektricums im Verhältnis zu derjenigen der Luft gleich dem Quadrate des Brechungscoefficienten desselben ist.

Hier tritt bei der experimentellen Prüfung dieser Folgerung eine Schwierigkeit auf, die von der Dispersion der brechenden Mittel herrührt. Da der Brechungscoefficient mit der Wellenlänge veränderlich ist, so ist der natürlichste Gedanke der, den Grenzwert des Coefficienten ins Auge zu fassen, also den, welcher der grössten Wellenlänge entspricht. Für das Paraffin zum Beispiel variiren die Brechungscoefficienten für die letzten leuchtenden Strahlen von 1,43 bis 1,45, und die neuesten Versuche zeigen, dass die specifische inductive Capacität gleich 2,29 ist, einer Zahl, deren Quadratwurzel 1,51 nicht sehr weit von dem Brechungsindex entfernt ist. Die Uebereinstimmung ist viel weniger zufriedenstellend für die meisten festen durchsichtigen Dielektrica wie für die verschiedenen Glassorten, den isländischen Spath, den Flussspath und den Quarz; die specifische inductive Capacität dieser Körper ist stets viel grösser, manchmal doppelt so gross als das Quadrat des Brechungscoefficienten. Ebenso verhält es sich mit den vegetabilischen und den animalischen Oelen nach den neuen Versuchen von Hopkinson.

Für die Gase, deren Brechung schwächer ist, und für welche die Dispersion unberücksichtigt bleiben kann, ist die brechende Kraft $n^2 - 1$ proportional dem specifischen Gewichte oder dem Drucke, wenn die Temperatur constant ist; hieraus folgt, dass auch die specifische inductive Capacität proportional dem Drucke wachsen muss und zwar mit demselben Coefficienten wie die brechende Kraft. Diese Folgerung scheint sich nach den Untersuchungen von Boltzmann zu bestätigen.

Die Controle durch den Versuch kann demnach nicht als hinreichend zur Bestätigung der Theorie betrachtet werden; aber man wird diesem scheinbaren Mangel an Uebereinstimmung keine zu grosse Bedeutung beilegen, wenn man berücksichtigt, dass die specifische inductive Capacität mit der Dauer der Elektrisirung sehr merklich abnimmt. Die Periode der elektrischen Oscillationen, die man zur Erklärung der Lichterscheinungen annehmen muss, steht aber ausser allem Verhältnisse zu dem kürzesten Zeitintervalle, welches man im Versuche anwenden kann.

In allen Fällen kann diese Beziehung zwischen den optischen und den elektrischen Eigenschaften wenigstens als eine erste Annäherung einer Theorie betrachtet werden, die in Zukunft noch weiter durchzuarbeiten bleibt.

635. Anisotrope Mittel. — Um die Theorie auf anisotrope Mittel auszudehnen, müsste man in aller Strenge die Beziehung kennen, die zwischen der molekularen Constitution eines Mittels und dessen elektrischen Eigen-

schaften besteht, aber ohne irgend eine hypothetische Auffassung zu formuliren, braucht man nur anzunehmen, dass die specifische inductive Capacität des Mittels in den verschiedenen Richtungen nicht dieselbe ist, in andern Worten, dass die elektromotorische Kraft nicht proportional der Verschiebung ist und deren Richtung hat, sondern mit der Verschiebung durch ein System von linearen Gleichungen wie für die Erscheinungen der Ausdehnung durch die Wärme verknüpft ist.

In diesem Falle bestehen drei gegen einander senkrechte Richtungen, längs deren die elektromotorische Kraft in Richtung der Verschiebung liegt; wählt man diese Richtungen zu Coordinatenachsen und nennt man K_1, K_2 und K_3 die drei Hauptwerte der specifischen inductiven Capacität und a, b und c die drei Hauptgeschwindigkeiten der Fortpflanzung, so kann man setzen

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
4\pi f &= K_1 P = \frac{1}{a^2} P,\\
4\pi g &= K_2 Q = \frac{1}{b^2} Q,\\
4\pi h &= K_3 R = \frac{1}{c^2} R.
\end{aligned}
$$

In einem nicht leitenden Mittel, dessen elektrische Dichte in jedem Punkte constant ist, gehen dann die allgemeinen Gleichungen für die Fortpflanzung (15) über in

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
K_1 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \Delta F - \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},\\
K_2 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= \Delta G - \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2},\\
K_3 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \Delta H - \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man mit l, m, n die Cosinus der Winkel, welche die Normale einer ebenen Welle, die sich mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt, mit den Achsen bildet, so kann man setzen

$$lx + my + nz - Vt = w.$$

Stellen wir bez. durch F'', G'', H'' die zweiten Ableitungen der Funktionen F, G, H nach w dar, so gehen die Gleichungen (25) über in

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{V^2 - a^2}{a^2} + l^2\right) F'' + l\,(m G'' + n H'') &= 0,\\
\left(\frac{V^2 - b^2}{b^2} + m^2\right) G'' + m\,(n H'' + l F'') &= 0,\\
\left(\frac{V^2 - c^2}{c^2} + n^2\right) H'' + n\,(l F'' + m G'') &= 0.
\end{aligned}
$$

Durch Eliminirung der Funktionen F'', G'' und H'' aus diesen drei Gleichungen erhält man

$$(27) \qquad \frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=0.$$

Dies ist eine Gleichung von derselben Form, wie die, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in doppelbrechenden Medien bestimmt. Dieselbe ergiebt für eine beliebige Richtung zwei Geschwindigkeiten, welche zwei gesonderten Wellen entsprechen, die sich in derselben Richtung fortpflanzen. Ist die Welle beispielsweise senkrecht zur xAchse, so ist $m=0$, $n=0$, und die Werte der Geschwindigkeit sind b und c.

636. — Ist das Mittel gegen eine Achse symmetrisch, beispielsweise gegen die xAchse, so sind die beiden Geschwindigkeiten b und c gleich und die Gleichung (27) geht über in

$$l^2(V^2-b^2)^2+(1-l^2)(V^2-a^2)(V^2-b^2)=0.$$

Für eine gegen die Achse senkrechte Welle ist $l=1$; dann ist nur eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit $V=b$ vorhanden, welches auch die Richtung der elektrischen und magnetischen Erschütterungen in der Wellenebene sein möge. Ist die Welle der Achse parallel, so ist $l=0$, und man erhält zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $V=a$ und $V=b$.

Die Welle, die sich mit der Geschwindigkeit b fortpflanzt, hat den Charakter der gewöhnlichen Welle in den optischen Erscheinungen und entspricht einer zur Achse senkrechten elektrischen Störung. Da diese Welle in der Ebene der Achse und des Strahles polarisirt ist, so sieht man, dass die Polarisationsebene des Lichtes senkrecht zur Ebene der elektrischen Störung ist.

637. Unvollkommen isolirende Körper. — Nehmen wir an, dass das Mittel unvollkommen isolirend und isotrop ist, und dass die Wirkungen der Verschiebung und der Leitung von derselben Grössenordnung sind, dann verwandelt sich die Energie teilweise in Wärme, und die Welle, die sich fortpflanzt, nimmt allmälig ab.

Fassen wir eine zur zAchse senkrechte ebene Welle ins Auge, so ergeben die Gleichungen (15), da die Störung der xAchse parallel ist,

$$(28) \qquad 4\pi c\frac{\partial F}{\partial t}+K\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cdot$$

Das Integral ist eine Funktion von der Form

$$F=e^{-pz}\cos(nt-qz),$$

wo die Coefficienten den Bedingungen genügen müssen

$$\begin{aligned} q^2-p^2 &= Kn^2, \\ 2pq &= 4\pi cn. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck stellt eine Welle dar, die sich parallel der z-Achse mit einer Geschwindigkeit $V = \frac{n}{q}$ fortpflanzt, und deren Amplitude schnell kleiner wird.

Der Absorptionscoefficient p hat den Wert $2\pi c V$. Die Absorption des Lichtes muss demnach mit der elektrischen Leitungsfähigkeit wachsen. Die Erfahrung zeigt auch, dass die meisten durchsichtigen Körper dielektrisch sind, und dass die guten Leiter sehr undurchsichtig sind.

Immerhin ist diese Beziehung keine absolute, denn gewisse Metalle sind in geringer Dicke durchscheinend, und mehrere Dielektrica sind undurchsichtig. Man muss von den Elektrolyten, die fast sämmtlich durchsichtig sind, hiebei absehen, denn die Zersetzung, die den Durchgang der Elektricität begleitet, ändert die Natur der Erscheinung vollständig, und man steht nicht mehr vor einer einfachen Wirkung der Leitung.

638. Leitende Körper. — Wir betrachten endlich ein isotropes, leitendes Mittel oder wenigstens ein Mittel, in welchem die Erscheinungen der Leitung gegen die der elektrischen Verschiebung vorherrschend sind. Vernachlässigt man dann in den Gleichungen (15) die Glieder, welche den Faktor K enthalten, ebenso wie die Funktionen θ und ψ, so ergiebt sich

$$(29)\qquad \begin{aligned} 4\pi c \frac{\partial F}{\partial t} &= \Delta F, \\ 4\pi c \frac{\partial G}{\partial t} &= \Delta G, \\ 4\pi c \frac{\partial H}{\partial t} &= \Delta H. \end{aligned}$$

Jede dieser Gleichungen hat dieselbe Form, wie die, welche die Diffusion der Wärme in der Fourier'schen Theorie angiebt.

Denn wenn man k, wie oben (70) geschehen ist, den Coefficienten der Wärmeleitung eines itotropen Mittels nennt, und wenn man die Funktion F als Darstellung der Temperatur in jedem Punkte auffasst, so stellt der Ausdruck $k\Delta F$ die Wärmeströmung dar, die in der Zeiteinheit in die Volumeneinheit eindringt; $\frac{\partial F}{\partial t}$ ist die entsprechende Temperaturerhöhung, so dass der Coefficient $4\pi c k$ die Wärmecapacität des Mittels für die Volumeneinheit ist.

Die elektromagnetischen Eigenschaften erleiden also, wenn sie einmal in einem Mittel hergestellt sind, eine Diffusion, die derjenigen der Wärme analog ist; aber man muss beachten, dass der Coefficient k der Leitungsfähigkeit c des Mittels, das dieselbe Wärmediffusion erzeugen würde, umgekehrt proportional ist. Die Diffusion der elektromagnetischen Wirkungen ist demnach der elektrischen Leitungsfähigkeit umgekehrt proportional, so dass ein mit vollkommener Leitungsfähigkeit behaftetes Mittel dieser Diffusion ein absolutes Hindernis entgegenstellen würde.

Wir betrachten zum Beispiel den Fall eines linearen Stromes, der von einem leitenden Mittel umgeben ist. In dem Augenblicke, wo man den Hauptstrom herstellt, hat der in dem Mittel, welches denselben umgiebt, inducirte Strom dieselbe Intensität, und ihre Wirkung auf einen fernen Punkt ist Null; der stationäre Zustand tritt erst nach Vernichtung der inducirten Ströme durch den Widerstand des Mittels ein. Aber in dem Maasse, als der inducirte Strom sich abschwächt, entsteht um denselben herum ein Strom von derselben Richtung, so dass der in dem Mittel von dem inducirten Strome eingenommene Raum sich immer mehr vergrössert, in dem Maasse als die Intensität abnimmt.

Wird der Hauptstrom constant erhalten, so diffundiren die inducirten Ströme allmälig; sobald der dauernde Zustand erreicht ist, sind die Werte von ΔF, ΔG und ΔH in dem ganzen Mittel Null und behalten nur in dem von dem Stromkreise eingenommenen Teile endliche Werte.

639. Drehende magnetische Polarisation. — Die gewöhnliche Undulationstheorie nimmt an, dass die Lichterscheinungen durch Schwingungen des Aethers hervorgerufen werden; aber man muss zugeben, dass eine so förmliche Erklärung über die Erfahrung hinausgeht. Denn man weiss in der That nicht, was die eigentliche Natur des Lichtes ist. Die einzige Thatsache, die man als erwiesen betrachten kann, ist die, dass in einem Lichtstrahl eine mechanische Wirkung von der Natur eines geometrischen, das heisst eines durch eine Grösse und eine Richtung charakterisirten Vectors zu Tage tritt; diese Richtung ist gegen den Strahl senkrecht und ändert sich periodisch in einer und derselben Ebene, wenn der Strahl polarisirt ist. Dies ist ein Schluss, der aus den Interferenzerscheinungen folgt.

In dem Falle eines kreisförmig polarisirten Strahles bleibt die Grösse dieser mechanischen Wirkung, dieses Vectors, constant, aber ihre Richtung dreht sich um den Strahl und vollführt eine vollständige Umdrehung während jeder Periode. Geht ein derartiger Strahl durch ein Mittel unter der Einwirkung einer magnetischen Kraft, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit geändert; man muss daraus schliessen, dass in dem Mittel eine Drehbewegung vorhanden ist, deren Achse der Richtung der magnetischen Kräfte parallel ist. Diese Drehung findet bei keinem endlichen Teile des Mittels, als Ganzes genommen, statt, und man muss es so auffassen, dass dieselbe auf die kleinsten Partikel des Körpers beschränkt ist, von denen jedes um eine ihm eigentümliche Achse rotirt. Dies ist die Hypothese (**601**) der molekularen Wirbel.

Maxwell hat so die Erscheinungen der drehenden magnetischen Polarisation durch die Annahme von molekularen Wirbeln erklärt; aber ohne diese Theorie näher auseinanderzusetzen, kann man, wie Rowland gezeigt hat, zu demselben Resultat gelangen durch Einführung einer neuen von Hall entdeckten Wirkung.

640. Hall'sches Phänomen. — $ABCD$ (Fig. 127) sei ein aus einem sehr dünnen metallischen Blatt, zum Beispiel einem Goldblatt, ausge-

schnittener kreuzförmiger Leiter; die beiden Enden A und B des Hauptzweiges stehen mit den Polen einer Batterie in Verbindung, die Enden C und D des Querstabes mit einem Galvanometer. Man gelangt leicht zu der Anordnung, dass kein Teil des Stromes durch das Galvanometer geht.

Bringt man diesen Leiter in ein sehr starkes magnetisches Feld, so dass die Kraftlinien senkrecht gegen die Ebene desselben sind, so zeigt eine dauernde Ablenkung der Nadel, dass ein constanter Strom durch das Galvanometer geht. Geht der Strom in dem Hauptarm von A nach B und durchsetzen die Kraftlinien die Ebene der Figur von vorn nach hinten, so geht der abgeleitete Strom von D durch das Galvanometer nach C, wenn der Leiter aus einem Blatte von Gold, Silber, Platin oder Zinn besteht, und in entgegengesetzter Richtung, wenn das Metall Eisen ist. Die Wirkung ist nicht mehr bemerkbar, wenn man die Dicke der Leiter vergrössert.

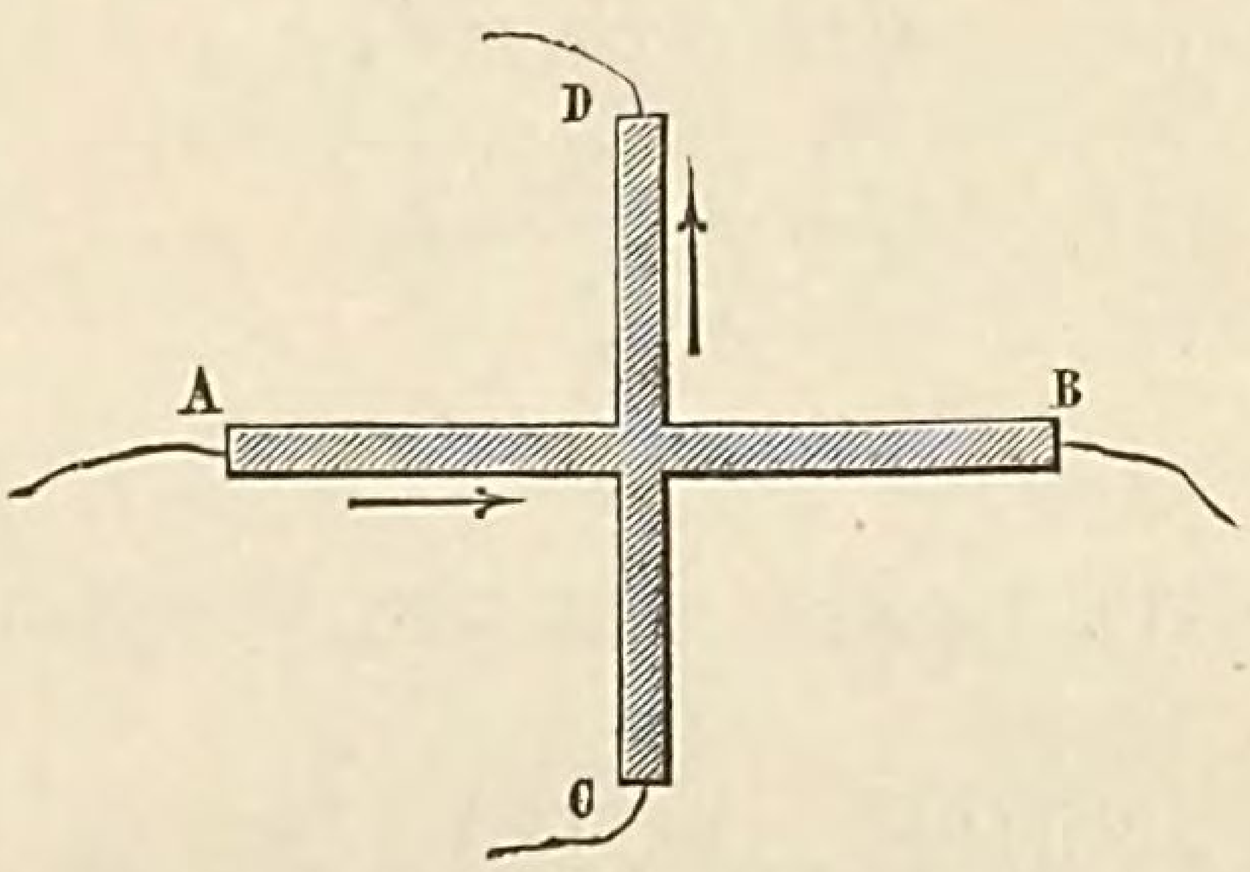


Fig. 127.

Im ersten Falle wird der Strom in Richtung der elektromagnetischen Kraft fortgezogen, die auf einen AB parallelen Draht wirken würde, der von einem Strom von A nach B durchflossen wird; man kann sagen, dass es sich im zweiten Falle ebenso verhält, da im Innern einer Eisenplatte infolge der Magnetisirung der Sinn der Kraftlinien und die Richtung der elektromotorischen Kraft ihr Zeichen gewechselt haben.

So erklärt, stände das Hall'sche Phänomen in Widerspruch mit der allgemein geltenden Ansicht, dass in den elektromagnetischen Erscheinungen die Wirkung auf die Träger der Ströme und nicht auf den Strom selbst ausgeübt wird. Wie man aber auch den Versuch erklären mag, so folgt aus demselben, dass ein magnetisches Feld im stationären Zustande eine elektromotorische Kraft hervorruft, die die Elektricität in Richtung der elektromagnetischen Wirkung, also nach der linken Seite eines Beobachters fortzuziehen sucht, der sich in dem Strome befindet und in Richtung der magnetischen Kraft vor sich hin schaut.

Da die Wirkung, um die es sich hier handelt, sehr klein ist, ist die natürlichste Hypothese, die übrigens annähernd durch die Versuche von Hall bestätigt wird, die Annahme, dass dieselbe der elektromagnetischen Kraft proportional ist.

641. Allgemeine Gleichungen. — A, B, C seien die Componenten dieser neuen elektromotorischen Kraft, und wir nehmen an, dass wir es mit einem magnetischen Mittel zu thun haben. Die Componente A, die längs der xAchse wirkt, ist die algebraische Summe zweier auf die Componenten v' und w' der Elektricitätsströmung nach der y und nach der zAchse ausgeübten Wirkungen: die erstere ist proportional $-Zv'$ und die zweite Yw'. Bezeichnet man mit γ den Coefficienten der Proportionalität, so erhält man demnach

$$(30)\qquad \begin{aligned} A &= \gamma(Yw' - Zv'),\\ B &= \gamma(Zu' - Xw'),\\ C &= \gamma(Xv' - Yu'). \end{aligned}$$

Die Componenten der gesammten elektromotorischen Kraft des Feldes sind dann

$$(31)\qquad \begin{aligned} P &= -\frac{\partial F}{\partial t} + A,\\ Q &= -\frac{\partial G}{\partial t} + B,\\ R &= -\frac{\partial H}{\partial t} + C. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (15) ergeben, wenn man die neuen elektromotorischen Kräfte einführt,

$$(32)\qquad \mu\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t} - A + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial x} - \Delta F = 0 \text{ etc.}$$

Da die Funktionen ψ und θ in den periodischen Erscheinungen keine Rolle spielen, erhält man demnach, wenn das Mittel nichtleitend ist,

$$(33)\qquad \begin{aligned} K\mu\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial A}{\partial t}\right) &= \Delta F,\\ K\mu\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial B}{\partial t}\right) &= \Delta G,\\ K\mu\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{\partial C}{\partial t}\right) &= \Delta H. \end{aligned}$$

642. Fortpflanzung einer ebenen Welle. — Fassen wir eine gegen die zAchse senkrechte ebene Welle ins Auge, so braucht man nur die dieser Achse parallele Componente Z der magnetischen Kraft zu berücksichtigen; in diesem Falle reduciren sich, wenn das Feld constant ist, die Gleichungen (33) auf

$$(34)\qquad \begin{aligned} K\mu\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \gamma Z\frac{\partial v'}{\partial t}\right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},\\ K\mu\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \gamma Z\frac{\partial u'}{\partial t}\right) &= \frac{\partial^2 G}{\partial z^2},\\ K\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) und (12) aus § 567 und § 572 ergeben

$$4\pi u' = + \frac{\partial Y}{\partial z} = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

$$4\pi v' = - \frac{\partial X}{\partial z} = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}.$$

Es folgt hieraus

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial t},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial t},$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (34) ein, so ergiebt sich

$$(35) \qquad \begin{aligned} K\mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\gamma Z}{4\pi\mu} \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial t} \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ K\mu \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{\gamma Z}{4\pi\mu} \frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial t} \right) &= \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben eine Lösung von der Form

$$(36) \qquad \begin{aligned} F &= r \cos(pt - qz) \cos mt, \\ G &= r \cos(pt - qz) \sin mt. \end{aligned}$$

Man kann die Coefficienten durch die Bedingung bestimmen, dass die Differentialgleichungen für alle Werte von z und t befriedigt werden, woraus sich ergiebt

$$(37) \qquad \begin{aligned} K\mu (p^2 + m^2) - q^2 \left(1 + \gamma \frac{mZK}{4\pi} \right) &= 0, \\ 2m\mu - \gamma \frac{Zq^2}{4\pi} &= 0. \end{aligned}$$

Die Werte von F und G sind die Projectionen einer elektromotorischen Kraft $r \cos(pt - qz)$, die mit der x Achse einen der Zeit proportionalen Winkel mt bildet, auf die Achsen.

643. Drehung der Polarisationsebene. — Die Erscheinung stellt demnach einen Lichtstrahl dar, der sich längs der z Achse mit einer Geschwindigkeit $V = \frac{p}{q}$ fortpflanzt, dessen Schwingungsperiode $T = \frac{2\pi}{p}$ ist; die Wellenlänge, also der während einer Periode durchlaufene Raum, ist $\lambda = \frac{p}{q} \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{q}$.

Dieser Strahl ist geradlinig polarisirt; aber die Polarisationsebene dreht sich wie in einem aktiven Mittel, und die vollständige Drehung erfolgt in einer Zeit $\tau = \frac{2\pi}{m}$.

Die Bedingungsgleichungen (37) ergeben

$$m = \frac{\gamma}{2\mu}\frac{Zq^2}{4\pi} = \frac{\pi\gamma Z}{2\mu\lambda^2},$$

$$V = \frac{p}{q} = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\sqrt{1 + \gamma\frac{mZK}{8\pi}} = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\sqrt{1 + \frac{K\mu m^2\lambda^2}{4\pi^2}}.$$

Da das Glied mit γ sehr klein ist, kann man die Quadratwurzel durch Annäherung ziehen, und es ergiebt sich schliesslich

$$m = \gamma\frac{\pi Z}{2\mu\lambda^2},$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\left(1 + \frac{K\mu m^2\lambda^2}{8\pi^2}\right),$$

$$\tau = \frac{4\mu\lambda^2}{\gamma Z}.$$

Es ergeben sich hieraus folgende Schlüsse:

1. Wenn sich ein polarisirter Lichtstrahl längs der Richtung einer magnetischen Kraftlinie fortpflanzt, dreht sich die Polarisationsebene in einer Richtung, die von dem Zeichen von γ abhängt.

Dies ist die von Faraday entdeckte Erscheinung, mit der von Verdet beobachteten Umkehrung für die magnetischen Körper.

2. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird durch die elektromagnetische Wirkung grösser; aber diese Wirkung ist zweifellos zu schwach, um nachgewiesen werden zu können.

Bezeichnet man mit λ_0 und V_0 bez. die Wellenlänge und die Geschwindigkeit im leeren Raume, wenn derselbe der magnetischen Einwirkung entzogen ist, und mit n den Brechungscoefficienten, wenn die Welle in das betrachtete Mittel eintritt, so erhält man $n\lambda = \lambda_0$ und $nV = V_0$. Die Zeit, die dieser Strahl braucht, um eine Dicke e des Mittels zu durchlaufen, ist $\frac{e}{V} = \frac{ne}{V_0}$; die Drehung θ, welche die Polarisationsebene erleidet, hat den Wert

$$\theta = m\frac{e}{V} = \gamma e Z\frac{\pi n^3}{2\mu V\lambda^2},$$

und die Drehung ω, für eine der Einheit gleiche Potentialdifferenz, wird

$$\omega = \gamma\frac{\pi n^3}{2\mu V\lambda^2}.$$

Wäre der Brechungscoefficient von der Dispersion des Mittels unabhängig, so wäre die Drehung der Polarisationsebene dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional, worin das angenäherte Gesetz der magnetischen Drehung besteht.

Wir haben gesehen (**597**), dass man, um von der Dispersion Rechenschaft zu geben, nur dieses Resultat mit dem Faktor $\left(1-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$ zu multipliciren braucht; es ergiebt sich dann

$$\omega=\gamma\frac{\pi n^2}{2\mu V\lambda^2}\left(n-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right).$$

Dies ist bis auf den Faktor μ die Formel, zu welcher Maxwell durch die Theorie der molekularen Wirbel gelangt war, und die, welche am besten mit der Erfahrung übereinstimmt. Man sieht, dass, wenn im Uebrigen alle Verhältnisse gleich sind, die Drehkraft dem Coefficienten der Durchlässigkeit μ umgekehrt proportional ist.

11. Capitel.

Ergänzungen.

644. Folgerungen aus dem Carnot'schen Prinzip. — Sir W. Thomson hat gezeigt, dass die Prinzipe, welche als Grundlage für die Theorie der Wärme dienen, also das Prinzip von der Erhaltung der Energie und das Carnot'sche Prinzip, die Feststellung einiger wichtiger auf die elektrischen und magnetischen Erscheinungen bezüglicher Eigenschaften ermöglichen.

Immer wenn ein Körper Wärme verliert oder trotz äusserer Kräfte, die ihn in entgegengesetztem Sinne zu deformiren suchen, seine Dimensionen ändert, leistet derselbe eine Arbeit. Welches auch der Kreis von Transformationen sein mag, die äussere mechanische Arbeit hängt nur vom End- und Anfangszustande des Körpers ab. In allen Fällen entspricht diese mechanische oder calorische Arbeit dem Energieverluste des betrachteten Körpers.

Die innere oder potentielle Energie eines Körpers ist die gesammte Arbeit, die er durch eine unbegrenzte Abkühlung oder durch eine Ausdehnung oder eine Zusammenziehung ohne Grenzen leisten könnte, je nachdem die Molekularkräfte abstossende oder anziehende sind. Man hat kein Mittel, diese Energie zu messen, man kann nicht einmal wissen, ob dieselbe für eine begrenzte Masse endlich ist; aber man kann die Veränderungen messen, die dieselbe von einem bestimmten Zustande aus, den man als *normalen Zustand* wählt, erleidet.

Der mechanische Zustand eines homogenen Körpers, der irgend eine homogene Deformation erlitten hat, das heisst eine Deformation, die sich in jedem Volumenelemente in der gleichen Weise wiederholt, kann durch sechs unabhängige Variable dargestellt werden, beispielsweise durch die Längen der Seiten und die Werte der Winkel eines Parallelepipeds oder durch die sechs Elemente eines Ellipsoides, welches stets denselben Teil des festen Körpers enthält.

645. — Die potentielle Energie eines Körpers für die Gewichtseinheit von seinem normalen Zustande aus ist eine Funktion seines mechanischen Zustandes (seiner Form und seiner Dimensionen) und seiner Temperatur.

Erleidet der Körper irgend eine Transformation, so absorbirt derselbe eine gewisse Menge H an Energie, die von der erlittenen Deformation und von der Aenderung der Temperatur abhängt. Wenn eine Variable x allein sich um dx und die Temperatur um dT ändert, kann man setzen

$$dH = a dx + l dT. \tag{1}$$

Die Funktionen a und l haben eine leicht verständliche physikalische Bedeutung. Dividirt man dieselben durch das mechanische Aequivalent der Wärme, so stellt die erstere die auf die Variable x bezügliche latente Wärme und die zweite die specifische Wärme für einen constanten, durch x definirten mechanischen Zustand dar.

Die von den äusseren Kräften geleistete Arbeit dW hängt nur von der Formänderung ab, und es ist

$$dW = b dx.$$

Der Zuwachs an potentieller Energie ist die Summe dieser beiden Ausdrücke, woraus sich ergiebt

$$dE = (a + b)\, dx + l dT. \tag{2}$$

Für einen beliebigen Kreisprozess ist die gesammte Aenderung der potentiellen Energie Null; die elementare Aenderung muss demnach ein vollständiges Differential der unabhängigen Variabeln sein, woraus sich die Bedingung ergiebt

$$\frac{\partial (a + b)}{\partial T} = \frac{\partial l}{\partial x}. \tag{3}$$

Diese Gleichung kann man als Darstellung des Prinzips von der Erhaltung der Kraft oder der mechanischen Aequivalenz der Wärme auffassen.

646. — Um das Carnot'sche Prinzip anwenden zu können, muss der Kreis von Transformationen umkehrbar und der Endzustand des Körpers mit dem Anfangszustande identisch sein.

Die Summe der Quotienten der absorbirten Wärmeenergie durch die entsprechende absolute Temperatur ist dann Null, und man erhält dann als analytischen Ausdruck für dieses Prinzip

$$\int \frac{dH}{T} = \int \left(\frac{a}{T} dx + \frac{l}{T} dT \right) = 0.$$

Da der in Klammern gefasste Ausdruck auch ein vollständiges Differential sein muss, so folgt

$$\frac{\partial a}{\partial T} - \frac{a}{T} = \frac{\partial l}{\partial x}, \tag{4}$$

und diese Gleichung (4) kann gleichfalls als Uebertragung des Carnot-schen Prinzips für den besondern Fall eines umkehrbaren Prozesses aufgefasst werden.

Verbindet man die Gleichungen (3) und (4), so findet man

$$(5) \qquad \frac{a}{T} = -\frac{\partial b}{\partial T}.$$

Man würde eine analoge Gleichung für jede andere unabhängige Variable erhalten. Bezeichnet man mit A das totale Differential der bei irgend einer Transformation des Körpers bei constanter Temperatur absorbirten Wärmeenergie, die der auf diese Transformation bezüglichen latenten Wärme entspricht, und mit B die entsprechende Ableitung der äusseren Arbeit, so erhält man demnach

$$(6) \qquad A = -T\frac{\partial B}{\partial T}.$$

647. — Man kann aus dieser Gleichung (6) folgende Schlüsse ziehen: Immer wenn die äussere Arbeit in einer solchen Richtung erfolgt, dass die Ableitung $\frac{\partial B}{\partial T}$ negativ ist, ist der Werth von A positiv. In andern Worten, wenn die von der äusseren Arbeit erzeugte Deformation eine solche ist, dass eine Deformation derselben Natur durch eine Abkühlung hervorgerufen werden könnte, dann ist diese Arbeit von einer Wärmeentwicklung und folglich von einer Temperaturerhöhung begleitet. Das Umgekehrte würde eintreten, wenn die Abgeleitete $\frac{\partial B}{\partial T}$ positiv wäre. So erwärmt sich ein Gas, wenn man es zusammendrückt, und kühlt sich ab, wenn man es ausdehnt.

Da die festen Körper sich im Allgemeinen ausdehnen, wenn die Temperatur steigt, so sieht man, dass die gleichförmige Zusammendrückung eines festen Körpers auch eine Temperaturerhöhung und die Dehnung eine Abkühlung verursacht.

Anders verhält es sich mit den Körpern, deren Ausdehnung anormal ist, wie Wasser bei einer Temperatur unter 4° und Silberjodür bei den gewöhnlichen Temperaturen. Die Zusammendrückung dieser Körper würde eine Temperaturerniedrigung erzeugen.

Ebenso muss auch ein tordirter Metalldraht sich abkühlen, wenn man ihn weiter tordirt (wenn man als gewiss annimmt, dass der Torsionscoefficient kleiner wird, wenn die Temperatur steigt). Ein tordirter Draht muss sich auch erwärmen, unabhängig von der erzeugten äusseren Arbeit, wenn man ihn sich detordiren lässt.

In jedem Falle ergiebt sich die absorbirte oder entwickelte Energie H aus der äusseren Arbeit und den Eigenschaften des Körpers. Ohne länger bei den blossen Wärmeerscheinungen, die man so aus dem Carnot'schen Prinzip ableiten kann, zu verharren, wollen wir einige Folgerungen, die sich auf elektrische oder magnetische Erscheinungen beziehen, aus der Gleichung (6) ableiten.

648. Temperaturänderungen während der Magnetisirung. — Die Beziehungen, die wir zwischen den Temperaturänderungen und den Magnetisirungscoefficienten angedeutet haben (**432**), lassen folgende Resultate voraussehen:

1. Arbeitet man mit einer Temperatur unterhalb der Rotglut, die aber hoch genug ist, dass der Magnetisirungscoefficient des Eisens abnimmt, so muss sich ein Stück weiches Eisen erwärmen, wenn man es langsam einem Magnet nähert, und sich abkühlen, wenn man es entfernt. Wir nehmen an, dass diese Bewegungen langsam sind, um den Einfluss der Inductionsströme zu vermeiden.

Das Umgekehrte würde bei den gewöhnlichen Temperaturen eintreten, wenn der Magnetisirungscoefficient, wie es wahrscheinlich ist, mit der Temperatur wächst.

2. Das Kobalt muss sich wie Eisen verhalten: sich abkühlen, wenn man es einem Magnet bei der gewöhnlichen Temperatur nähert, sich dagegen erwärmen, wenn man mit einer Temperatur arbeitet, die höher ist als die des Maximums der Magnetisirung.

3. Beim Nickel ist kein Maximum der Magnetisirung vorhanden: bei jeder Temperatur muss sich dieses Metall erwärmen, wenn man es einem Magnet nähert, und sich abkühlen, wenn man es von einem solchen entfernt.

Allgemein müssen sich Eisen und Kobalt bei gewöhnlichen Temperaturen abkühlen, wenn die Bewegung eine äussere Arbeit erfordert, die der der magnetischen Kräfte entgegengesetzt ist. Dagegen verursacht für das Nickel bei jeder Temperatur und für die beiden ersten Metalle bei Temperaturen, die höher sind als die des Maximums der Magnetisirung, jede Verschiebung, die eine der magnetischen Wirkung entgegengesetzte Arbeit erfordert, eine Erwärmung des Körpers.

4. In einem magnetischen Felde kühlt sich ein Krystall ab, wenn seine Achse der grössten magnetischen Induction oder der kleinsten diamagnetischen Induction von einer gegen die Richtung des Feldes parallelen in eine gegen dieselbe senkrechte Richtung übergeht.

649. Elektrische Erwärmung des Turmalins. — Die pyroelektrischen Erscheinungen geben zu analogen Betrachtungen Anlass.

Man erklärt die Pyroelektricität der Krystalle (**118**) innerhalb der Faraday'schen Auffassungsweise durch die Annahme, dass der Krystall sich in einem Zustande elektrischer Polarisation befindet, deren äusserer Effect dem zweier Schichten von entgegengesetzt gleichen Massen, die auf der Oberfläche verteilt sind, gleichwertig ist. Besitzt der Krystall eine constante Temperatur, so nimmt das umgebende Mittel sofort, sei es durch die eigene Leitungsfähigkeit, sei es durch die Oberfläche des Krystalles selbst, eine Oberflächenelektrisirung an, die der ersteren das Gleichgewicht hält und ihre Wirkung auf jeden äusseren Punkt aufhebt.

Zerbricht man den Krystall normal zur elektrischen Achse, so erweisen sich die beiden Bruchstücke in ihrer Gesammtheit entgegengesetzt elektrisch,

nicht nur infolge der neuen Schichten, welche die Polarisation auf den Bruchflächen erzeugt, sondern auch infolge der auf den alten Flächen, deren Gleichgewicht unterbrochen ist, inducirten Elektrisirung.

Aendert sich die Temperatur, so ändert sich sofort die elektrische Polarisirung, aber das durch Elektrisirung des umgebenden Mittels entstehende Gleichgewicht tritt erst allmälig ein, mehr oder weniger langsam, je nach der Leitungsfähigkeit des Mittels oder der Oberfläche des Krystalles.

Wenn diese Erklärung der Pyroelektricität richtig ist, so folgt, dass ein pyroelektrischer Krystall sich erwärmen oder abkühlen muss, wenn man ihn in einem elektrischen Felde bewegt wie magnetisches Eisen in einem magnetischen Felde.

Das Turmalin erwärmt sich, wenn man es so verschiebt, dass der Einfluss des Feldes seine innere Polarisation zu vergrössern sucht und kühlt sich im entgegengesetzten Falle ab.

Die auf dem Turmalin hervorgerufene Wirkung hängt nicht von der Elektrisirung der Oberfläche ab, und man gelangt zu folgendem bemerkenswerten Resultat: „ein pyroelektrischer Krystall, welcher im natürlichen Zustande erscheint, da seine Eigenschaften infolge der Elektrisirung des Mittels neutralisirt sind, erleidet bei einer Verschiebung in einem Felde dieselben Veränderungen, wie wenn seine elektrischen Eigenschaften zu Tage treten — also dieselben, wie wenn er auf eine hohe Temperatur gebracht, dann abgetrocknet und schnell abgekühlt würde.

650. Prinzip der Erhaltung der Elektricität. — Immer wenn ein System von Körpern, das jeder äusseren Verbindung bar ist, Träger irgend einer elektrischen Erscheinung (8) ist, bleibt die Gesammtmenge an Elektricität, die es besitzt, unveränderlich. Dieses Prinzip wird durch alle Erfahrungen bestätigt und ist eine Consequenz der von Maxwell aufgestellten Anschauungen über die Constitution der Mittel, welche zur Weiterführung der elektrischen Kräfte dienen. Obwohl man noch nicht die Behauptung aufstellen kann, dass die gesammte Elektricitätsmenge, die in der Natur vorhanden ist, genau Null ist, so kann man doch wenigstens annehmen, dass physikalische Erscheinungen keine Aenderung in derselben hervorrufen, und dass dieselbe constant bleibt, in demselben Sinne wie die Gesammtmenge der Energie oder der Materie. In andern Worten: eine Elektricitätsmenge kann als unzerstörbar betrachtet werden durch jede andere Ursache als durch eine entgegengesetzt gleiche Elektricitätsmenge. Lippmann hat gezeigt, dass dieses Prinzip zu Folgerungen führt, die denen des Carnot'schen Satzes analog sind: verbindet man dasselbe mit dem Gesetz der Erhaltung der Kraft, so kann man die Erklärung einer gewissen Anzahl bekannter Erscheinungen finden und ausserdem andere noch nicht beobachtete Erscheinungen voraussehen.

Nehmen wir an, dass ein Körper A in einem Systeme einen Kreisprozess durchläuft, dass er also, nachdem er eine Reihe von Transformationen

erlitten hat, in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, so besagt das erwähnte Prinzip, dass die Summe der Elektricitätsmengen dm, die er während des Prozesses erhalten hat, Null ist, so dass man erhält

$$\int dm = 0. \tag{7}$$

Diese Bedingung erfordert, dass der elementare Zuwachs integrirbar ist, dass er also das vollständige Differential einer Funktion der unabhängigen Variabeln ist. Hängt die Erscheinung nur von zwei Variabeln x und y ab, welcher Fall der allgemeinste ist, so kann man setzen

$$dm = Xdx + Ydy, \tag{8}$$

und die Bedingung für die Integrirbarkeit ist

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{9}$$

Die Gleichung (9) kann als die Uebersetzung des Prinzips von der Erhaltung der Elektricität betrachtet werden; wir wollen nach Lippmann einige Anwendungen desselben zeigen.

651. Elektrocapillare Erscheinungen. — Lippmann hat bemerkt (**270**), dass die Capillarwirkungen, die sich zwischen Quecksilber und angesäuertem Wasser zeigen, von der Potentialdifferenz der beiden Flüssigkeiten abhängen, und dass umgekehrt die Potentialdifferenz der Flüssigkeiten modificirt wird, wenn man durch äussere Kräfte die Grösse der Berührungsfläche ändert. Diese Reciprocität der Erscheinungen ist eine Folge des letzten Prinzips.

Wir nennen S die Berührungsfläche einer Quecksilbermasse mit angesäuertem Wasser, A die Oberflächenspannung der Flüssigkeit und x den Ueberschuss des Potentials des Wassers über das des Quecksilbers. Wird die Oberfläche aus irgend einem Grunde um dS grösser, so ist die Arbeit der Oberflächenspannung $-AdS$.

Nehmen wir nunmehr an, dass eine Elektricitätsmenge dm, die von einer äusseren Quelle geliefert wird, an die Oberfläche des Wassers gelangt, so folgt daraus ein Zuwachs dx der Potentialdifferenz zugleich mit einer Ausdehnung dS der Oberfläche. Die Grössen x und S sind dann die unabhängigen Veränderlichen der Erscheinung. Da die Masse dm, wenn alle übrigen Verhältnisse die gleichen sind, der Oberfläche proportional ist, kann man setzen

$$dm = YSdx + XdS. \tag{10}$$

Der Faktor X stellt die Capacität der Flächeneinheit bei constantem Potential und Y die elektrische Capacität der Flächeneinheit dar, wenn die Oberfläche constant bleibt, das Potential aber veränderlich ist. Das Prinzip der Erhaltung der Elektricität liefert schon die Bedingung

$$Y = \frac{\partial X}{\partial x}. \tag{11}$$

Andererseits erzeugt die in das System eingeführte elektrische Arbeit xdm einen Zuwachs der potentiellen Energie der Oberfläche und eine äussere Arbeit $-AdS$. Wiederholt man die Operation mehrfach in alternirenden Richtungen, so dass man schliesslich zum Anfangszustand zurückkehrt, und dass weder ein Verlust noch ein Gewinn an Wärme eintritt, so ist die Energieänderung des Systems Null, woraus sich ergiebt

$$\int(xdm + AdS) = 0,$$

also, wenn man dm durch seinen Wert ersetzt,

$$(12) \qquad \int[xYSdx + (A + xX)dS] = 0.$$

Da dieser Ausdruck für jeden Kreisprozess Null sein muss, erhält man auch

$$(13) \qquad xY = \frac{\partial(A + xX)}{\partial x}.$$

Man findet aus den beiden Gleichungen (11) und (13)

$$X = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial^2 A}{\partial x^2},$$

und folglich

$$dm = -S\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}dx - \frac{\partial A}{\partial x}dS = -d\left(S\frac{\partial A}{\partial x}\right).$$

Die Funktionen X und Y sind demnach Funktionen der Oberflächenspannung. Es folgt daraus, dass, wenn diese Spannung, wie es der Versuch zeigt, eine Funktion der Potentialdifferenz ist, die Capacität X nicht Null ist. Deformirt man die Oberfläche, indem man die Potentialdifferenz constant erhält, so muss man demnach nach Gleichung (10) Elektricität erzeugen oder verbrauchen, und wenn man mit constanter Ladung arbeitet, ändert man die Potentialdifferenz. Die beiden Erscheinungsklassen sind reciprok, wie dies auch der Versuch bestätigt.

652. Gascondensatoren. — Boltzmann hat in Uebereinstimmung mit der Maxwell'schen Theorie (**634**) nachgewiesen, dass die Capacität eines Leiters, dessen beide Belegungen durch eine Gasschicht getrennt sind, sich proportional dem Drucke der Schicht ändert. Hieraus muss als Umkehrung folgen, dass der Druck einer bestimmten zwischen den Belegungen eines Condensators befindlichen Gasmasse eine Funktion der Potentialdifferenz ist.

Die beiden unabhängigen Variabeln, von denen hier die Erscheinung abhängt, sind die Potentialdifferenz x und der Druck p des Gases. Wenn die positive Belegung eine Elektricitätsmenge dm erhält, so ist

$$(14) \qquad dm = Cdx + hdp.$$

Der Faktor C stellt die Capacität des Condensators bei constantem Druck, h einen Coefficienten dar, den der Versuch als positiv ergiebt, da die

Capacität mit dem Drucke wächst, und der durch die Maxwell'sche Theorie bestimmt ist. Das Prinzip der Erhaltung der Elektricität liefert

$$\frac{\partial C}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{15}$$

Wir fassen jetzt einen geschlossenen Kreisprozess, der ohne Temperaturänderungen vor sich geht, ins Auge. Die Arbeit, die nötig ist, die Ladung der positiven Belegung um dm zu vergrössern, ist xdm; andererseits ruft eine mit dem Condensator in Berührung stehende Gasmasse eine äussere Arbeit pdv hervor, wenn ihr Volumen um dv wächst. Wenn das Gas und der Condensator in ihren ursprünglichen Zustand zurückkehren, ist die Energieänderung des Systems Null, und man erhält

$$\int (xdm - pdv) = 0, \tag{16}$$

welche Gleichung fordert, dass der in die Klammer geschlossene Ausdruck ein vollständiges Differential ist.

Das Volumen v der betrachteten Gasmasse ist eine Funktion des Druckes p und vielleicht auch der Potentialdifferenz x; man kann demnach setzen

$$dv = adx + bdp, \tag{17}$$

und die weitere Untersuchung wird zeigen, ob der Coefficient a von Null verschieden ist. Da dieser Ausdruck ebenfalls ein vollständiges Differential ist, findet man hieraus

$$\frac{\partial a}{\partial p} = \frac{\partial b}{\partial x}. \tag{18}$$

Setzt man in den Ausdruck (16) die Werte von dv und dm ein, so erhält man

$$\int [(Cx - ap)\,dx + (hx - bp)\,dp] = 0.$$

Die Bedingung für die Integrirbarkeit ist dann

$$\frac{\partial (Cx - ap)}{\partial p} = \frac{\partial (hx - bp)}{\partial x}. \tag{19}$$

Berücksichtigt man die Gleichungen (15) und (18), so geht diese über in

$$a = -h.$$

Der Coefficient a ist demnach von Null verschieden und negativ. Es folgt hieraus nach Gleichung (17), dass bei constantem Drucke das Volumen einer Gasmasse, die die Zwischenschicht eines Condensators bildet, proportional der Potentialdifferenz der Belegungen abnehmen muss. Dieses Resultat scheint durch Quincke bestätigt zu sein, wenigstens für die Kohlensäure.

653. Elektrische Ausdehnung des Glases. — Eine Leydener Flasche dehnt sich aus, wenn sie elektrisch gemacht wird und zieht sich zusammen, sobald man sie entladet. Diese von Volta vermutete Erscheinung ist von

Govi bestimmt nachgewiesen worden, und Duter hat gezeigt, dass die Ausdehnung des Glases dem Quadrate der Potentialdifferenz der Belegungen proportional ist. Wir betrachten die Erscheinung in der Form, die ihr Righi gegeben hat; wir denken uns nämlich einen Condensator, der aus einer Glasröhre besteht, deren beide Flächen mit Staniol bedeckt sind; wir bezeichnen mit l die Länge desselben und nehmen an, dass die Röhre zugleich in Richtung ihrer Länge einer von einem Gewichte p ausgeübten Spannung ausgesetzt ist.

Da die Länge der Röhre eine Funktion der Potentialdifferenz x und des Spannungsgewichtes p ist, erhält man

$$dl = adx + bdp. \tag{20}$$

Der Coefficient a ist erfahrungsmässig positiv und misst die elektrische Verlängerung, und b ist der Elasticitätscoefficient der Röhre.

Nimmt man an, dass die Röhre keine dauernde Deformirung erleidet, sondern nach einer Reihe von Ladungen und Entladungen in ihren früheren Zustand zurückkehrt, so folgt

$$\frac{\partial a}{\partial p} = \frac{\partial b}{\partial x}. \tag{21}$$

Andererseits kann man wohl annehmen, dass die Ladung des Condensators ebenfalls eine Funktion des spannenden Gewichtes ist, so dass man setzen kann

$$dm = Cdx + hdp, \tag{22}$$

wo C die Capacität der Flasche und h ein Coefficient ist, von dem wir nicht *a priori* wissen, ob er von Null verschieden ist.

Das Prinzip der Erhaltung der Elektricität ergiebt dann

$$\frac{\partial C}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{23}$$

Die Energieänderung der Flasche für eine Zunahme dm der Ladung und für eine Verlängerung dl ist

$$xdm + pdl = (Cx + ap)\,dx + (hx + bp)\,dp.$$

Da dieser Ausdruck für einen Kreisprozess ein vollständiges Differential sein muss, findet man hieraus

$$\frac{\partial(Cx + ap)}{\partial p} = \frac{\partial(hx + bp)}{\partial x}, \tag{24}$$

oder wenn man die Gleichungen (21) und (23) berücksichtigt,

$$h = a.$$

Es folgt hieraus nach Gleichung (22), dass bei constantem Potential die elektrische Ladung mit dem spannenden Gewichte wächst, und dass bei

constanter Ladung das Potential abnimmt, wenn das spannende Gewicht grösser wird, wenn man also die Röhre verlängert.

Der Versuch zeigt ausserdem, dass die Verlängerung dem Quadrate der Potentialdifferenz proportional und dass man, wenn mit k eine Constante bezeichnet wird, erhält

$$l = kx^2.$$

Es folgt hieraus

$$a = \frac{\partial l}{\partial x} = 2kx = h,$$

und nach Gleichung (23)

$$C = C_0 + 2kp.$$

Die elektrische Capacität der Flasche wächst demnach proportional dem spannenden Gewichte.

Nun sieht man ein, dass hiernach auch umgekehrt die elektrische Anziehung der beiden Belegungen eines Condensators eine Spannung in demselben und damit unter Umständen auch ein Durchbrechen der Zwischenschicht hervorrufen würde; aber es scheint nicht, dass dieser Grund zur Erklärung der Erscheinungen hinreicht.

654. Compression des Turmalins. — Wir wollen schliesslich dieselbe Analyse auf eine neuerdings von P. und J. Curie entdeckte Erscheinung anwenden. Drückt man einen Turmalinkrystall in Richtung der Achse zusammen, so erhält der Krystall eine elektrische Polarität in derselben Richtung wie diejenige ist, die durch eine Temperaturerhöhung hervorgerufen würde. Diese Polarisation ist der Zusammendrückung proportional und verschwindet mit derselben. Andere hemiedrische Krystalle, wie Quarz und Topas, verhalten sich wie das Turmalin, wenn man sie in Richtung einer Hemiedrieachse zusammendrückt.

Wir nehmen an, dass die Grundflächen eines Turmalinprismas mit Metallplatten A und B bedeckt sind, von denen die eine, B, mit der Erde in Verbindung steht, die andere, A, mit Elektricitätsquellen von constantem Potential verbunden ist.

Man kann so den Druck p und das Potential x der Belegung A variiren, indem man das System einen Kreisprozess durchlaufen lässt, und diese beiden Grössen als unabhängige Veränderliche wählen. Die von der Platte A empfangene Elektricitätsmenge dm wird ausgedrückt durch

$$dm = Cdx + hdp.$$

Der Coefficient C ist die Capacität der Belegung A bei constantem Druck, und h ist ein negativer Coefficient, wenn das Ende A des Krystalles durch den Druck positiv elektrisch wird. Das Prinzip der Erhaltung der Elektricität liefert

$$\frac{\partial C}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{25}$$

Nennt man l die Länge des Krystalles, so kann man auch die Gleichung ansetzen

$$dl = a\,dx + b\,dp, \tag{26}$$

in welcher b der Elasticitätscoefficient des Krystalles ist. Wendet man, wie oben bei der Righi'schen Flasche, das Prinzip der Erhaltung der Kraft an, so findet man daraus

$$a = -h.$$

Da der Wert von h negativ ist, zeigt die Gleichung (26), dass ein Turmalinkrystall länger wird, wenn man ihn in derselben Weise elektrisch macht, wie es durch eine Temperaturerhöhung geschehen würde, und diese Verlängerung ist dem Potential proportional.

Es folgt daraus eine Structuränderung und zweifellos auch eine Aenderung der optischen Eigenschaften, die der analog ist, die Kerr an den durchsichtigen Körpern beobachtet hat.

Da nach den Beobachtungen der Herren Curie die Elektrisirung dem Drucke proportional ist, ist der Faktor h constant; folglich ist die Capacität eines Condensators mit Turmalinplatte von dem Drucke unabhängig, dem man den Krystall aussetzt.

655. Verallgemeinerung des Lenz'schen Gesetzes. — In allen eben behandelten Fällen äussert sich die reciproke Erscheinung, deren Existenz durch das Prinzip der Erhaltung der Elektricität nachgewiesen ist, darin, dass sie sich dem Auftreten der ursprünglichen Erscheinung entgegenstellt. Man findet so in allgemeinerer Form das für die Inductionserscheinungen geltende Lenz'sche Gesetz (**511**) wieder.

Diese wenigen Beispiele werden genügen, zu zeigen, wie die allgemeinen Prinzipien der Wissenschaft es ermöglichen, die mannigfachsten Erscheinungen mit einander zu verbinden und selbst ihre numerischen Beziehungen zu bestimmen, ohne dass es nötig ist, die innere Natur der ins Spiel tretenden Kräfte zu kennen.

Druck von Eduard Krause in Berlin.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer in Berlin N.,
Monbijouplatz 3.

Beringer, A., Kritische Vergleichung der elektrischen Kraftübertragung mit den gebräuchlichsten mechanischen Uebertragungs-Systemen. (Gekrönte Preisschrift.) Preis M. 2,40.

Cauchy, A. L., Algebraische Analysis. Deutsch herausgegeben von Carl Itzigsohn. Preis M. 9,—.

Euler, Leonhard, Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Erster Theil. Ins Deutsche übertragen von H. Maser. Preis M. 7,—.

Frölich, Dr. O., Die Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus. Mit 267 Holzschnitten und einer Tafel in Lichtdruck. Preis M. 14,—.

Fourier, M., Analytische Theorie der Wärme. Deutsche Ausgabe von Dr. B. Weinstein. Mit 21 in den Text gedruckten Holzschnitten. Preis M. 12,—.
Gebunden in Leinwand M. 13,20.

Hagen, Dr. E., Die elektrische Beleuchtung mit besonderer Berücksichtigung der in den Vereinigten Staaten Nord-Amerikas zu Central-Anlagen vorwiegend verwendeten Systeme. Im Auftrage des Magistrats der Königlichen Haupt- und Residenzstadt Berlin herausgegeben. Mit 93 in den Text gedruckten Holzschnitten und zwei Tafeln. Preis M. 8,—.

Kayser, Dr. H., Lehrbuch der Spektralanalyse. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten und 9 lithogr. Tafeln. Preis M. 10,—.

Maxwell, J. C., Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. B. Weinstein. Zwei Bände. Mit zahlreichen Holzschnitten und 21 Tafeln. Preis M. 26,—.
Gebunden in Leinwand M. 28,40.

Siemens, Werner, Gesammelte Abhandlungen und Vorträge. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten, 6 Tafeln und dem Porträt des Verfassers in Stahlstich. Preis M. 14,—.

—, Sir William, Über die Erhaltung der Sonnenenergie. Aus dem Englischen übersetzt von C. E. Worms. Mit 6 Holzschnitten und einer lithographirten Tafel. Preis M. 4,—.

Weierstrass, Karl, Abhandlungen aus der Functionenlehre. (Unter der Presse.)

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

F.X.BEER, Kgl. Hofbuchbind
MÜNCHEN.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Mascart, Éleuthère Élie Nicolas, / Joubert, Jules, / Levy, Leopold.

Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus

Bd.: 1

1886

Phys.sp. 444 tc-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11881859-6